

При порівнянні сферичних і циліндричних оболонок пріоритет використання належить останнім. Циліндричні цистерни на залізничних коліях ми бачимо набагато частіше. Хоча витрата металу на одиницю ваги субстата, збереженого в них, і більше, але технологія її виготовлення, зручність розміщення забезпечують їм цей пріоритет. Але - це тільки в тонкостінних оболонках. Зі зростанням товщини стінки показник технологічної витрати металу висуває як альтернативу еліпсоїдальну оболонку. До речі, вигода еліпсоїдальної форми при товстій стінці побічно підтверджується і природою. Наприклад, лівий шлуночок серця всіх живих істот - товстостінний еліпсоїд, для практично здорових людей співвідношення великої і малої осей порожнини шлуночка дорівнює 1,7.

Необхідність розробки математичної моделі напружено-деформованого стану у товстостінних еліпсоїдальних оболонках призвела до виникнення відповідного розділу теорії пружності [1]. Але теорія ця виявилася настільки складною, що академік Улитко О.Ф. додатково розглянув прикладні її задачі [2,3]. Але і розробки академіка Улитка О.Ф., на жаль, не дають можливості використовувати їх в інженерній практиці фахівцям, які не мають спеціальної математичної підготовки. Перед авторами стояла задача розробити математичну модель безмоментного напружено-деформованого стану товстостінного еліпсоїда обертання, навантаженого внутрішнім тиском, придатну для програмної реалізації.

Поставлену задачу розв'язано наступним чином.

Позначимо: ν – коефіцієнт Пуасона; a_1, b_1 – мала і велика напівосі внутрішньої порожнини еліпсоїда відповідно.

Визначимо:

$$c_1 = \sqrt{b_1^2 - a_1^2};$$

де c_1 – половина фокусної відстані внутрішньої порожнини еліпсоїда.

Пріймемо:

$$c_2 = c_1,$$

де c_2 – половина фокусної відстані зовнішньої поверхні еліпсоїда.

$$\xi_1 = \operatorname{arccch}(b_1/c_1);$$

$$\mu_1 = \operatorname{ch}(\xi_1); \quad a_2 = a_1 + \operatorname{tmd};$$

$$\xi_2 = \operatorname{arcsh}(a_2/c_1);$$

$$\mu_2 = \operatorname{ch}(\xi_2); \quad b_2 = a_2 \cdot \operatorname{cth}(\xi_2);$$

де $\operatorname{ch}, \operatorname{sh}, \operatorname{cth}$ – гіперболічні косинус, синус, котангенс; $a_1, a_2, \operatorname{tmd}$ – розміри на полюсі еліпсоїда; b_2 – розмір більшої півосі зовнішньої поверхні еліпсоїда.

Загальне рішення для всіх еліпсоїдів:

Дано: $\xi_1, \xi_2, \mu_1, \mu_2, m = 1/\nu; \eta$ (для полюса $\eta = \pi/2$, для екватора $\eta = 0$).

Загальний алгоритм:

Задамо: $\theta = \cos \eta;$

$k = 1, 2, 3, 4, 5;$

$n = 2k-1,$ (тобто $n = 1, 3, 5, 7, 9$);

Визначимо поліноми Лежандра першого роду:

$$P_n(\mu_1), P_n(\mu_2), P_n^1(\theta), P_n^1(\mu_1), P_n^1(\mu_2).$$

Визначимо поліноми Лежандра другого роду:

$$Q_n(\mu_1), Q_n(\mu_2), Q_n^1(\mu_1), Q_n^1(\mu_2).$$

Визначимо коефіцієнти, що відповідають ξ_i , де $i = 1, 2$.

$$\beta_n(\xi_i) = \frac{P_n(\mu_i)}{P_n^{(1)}(\mu_2)} - \frac{1}{n(n+1)} \cdot \operatorname{cth} \xi_i \frac{P_n^{(1)}(\mu_1)}{P_n^{(1)}(\mu_2)};$$

$$\alpha_{1n}(\xi_i) = \frac{1}{2(n-1)} \frac{P_n(\mu_i)}{\mu_2 P_{n-1}^{(1)}(\mu_2)} + \frac{1}{n-1} \frac{\mu_i P_{n-1}(\mu_i)}{\mu_2 P_{n-1}^{(1)}(\mu_2)} - \frac{1}{n(n-1)} \frac{(\operatorname{cth} \xi_i) \mu_i P_{n-1}^{(1)}(\mu_i)}{\mu_2 P_{n-1}^{(1)}(\mu_2)} - \frac{3m-4}{2m} \frac{1}{n(n^2-1)} \frac{\operatorname{cth} \xi_i P_n^{(1)}(\mu_i)}{\mu_2 P_{n-1}^{(1)}(\mu_2)},$$

$$\alpha_{11}(\xi_i) = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{3m-4}{2m} \right) \frac{\mu_i}{\mu_2},$$

$$\alpha_{2n}(\xi_i) = -\frac{1}{2(n-1)} \frac{P_n(\mu_i)}{\mu_2 P_{n+1}^{(1)}(\mu_2)} + \frac{\mu_i P_{n+1}(\mu_i)}{\mu_2 P_{n+1}^{(1)}(\mu_2)} - \frac{3m-4}{2m} \frac{1}{n(n+1)^2} \frac{\operatorname{cth} \xi_i P_n^{(1)}(\mu_i)}{\mu_2 P_{n+1}^{(1)}(\mu_2)} - \frac{(\operatorname{cth} \xi_i) \mu_i P_{n+1}^{(1)}(\mu_i)}{(n+1)^2 \mu_2 P_{n+1}^{(1)}(\mu_2)},$$

$$\chi_n(\xi_i) = \frac{P_n^{(1)}(\mu_i)}{P_n^{(1)}(\mu_2)},$$

$$\alpha_{3n}(\xi_i) = \frac{n+1}{n-1} \frac{\mu_i P_{n-1}^{(1)}(\mu_i)}{\mu_2 P_{n-1}^{(1)}(\mu_2)} - \frac{1}{2(n-1)} \frac{P_n^{(1)}(\mu_i)}{\mu_2 P_{n-1}^{(1)}(\mu_2)},$$

$$\alpha_{11}(\xi_i) = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{3m-4}{2m} \right) \frac{\operatorname{ch} \xi_i}{\operatorname{ch} \xi_1}, \quad \alpha_{31}(\xi_i) = -\frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh} \xi_i}{\operatorname{ch} \xi_1}.$$

$$\alpha_{4n}(\xi_i) = \frac{n}{n+1} \frac{\mu_i P_{n+1}^{(1)}(\mu_i)}{\mu_2 P_{n+1}^{(1)}(\mu_2)} + \frac{1}{2(n+1)} \frac{P_n^{(1)}(\mu_i)}{\mu_2 P_{n+1}^{(1)}(\mu_2)},$$

$$\alpha_n(\xi_i) = \frac{Q_n(\mu_i)}{Q_n^{(1)}(\mu_1)} - \frac{1}{n(n+1)} (\operatorname{cth} \xi_i) \frac{Q_n^{(1)}(\mu_i)}{Q_n^{(1)}(\mu_1)},$$

$$\gamma_{1n}(\xi_i) = \frac{1}{2(n-1)} \frac{Q_n(\mu_i)}{\mu_1 Q_{n-1}^{(1)}(\mu_1)} + \frac{1}{n-1} \frac{\mu_i Q_{n-1}(\mu_i)}{\mu_1 Q_{n-1}^{(1)}(\mu_1)} - \frac{1}{n(n-1)} \frac{(\operatorname{cth} \xi_i) \mu_i Q_{n-1}^{(1)}(\mu_i)}{\mu_1 Q_{n-1}^{(1)}(\mu_1)} - \frac{3m-4}{2m} \frac{1}{n(n^2-1)} \frac{\operatorname{cth} \xi_i Q_n^{(1)}(\mu_i)}{\mu_1 Q_{n-1}^{(1)}(\mu_1)},$$

$$\alpha_{11}(\xi_i) = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{3m-4}{2m} \right) \frac{\mu_i}{\mu_2},$$

$$\gamma_{2n}(\xi_i) = -\frac{1}{2(n-1)} \frac{Q_n(\mu_i)}{\mu_1 Q_{n+1}^{(1)}(\mu_i)} + \frac{\mu_i Q_{n+1}(\mu_i)}{\mu_1 Q_{n+1}^{(1)}(\mu_i)} -$$

$$\frac{3m-4}{2m} \frac{1}{n(n+1)^2} \frac{(\text{ch}\xi_i) Q_n^{(1)}(\mu_i)}{\mu_1 Q_{n+1}^{(1)}(\mu_i)} - \frac{(\text{ch}\xi_i) \mu_i Q_{n+1}^{(1)}(\mu_i)}{(n+1)^2 \mu_1 Q_{n+1}^{(1)}(\mu_i)},$$

$$\gamma_{3n}(\xi_i) = \frac{n+1}{n-1} \frac{\mu_i Q_{n-1}^{(1)}(\mu_i)}{\mu_1 Q_{n-1}^{(1)}(\mu_i)} - \frac{1}{2(n-1)} \frac{Q_n^{(1)}(\mu_i)}{\mu_1 Q_{n-1}^{(1)}(\mu_i)},$$

$$\gamma_{31}(\xi_i) = -\frac{1}{2} \frac{\text{sh}\xi_i}{\mu_1},$$

$$\gamma_n(\xi_i) = \frac{Q_n^{(1)}(\mu_i)}{Q_n^{(1)}(\mu_1)},$$

$$\gamma_{4n}(\xi_i) = \frac{n}{n+1} \frac{\mu_i Q_{n+1}^{(1)}(\mu_i)}{\mu_1 Q_{n+1}^{(1)}(\mu_i)} +$$

$$+ \frac{1}{2(n+1)} \frac{Q_n^{(1)}(\mu_i)}{\mu_1 Q_{n+1}^{(1)}(\mu_i)}.$$

Складемо систему з 16 рівнянь (8 пар) при $k=2$, 3, 4, 5, тобто $n=2k-1$, $i, \xi_i=1, 2$ (8 рівнянь при $\xi_i=1$; 8 рівнянь при $\xi_i=2$):

$$\beta_n(\xi_i) \overline{B}_n - \alpha_{1n}(\xi_i) \overline{A}_{n-1} - \alpha_{2n}(\xi_i) \overline{A}_{n+1} + \delta_n(\xi_i) \overline{D}_n -$$

$$- \gamma_{1n}(\xi_i) \overline{C}_{n-1} - \gamma_{2n}(\xi_i) \overline{C}_{n+1} = 0,$$

$$\chi_n(\xi_i) \overline{B}_n - \alpha_{3n}(\xi_i) \overline{A}_{n-1} - \alpha_{4n}(\xi_i) \overline{A}_{n+1} + \nu_n(\xi_i) \overline{D}_n -$$

$$- \gamma_{3n}(\xi_i) \overline{C}_{n-1} - \gamma_{4n}(\xi_i) \overline{C}_{n+1} = 0$$

Додамо 4 рівняння для випадку $k=1$, тобто $n=1$:

Для внутрішньої поверхні (для $n=1$):

$$\beta_1(\xi_1) \overline{B}_1 - \alpha_{11}(\xi_1) \overline{A}_0 - \alpha_{21}(\xi_1) \overline{A}_2 + \delta_1(\xi_1) \overline{D}_1 -$$

$$- \gamma_{11}(\xi_1) \overline{C}_0 - \gamma_{21}(\xi_1) \overline{C}_2 = \mu_1,$$

$$\chi_1(\xi_1) \overline{B}_1 - \alpha_{31}(\xi_1) \overline{A}_0 - \alpha_{41}(\xi_1) \overline{A}_2 + \nu_1(\xi_1) \overline{D}_1 -$$

$$- \gamma_{31}(\xi_1) \overline{C}_0 - \gamma_{41}(\xi_1) \overline{C}_2 = -\text{sh}(\xi_1),$$

Для зовнішньої поверхні (для $n=1$):

$$\beta_1(\xi_2) \overline{B}_1 - \alpha_{11}(\xi_2) \overline{A}_0 - \alpha_{21}(\xi_2) \overline{A}_2 + \delta_1(\xi_2) \overline{D}_1 -$$

$$- \gamma_{11}(\xi_2) \overline{C}_0 - \gamma_{21}(\xi_2) \overline{C}_2 = 0,$$

$$\chi_1(\xi_2) \overline{B}_1 - \alpha_{31}(\xi_2) \overline{A}_0 - \alpha_{41}(\xi_2) \overline{A}_2 + \nu_1(\xi_2) \overline{D}_1 -$$

$$- \gamma_{31}(\xi_2) \overline{C}_0 - \gamma_{41}(\xi_2) \overline{C}_2 = 0.$$

Маємо 20 рівнянь з 22 невідомими:

$\overline{B}_1, \overline{B}_3, \overline{B}_5, \overline{B}_7, \overline{B}_9, \overline{D}_1, \overline{D}_3, \overline{D}_5, \overline{D}_7, \overline{D}_9, \overline{A}_0, \overline{A}_2,$
 $\overline{A}_4, \overline{A}_6, \overline{A}_8, \overline{A}_{10}=0, \overline{C}_0=0, \overline{C}_2, \overline{C}_4, \overline{C}_6, \overline{C}_8, \overline{C}_{10}.$

Щоб таку систему розв'язати, додамо ще 2 рівняння-тотожності, що відбивають умови $\overline{A}_{10}=0, \overline{C}_0=0.$

Тоді матриця коефіцієнтів при змінних $\overline{B}_i, \overline{D}_i, \overline{A}_i, \overline{C}_i$ буде представлена у виді наступної таблиці:

Систему з 22 рівнянь вирішуємо методом Гаусса.

Визначимо:

$$A_n = \left[n \mu_2 P_n^{(1)}(\mu_2) \right]^{-1} \overline{A}_n,$$

$$B_n = \left[(2n+1) P_n^{(1)}(\mu_2) \right]^{-1} \overline{B}_n,$$

$$C_n = \left[n \mu_1 Q_n^{(1)}(\mu_1) \right]^{-1} \overline{C}_n,$$

$$D_n = \left[(2n+1) Q_n^{(1)}(\mu_1) \right]^{-1} \overline{D}_n,$$

Визначимо $V_{\text{расч}}$:

$D_0 = 0;$

$$A_0 = (\mu_2)^{-1} \overline{A}_0;$$

$$V_{\text{дан}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{n=9} \frac{1}{n(n+1)} \left\{ (2n+1) B_n P_n^{(1)}(\mu_1) + (2n+1) D_n Q_n^{(1)}(\mu_1) - \right.$$

$$- A_{n-1} \left[(n+1) \mu_1 P_{n-1}^{(1)}(\mu_1) + \frac{3m-4}{2m} P_n^{(1)}(\mu_1) \right] -$$

$$- A_{n+1} \left[n \mu_1 P_{n+1}^{(1)}(\mu_1) - \frac{3m-4}{2m} P_n^{(1)}(\mu_1) \right] -$$

$$- C_{n-1} \left[(n+1) \mu_1 Q_{n-1}^{(1)}(\mu_1) + \frac{3m-4}{2m} Q_n^{(1)}(\mu_1) \right] -$$

$$\left. - C_{n+1} \left[n \mu_1 Q_{n+1}^{(1)}(\mu_1) - \frac{3m-4}{2m} Q_n^{(1)}(\mu_1) \right] \right\} P_n^{(1)}(\theta).$$

$$\overline{V}_{\text{расч}} = V_{\text{расч}} \cdot 3 \quad (\text{в Улітка } \overline{V}_{\text{расч}} = U_r, \text{ див. стр. 221}).$$

Знаходимо відносну об'ємну деформацію

$$\overline{\theta} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) [A_n P_n(\text{ch}\xi) + C_n Q_n(\text{ch}\xi)] P_n(\cos \eta).$$

Після чого, знаходимо для внутрішньої поверхні (при $\xi=\xi_i$):

$$R = \text{ch } \xi_i;$$

$$Z = -\text{sh } \xi_i;$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{sh}\xi_1 \cos \eta}{\sqrt{\text{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta}};$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{ch}\xi_1 \sin \eta}{\sqrt{\text{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta}};$$

$$\sigma_\xi = -R \cos \alpha + Z \sin \alpha;$$

$$e_\varphi = \frac{V_{\text{дан}}}{\text{sh}\xi_1 \cdot \sin \eta}.$$

Для випадку $\eta > 0$:

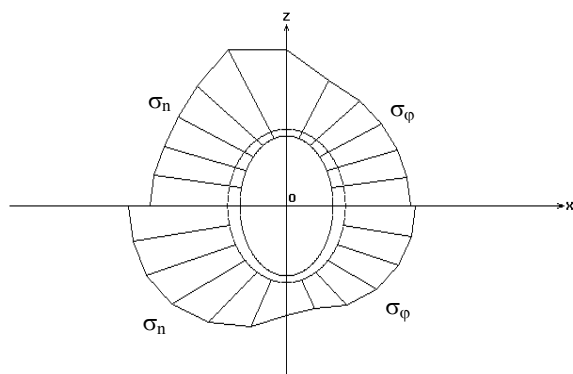
$$\sigma_\eta = \frac{m \cdot \theta}{(m-2)m} + e_\varphi;$$

$$\sigma_{\eta} = \left(1 + \frac{1}{m}\right) \frac{m}{(m-2)} \theta - (\sigma_{\xi_1} + \sigma_{\varphi}).$$

Для випадку $\eta=0$: $\sigma_{\varphi} = \sigma_{\eta} = \left(1 + \frac{1}{m}\right) \left(\frac{m}{(m-2)}\right) \theta$.

Аналогічно визначаємо для зовнішньої поверхні, але при цьому $R=0, Z=0, \xi=\xi_2$.

Запропонований алгоритм чисельно реалізовано. Картина розподілу напруг у товстостінному еліпсоїді обертання зі співвідношенням осей, близьким до оптимального (1,7) показана нижче.



σ_n – графіки розподілу кільцевих напружень
 σ_{φ} – графіки розподілу меридіальних напружень

Використання одержаної математичної моделі напружено-деформованого стану товстостінного еліпсоїда дозволило знаходити фізико-механічні характеристики міокарда лівого шлуночка серця (напруги і деформації), зробити їх визначальними при функціональній діагностиці серцево-судинної системи.

Як показав досвід, запропонована модель має потребу в подальшому спрощенні, а саме, є необхідність одержання формульних залежностей для еліпсоїдів, об'єднаних у групи за принципом спільності співвідношень геометричних розмірів. Зокрема, для серця людини об'єднання в групи доцільно здійснити за співвідношенням розмірів порожнини і товщини стінки для осіб різної статі, віку, виду їх трудової діяльності. Програмну реалізацію доцільно виконати мовою, що дозволить встановлювати програму на мобільний телефон.

ЛІТЕРАТУРА

1. Sul problema dell'equilibrio elastico di un ellissoide di rotazione. Nota di Orazio Tedone, presentata dal Socio V. Volterra, Meccanica, Italia, 1919, s.76-84.
2. Куценко Г.В., Улитко А.Ф. Осесимметричная деформация полого эллипсоида. В сб. «Тепловые напряжения в элементах конструкций». Выпуск 11. – К.: Наукова думка, 1971, с. 37-42.
3. Улитко А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. – К.: Наукова думка, 1979.- 261 с.
4. Янке Е. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. – М.: Наука, 1977.- 342 с.

пост. 12.09.05
 после дораб. 26.12.05

Математическое моделирование процессов тепло-, массообмена при обработке металлического расплава на УКП переменного тока

*В.П. ПИПТЮК,¹ В.Ю. БОЛОТОВ,² И.А. ПАВЛЮЧЕНКОВ,² И.Н. ЛОГОЗИНСКИЙ²,
 В.Г. КНОХИН³, В.А. ВИХЛЕВЦУК⁴*

Институт черной металлургии НАН Украины¹,
 Днепропетровский государственный технический университет²,
 ОАО «Днепроспецсталь»³

Приведена часть разработанной трехмерной математической модели, касающаяся описания процессов тепло-массообмена в наполненной ковшевой ванне при обработке расплава на УКП переменного тока, а также результаты численных исследований указанных процессов при выпечной обработке стали разных марок и установленные закономерности влияния переменных технологических параметров на продолжительность доводки расплава по температуре. Обоснован рациональный вариант расположения донной продувочной фурмы сталковша.

Наведено частину розробленої математичної моделі, що стосується опису процесів тепло-масообміну в наповненій ковшовій ванні під час обробки розплаву на УКП змінного струму, а також результати чисельних досліджень вказаних процесів під час позапічового доведення розплаву сталі різних марок та встановлені закономірності впливу змінних технологічних параметрів на тривалість доведення розплаву за температурою. Обґрунтовано раціональний варіант розміщення донної продувочної фурми сталковша.

A part of elaborated three-dimensional mathematical model of heat exchange in filled ladle bath under processing of melting on LF of alternating current and results of dimensional researching of given processes at out of bath processing of different trade marks of steel and determination regularity of influence changing technological basic parameters of duration of processing of melting on temperature is carried out. Rational variant of arrangement of bottom blowing blast tuyere of steel ladle is proofed.

