МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Об одном способе интегрирования линейных дифференциальных уравнений второго порядка

И.А. ДАВЫДОВ, А.М. ПАВЛЕНКО

Днепродзержинский государственный технический университет

В статье предложена методика решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка, часто встречающихся в задачах математической физики, в частности в задачах теплопроводности.

У статті запропонована методика вирішення лінійних диференційних рівнянь другого порядку, які часто зустрічаються в задачах математичної фізики, зокрема в задачах теплопровідності.

In clause the technique of the decision of the linear differential equations of the second order frequently meeting in tasks of mathematical physics is offered in particular in tasks is warm conductivity.

В работе [1] предложена методика решения задач теплопроводности многослойной частицы, суть которой заключалась в сведении параболических уравнений к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Настоящая работа является развитием данной методики.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ) второго порядка

$$y''(x)+p(x)y'(x)+g(x)y(x)=0, \tag{1}$$

где $p(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функции в интервале (а; в); $y(x)$ – искомая функция.

Известно, что

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\,, \tag{2}$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ – фундаментальная система решений уравнения (1), а вронскиан этой системы функций

$$W(x)=Ce^{-\int p(x)dx}. \tag{3}$$

Если ЛОДУ имеет постоянные коэффициенты, то его решение сводится к квадратному алгебраическому уравнению.

В настоящей работе предлагается алгоритм, позволяющий и уравнение (1) сводить к квадратному алгебраическому уравнению с переменными коэффициентами. Для этого введем вспомогательную функцию $\mathrm{r(x)=e^{\int \alpha(x)dx}}$, которая связана с решением $y(x)$ и коэффициентами $p(x)$ и $g(x)$ и может принимать различные выражения. При этом необходимо учесть, что

$$\frac{r'(x)}{r(x)}=\alpha(x).$$

I. Пусть $r(x)=\dfrac{y'(x)}{y(x)}$, тогда

$$\alpha(X)=-\frac{t^2+pt+q}{t} \quad \text{или} \quad t^2+(p+\alpha)t+q=0\,, \tag{4}$$

где
$$t=t(x)=\frac{y'(x)}{y(x)}. \tag{5}$$

Уравнение (4) – квадратное алгебраическое уравнение относительно t, решая которое, имеем

$$t_{1,2}=-\frac{1}{2}(p+\alpha)\pm\frac{1}{2}\sqrt{(p+\alpha)^2-4g} \quad \text{и учитывая (5)}$$

$$y_{1,2}(x)=e^{-\frac{1}{2}\int\left((p+\alpha)\pm\sqrt{(p+\alpha)^2-4g}\right)dx} \tag{6}$$

На функцию $\alpha(x)$ необходимо наложить условие

$$W(x)=Ce^{-\int p(x)dx}=e^{-\int[p(x)+\alpha(x)]dx}\sqrt{(p+\alpha)^2-4g}\,, \text{ или}$$

$$C=e^{-\int \alpha(x)dx}\sqrt{(p+\alpha)^2-4g}\,, \tag{7}$$

которое можно записать в виде

$$C^*=e^{-2\int \alpha(x)dx}\left[(p+\alpha)^2-4g\right]\neq 0. \tag{8}$$

При этом $\alpha(x)$ – произвольная функция, и ее можно выбрать следующим образом

$$\alpha(x)=\frac{1}{2}\left(\ln\{g(x)f[p(x)]\}\right)'. \tag{9}$$

Подставляя функцию (9) в условия (8) придем к дифференциальному уравнению Бернулли

$$\left(g(x)f[p(x)]\right)' + 2p(x)g(x)f[p(x)] = \\ = 2\sqrt{\frac{C^* f[p(x)]+4}{f[p(x)]}}\left(g(x)f[p(x)]\right)^{3/2}, \quad (10)$$

решая которое, получим

$$g(x) = \frac{C_2 W^2(x)}{f[p(x)]\left\{\int\sqrt{\frac{C^* f[p(x)]+4}{f[p(x)]}}W(x)dx + C_1\right\}^2}. \quad (11)$$

В частности, если $f[p(x)]=1$, то

$$g(x) = \frac{C_2 W^2(x)}{\left(C_3\int W(x)dx + C_1\right)^2}. \quad (11a)$$

Из курса дифференциальных уравнений известно, что ЛОДУ (1) можно привести к уравнению с постоянными коэффициентами при помощи замены независимой переменной

$$z = \overline{C}\int\sqrt{g(x)}dx, \quad (12)$$

а учитывая (11)

$$z = \overline{C}\ln\left|C_3\int W(x)dx + C_1\right|. \quad (13)$$

II. Выберем в качестве

$$r(x) = p(x)\frac{y'(x)}{y(x)}, \quad \frac{r'(x)}{r(x)} = \alpha(x). \quad (14)$$

В этом случае

$$\alpha(x) = -\frac{t^2 + (p - \frac{p'}{p})t + g}{t} \quad \text{или}$$

$$t^2 + \left(p - \frac{p'}{p} + \alpha\right)t + g = 0. \quad (15)$$

Корни этого квадратного уравнения

$$t_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(p - \frac{p'}{p} + \alpha\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(p - \frac{p'}{p} + \alpha\right)^2 - 4g} \quad (16)$$

и фундаментальная система решений ЛОДУ (1)

$$y_1(x) = e^{\int t_{11}(x)dx}; \quad y_2(x) = e^{\int t_2(x)dx}.$$

На функцию $\alpha(x)$ необходимо наложить условие

$$C = e^{-\int\alpha(x)dx}p\sqrt{\left(p - \frac{p'}{p} + \alpha\right)^2 - 4g}; \quad (17)$$

или

$$C^* = e^{-2\int\alpha(x)dx}p^2\left[\left(p - \frac{p'}{p} + \alpha\right)^2 - 4g\right] \neq 0. \quad (18)$$

В качестве $\alpha(x)$ можно выбрать

$$\alpha(x) = \frac{1}{2}\frac{\left(p^2 g\right)'}{p^2 g}. \quad (19)$$

И условие (18) запишем в виде дифференциального уравнения Бернулли

$$\frac{\left(p^2 g\right)'}{p^2 g} + 2\left(p - \frac{p'}{p}\right) = \frac{C_1}{p^2}\sqrt{p^2 g}, \quad (20)$$

решая которое относительно $g(x)$

$$g(x) = \frac{C_3 W^2(x)}{\left(C_1\int\frac{W(x)}{p(x)}dx + C_2\right)^2}. \quad (21)$$

III. Представим $r(x)$ в виде

$$r(x) = p(x)\frac{y'(x)}{y(x)} + g(x), \quad (22)$$

или что равносильно

$$r(x) = -\frac{y''(x)}{y(x)}. \quad (23)$$

Квадратное алгебраическое уравнение в этом случае имеет вид

$$t^2 + \left(p - \frac{p'}{p} + \alpha\right)t + g - \frac{p'}{p} + \alpha\frac{g}{p} = 0. \quad (24)$$

Корни уравнения (24)

$$t_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(p - \frac{p'}{p} + \alpha\right) \pm \\ \pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(p - \frac{p'}{p} + \alpha\right)^2 - 4\left(g - \frac{g'}{p} + \alpha\frac{g}{p}\right)}. \quad (25)$$

При этом уравнение, связывающее функции $\alpha(x)$, $p(x)$ и $g(x)$, следующее

$$e^{-\int\alpha(x)dx}p\sqrt{\left(p - \frac{p'}{p} + \alpha\right)^2 - 4\left(g - \frac{g'}{p} + \alpha\frac{g}{p}\right)} = C. \quad (26)$$

В этом случае мы имеем больше вариантов условий на функцию $\alpha(x)$.

а) $p - \dfrac{p'}{p} + \alpha = 0, \quad \alpha = \dfrac{p'}{p} - p.$ (27)

Подставляя (27) в уравнение (26), получим

$$\frac{1}{W(x)}\sqrt{\frac{4}{p}\left(g'-\frac{p'}{p}g\right)}=C,$$

или $$g'-\frac{p'}{p}g=C^{*}W^{2}p,$$

которое является линейным относительно $g(x)$, и решая которое имеем

$$g(x)=p\left(C_1\int W^2(x)dx+C_2\right). \quad (28)$$

б) $$\alpha(x)=\frac{p'(x)}{p(x)},\quad \sqrt{p^2+4\left(\frac{g'}{p}-g\left(1+\frac{p'}{p^2}\right)\right)}=C,$$

$$p^2+4\left(\frac{g'}{p}-g\left(1+\frac{p'}{p^2}\right)\right)=C^{*}; \quad (29)$$

Решая линейное уравнение (29), получим

$$g(x)=\frac{p}{W}\left[C_1+\frac{1}{4}\int W(x)\left(C^{*}-p^2\right)dx\right]. \quad (30)$$

с) $\alpha=-p$;

$$\frac{p}{W}\sqrt{\left(\frac{p'}{p}\right)^2+4\frac{g'}{p}}=C;\quad \left(\frac{p'}{p}\right)^2+4\frac{g'}{p}=\frac{C^{*}W^2}{p^2};$$

$$g'(x)=\frac{1}{4}\left(C^{*}\frac{W^2(x)}{p(x)}-\frac{(p'(x))^2}{p(x)}\right); \quad (31)$$

$$g(x)=\frac{1}{4}\int\left(C^{*}\frac{W^2(x)}{p(x)}-\frac{(p'(x))^2}{p(x)}\right)dx+C_1. \quad (32)$$

IV. Можно представить $r(x)$ в виде

$$r(x)=\frac{1}{y(x)y'(x)}. \quad (33)$$

Квадратное уравнение в этом случае

$$t^2-(p-\alpha)t-g=0 \quad (34)$$

и его решение

$$t_{1,2}=\frac{1}{2}(p-\alpha)\pm\frac{1}{2}\sqrt{(p-\alpha)^2+4g}. \quad (35)$$

Уравнение, связывающее функции $\alpha(x)$, $p(x)$ и $g(x)$ в этом случае

$$e^{\int(p-\alpha)dx}\sqrt{(p-\alpha)^2+4g}=Ce^{-\int(p-\alpha)dx}$$ или
$$e^{\int(4p-2\alpha)dx}\sqrt{(p-\alpha)^2+4g}=C^{*}. \quad (36)$$

Задавая определенные выражения для $\alpha(x)$, мы будем получать конкретные дифференциальные или трансцендентные уравнения.

Рассмотрим сведение ЛОДУ (1) к интегро-дифференциальным уравнениям. Для этого уравнение (1) запишем в виде

$$\frac{W(x)}{y'(x)y(x)}+\frac{p(x)W(x)}{y''(x)y(x)}+\frac{g(x)W(x)}{y''(x)y'(x)}=0. \quad (37)$$

Дифференцируя каждое слагаемое уравнения (37), и учитывая уравнение (1) и его производную, а затем интегрируя, получим

$$\frac{W}{yy'}=\int W\left[\frac{g}{(y')^2}-\frac{1}{y^2}\right]dx,$$
$$\frac{Wp}{y'y''}=\int W\left[\frac{g}{y^2}-\frac{gp'-g'p+g^2}{(y'')^2}\right]dx, \quad (38)$$
$$\frac{Wg}{y'y''}=\int W\left[\frac{gp'-g'p+g^2}{(y'')^2}-\frac{g}{(y')^2}\right]dx.$$

Если ввести обозначения $y(x)=y_1(x)$, $y'(x)=y_1'(x)$, $y''(x)=y_1''(x)$,

(31)

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{W(x)dx}{y_1^2(x)},$$
$$y_2'(x)=y_1'(x)\int\frac{W(x)g(x)dx}{\left[y_1^2(x)\right]^2},$$
$$y_2''(x)=y_1''(x)\int\frac{W(x)\left[g(x)p'(x)-g'(x)p(x)+g^2(x)\right]dx}{\left[y_1''(x)\right]^2},$$

то получим хорошо известные формулы

$$W(x)=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix};\qquad -W(x)p(x)=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1'' & y_2''\end{vmatrix};$$
$$W(x)g(x)=\begin{vmatrix}y_1' & y_2'\\ y_1'' & y_2''\end{vmatrix}.$$

Выводы

1. Вариантов выбора функции r(x) можно предложить более десяти.
2. Предложенную методику можно успешно использовать при решении уравнения Риккати и систем двух линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка.
3. Незначительно видоизменив предложенную методику можно найти решения ЛОДУ третьего и четвертого порядков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Давыдов И.А., Павленко А.М. Нестационарная теплопроводность слоистых тел// Математичні проблеми технічної механіки (матеріали конференції), Дніпродзержинськ, 2003. - 48-52 с.

пост. 05.09.05