МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Задача математического программирования при нечетких исходных данных

О.В. СЕРАЯ, В.С. ЗАРУБИН, И.В. ЗИНЧЕНКО, Б.Г. ЛОЛАШВИЛИ

Украина, Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»

Сформулирована задача математического программирования при нечетких входных данных. Предложена простая методика решения задачи. Рассмотрен пример решения задачи.

Сформульовано задачу математичного програмування при нечутких вхідних даних. Запропоновано просту методику розв'язання задачі. Розглянуто приклад розв'язання задачі.

The Mathematical programming problem for input fuzzy data is formulated. The simple method is proposed for solving problem. The example of solving problem is considered.

Введение. Задачи математического программирования составляют важный подкласс задач теории принятия решений. Стандартная задача математического программирования формулируется следующим образом: найти набор переменных $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, доставляющий экстремальное (пусть, для определенности, минимальное) значение целевой функции

$$L(x)=f(X,C) \qquad (1)$$

и удовлетворяющий совокупности ограничений

$$g_i(X,B_i)\le 0\,,\ i=1,2,\ldots,m\,, \qquad (2)$$

где

$\tilde{N}=(\tilde{n}_1,\ \tilde{n}_2,\ \ldots,\ \tilde{n}_n)$, $B_i=(b_{i1},\ b_{i2},\ \ldots\ b_{im})$, i=1,2,…,m, – набор параметров задачи.

Общего универсального эффективного метода решения любых задач вида (1)-(2) не существует, однако, современная теория математического программирования для каждой конкретной задачи предлагает соответствующий подход, обеспечивающий получение решения [1,2].

Вместе с тем, следует иметь в виду, что практические ситуации, в которых необходимо принимать решения, осложнены неопределенностью. В некоторых случаях эта неопределенность связана с тем, что какие-либо параметры задачи есть случайные величины с известными законами распределения. В других, более сложных, случаях эти законы неизвестны, и, более того, в силу ограниченности исходного статистического материала, не могут быть надлежащим образом оценены. В этой ситуации для описания таких параметров используется их представление в виде нечетких чисел с заданными функциями принадлежности. Таким образом, возникает задача математического программирования с нечетко заданными параметрами, решение которой стандартными методами невозможно. Рассмотрим возможный подход к решению задачи.

Постановка задачи. Пусть

$\mu(c_j)$, $j=1,2,\ldots,n$, – функции принадлежности параметров целевой функции (1),

$\nu(b_{ij})$, $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$, – функции принадлежности параметров ограничений (2).

Как показано в [3, 4], задача (1)-(2) с учетом нечеткости параметров $\tilde{N}$, B_i, $i=1,2,\ldots,m$, сводится к следующей задаче математического программирования: найти наборы X,C,B, $B=(B_1,\ B_2,\ \ldots\ Bm)$, обеспечивающие минимальное значение функции (1), удовлетворяющие ограничениям (2) и, кроме того, ограничениям

$$\mu(c_j)\ge\alpha\,,\ j=1,2,\ldots,n\,, \qquad (3)$$

$$\nu(b_{ij})\ge\alpha\,,\ i=1,2,\ldots,m\,;\ j=1,2,\ldots,n\,, \qquad (4)$$

где α – некоторым образом выбранное значение функций принадлежности параметров задачи.

При этом естественно считать, что получаемый в результате решения задачи (1)-(4) набор X^* принадлежит множеству допустимых альтернатив со степенью, не меньшей α.

Предложенный подход обладает рядом недостатков. Во-первых, размерность задачи (1)-(4) равна $2n+nm$, что существенно выше размерности n исходной задачи. Во-вторых, при решении задачи в указанной постановке остается неизвестным уровень принадлежности нечеткого значения целевой функции, соответствующего полученному решению задачи. В-третьих, степень принадлежности всех нечетко заданных параметров задачи (1)-(4) ограничивается снизу одним и тем же уровнем α. Вопрос о том, насколько это правильно, вообще не обсуждается.

Указанные обстоятельства делают целесообразным попытки решения сформулированной задачи с использованием других подходов. Смысл одного из возможных альтернативных путей решения задачи состоит в следующем.

Методика решения задачи математического программирования с нечетко заданными параметрами. Сначала исходную задачу (1)-(2) на условный экстремум преобразуем в безусловную задачу оптимизации. С этой целью введем штрафную функцию вида

$$\Phi(X,C,B)=f(X,C)+ +\rho\cdot\max\{0,g_1(X,B_1),\dots,g_m(X,B_m)\}, \quad (5)$$

где ρ – штрафной коэффициент (большое число).

Далее, с использованием функций принадлежности параметров задачи, рассчитаем функцию принадлежности $\mu(\Phi(X,C,B))$ функции (5). Выберем теперь некоторое фиксированное значение уровня принадлежности $\mu(\Phi(X,C,B))$, которому соответствует $\Phi^*(X,C,B)$, и поставим задачу отыскания набора X^*, минимизирующего $\Phi^*(X,C,B)$. Численное значение этой задачи практически всегда может быть получено. Во многих практических случаях более простое аналитическое решение задачи достигается с использованием метода неопределенных множителей Лагранжа.

Проиллюстрируем предложенную технологию простым примером.

Пусть исходная задача формулируется следующим образом: найти набор $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, максимизирующий целевую функцию

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j^p,\ p<1 \quad (6)$$

и удовлетворяющий ограничениям

$$AX=B, \quad (7)$$

где

$$A=(a_{ij}),\ i=1,2,\dots,m,\ j=1,2,\dots,n,$$

$$b=(b_j),\ j=1,2,\dots,n,$$

а c_j – нечеткие числа с гауссовой функцией принадлежности вида

$$\mu_j(c_j)=\exp\left\{-\frac{(c_j-\overline{c}_j)^2}{2D_j}\right\},\ j=1,2,\dots,n. \quad (8)$$

Тогда для любого набора X целевая функция $L(X)$ будет нечетким числом, функция принадлежности которого, как нетрудно показать в этом конкретном случае, имеет вид

$$\mu(y)=\mu(L(X))=\exp\left\{-\frac{(y-m(X))^2}{2D(X)}\right\}, \quad (9)$$

где

$$m(X)=\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_jx_j^p, \quad (10)$$

$$D(X)=\sum_{j=1}^{n}D_jx_j^{2p}. \quad (11)$$

Зададим значение уровня функции принадлежности $\mu(y)=a$, которому соответствует некоторое значение $y=y^*$, отыскиваемое из уравнения

$$\exp\left\{-\frac{(y^*-m(X))^2}{2D(X)}\right\}=a.$$

Отсюда

$$(y^*-m(X))^2=-2D(X)\ln a=D(X)\ln\frac{1}{a^2}.$$

Далее, выбрав значение y^* из условия

$$y^*=\min\left\{m(X)-\left(D(X)\ln\frac{1}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}},\ m(X)+\left(D(X)\ln\frac{1}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

получим

$$y^*=m(X)-kD^{\frac{1}{2}}(X)= =\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_jx_j^p-k\left(\sum_{j=1}^{n}D_jx_j^{2p}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

где

$$k=\left(\ln\frac{1}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь исходная нечеткая задача сведена к следующей четкой задаче математического программирования: найти X, максимизирующий (12) и удовлетворяющий (7).

Приближенное решение задачи может быть легко получено из следующих соображений.

Так как

$$\sum_{j=1}^{n}D_jx_j^{2p}<\left(\sum_{j=1}^{n}D_j^{1/2}x_j^p\right)^2,$$

то

$$\hat{y}(X)=\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_jx_j^p-k\left(\sum_{j=1}^{n}D_j^{\frac{1}{2}}x_j^p\right)< <\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_jx_j^p-k\left(\sum_{j=1}^{n}D_jx_j^{2p}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому максимизация по X

$$\hat{y}(X)=\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_jx_j^p-k\left(\sum_{j=1}^{n}D^{\frac{1}{2}}{}_jx_j^p\right)= =\sum_{j=1}^{n}\left(c_j-kD^{\frac{1}{2}}{}_j\right)x_j^p=\sum_{j=1}^{n}h_jx_j^p \quad (13)$$

обеспечивает приближенно максимизацию (12).

Таким образом, задача сведена к отысканию набора X, максимизирующего (13) и удовлетворяющего (7). Решим эту задачу методом неопределенных множителей Лагранжа.

Функция Лагранжа имеет вид:

$$\Phi(X)=\sum_{j=1}^{n}h_j x_j^p-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_i\right).$$

Далее имеем:

$$\frac{d\Phi(X)}{dx_j}=ph_j x_j^{p-1}-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij}=0,\ j=1,2,\ldots,n,$$

откуда

$$x_j=\left(\frac{1}{ph_j}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij}\right)^{\frac{1}{p-1}},\ j=1,2,\ldots,n \qquad (14)$$

Подставляя (14) в (7), получим систему уравнений относительно $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\frac{1}{ph_j}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij}\right)^{\frac{1}{p-1}}=b_i,\ i=1,2,\ldots,m. \qquad (15)$$

Численное решение системы нелинейных уравнений (15) дает набор $\lambda_1^*,\lambda_2^*,\ldots,\lambda_m^*$. Подставляя этот набор в (14), получаем решение задачи.

Аналитическое решение может быть получено в простейшем частном случае, например, когда число ограничений на переменные задачи равно 1. Соответствующая модель возникает в задаче оптимального распределения одномерного ресурса. В этом случае

$$\Phi(X,\lambda)=\sum_{j=1}^{n}h_j x_j^p-\lambda\left(\sum_{j=1}^{n}a_j x_j-b\right).$$

Далее имеем:

$$\frac{d\Phi(x,\lambda)}{dx_j}=ph_j x_j^{p-1}-\lambda a_j=0,\ j=1,2,\ldots,n, \qquad (16)$$

$$\frac{d\Phi(x,\lambda)}{d\lambda}=\sum_{j=1}^{n}a_j x_j-b=0.$$

Используем уравнения (16) и получим выражение для x_j:

$$x_j=\left(\frac{\lambda a_j}{ph_j}\right)^{\frac{1}{p-1}}=\lambda^{\frac{1}{p-1}}\cdot q_j,\ j=1,2,\ldots,n, \qquad (17)$$

где

$$q_j=\left(\frac{a_j}{ph_j}\right)^{\frac{1}{1-p}},\ j=1,2,\ldots,n.$$

Теперь, подставляя (17) в ограничение

$$\sum_{j=1}^{n}a_j x_j=b,$$

получим соотношение для расчета λ:

$$\sum_{j=1}^{n}a_j x_j=\lambda^{\frac{1}{p-1}}\sum_{j=1}^{n}a_j q_j=b,$$

$$\lambda^{\frac{1}{p-1}}=\frac{b}{\sum_{j=1}^{n}a_j q_j}. \qquad (18)$$

В рассматриваемом частном случае соотношение (14) упрощается к виду:

$$x_j=\lambda^{\frac{1}{p-1}}\left(\frac{1}{ph_j}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\right)^{\frac{1}{p-1}},\ j=1,2,\ldots,n.$$

Тогда, с учетом (18)

$$x_j=\frac{b\cdot q_j}{\sum_{j=1}^{n}a_j q_j}=b\frac{\left(\frac{a_j}{ph_j}\right)^{\frac{1}{p-1}}}{\sum_{j=1}^{n}a_j\left(\frac{a_j}{ph_j}\right)^{\frac{1}{p-1}}},\ j=1,2,\ldots,n.$$

Решение задачи закончено. Полученное соотношение позволяет оценить влияние степени неопределенности в исходных данных на качество получаемого решения. Принципиальное достоинство предложенного подхода состоит в том, что получаемое решение обеспечивает искомое максимальное значение целевой функции с уровнем принадлежности не ниже заданного.

Выводы. Таким образом, предложен общий и достаточно простой подход, обеспечивающий возможность решения задачи математического программирования для случая, когда параметры задачи заданы нечетко.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1980. – 225с.
2. Мину М. Математическое программирование: Пер. с фр. – М.: Наука, 1990. – 488с.
3. Негойцэ К. Применение теории систем к проблемам управления: Пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – 180с.
4. Орловский С.А. Проблема принятия решений при нечеткой исходной информации. – М.: Наука, 1981, 208с.

пост. 21.01.06.