DOI: 10.31319/2519-8106.2(39)2018.154222
УДК 519.85
А.І. Косолап, д. фіз.-мат. н., професор (зав. кафедри спеціалізованих комп'ютерних систем), anivkos@ua.fm
Д.О. Дубовик, аспірант, wolverine17sf@gmail.com
Український державний хіміко-технологічний університет, м. Дніпро

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КВАДРАТИЧНОЇ ЗАДАЧІ ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ

Стаття присвячена проблемі розв'язання квадратичної задачі про призначення (QAP) з використанням сучасних методів оптимізації. В статті розглянуто декілька різних методів дослідження QAP, але вони не знаходять найкращі розв'язки та потребують багато часу.

В роботі використано метод Франка-Вулфа, який потребує досить мало часу, навіть при розв'язуванні задач великої розмірності. Далі для розв'язування задачі QAP використано точну квадратичну регуляризацію. Це дозволяє отримувати найкращі розв'язки в задачі QAP навіть для задач великої розмірності.

Проведені порівняльні числові експерименти підтверджують ефективність методу точної квадратичної регуляризації при розв'язуванні задач QAP.

***Ключові слова**: квадратична задача про призначення, QAP, метод Франка-Вулфа, квадратична регуляризація.*

The article is devoted to the problem of quadratic assignment (QAP). We consider modern methods of optimization for its the solution. Several different QAP research methods are considered in the article, but they do not find the best solutions and time consuming.

The Frank-Wolfe method is used in this work, which requires quite a bit of time, even for solving problems of large dimension. Next, an exact quadratic regularization is used to solve the QAP problem. This allows to get the best solutions in the QAP problem even for large dimensional problems.

The comparative numerical experiments confirm the efficiency of the method of exact quadratic regularization for solving QAP problems.

***Keywords**: quadratic assignment problem, QAP, Frank-Wolfe method, quadratic regularization.*

Постановка проблеми

Квадратична задача про призначення досить відома і є однією з найбільш важливих і складних в комбінаторній оптимізації [1]. Вона виникає при розв'язуванні різних прикладних задач. Ця задача застосовується при розв'язуванні задач розміщення, завантаження багатопроцесорних систем, трасування друкованих плат, у багатьох задачах конструкторсько-топологічного проектування. Класична лінійна задача про призначення має ефективний метод розв'язування, а заміна лінійної цільової функції на квадратичну значно ускладнює задачу.

Для розв'язування квадратичної задачі про призначення використовуються методи розгалужень та границь [2], генетичні, еволюційні та інші методи, які використовують випадковий пошук [3]. Значних успіхів у розв'язуванні даної задачі цими методами не отримано. У методах розгалужень та границь будується дерево рішень. Кожна гілка дерева вимагає розв'язування задачі з додатковими лінійними обмеженнями. Тому на кожній ітерації цього методу зростає розмірність задачі. Зі збільшенням розмірності задачі число розгалужень дерева збільшується по експоненті. Це дозволяє на сучасних комп'ютерах вирішувати таку задачу даним методом тільки малої розмірності. У той же час, методи випадкового пошуку не гарантують отримання точного розв'язку і дозволяють знайти його тільки з певною ймовірністю. Все це стимулює пошук нових методів для розв'язування квадратичної задачі про призначення.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Для багатьох комбінаторних задач оптимізації існують відмінні один від одного, але еквівалентні математичні формулювання, які підкреслюють різні структурні характеристики проблеми, що може призвести до різних підходів її вирішення.

Перші спроби вирішити QAP усували квадратичний член в цільовій функції, щоб перетворити проблему на лінійну програму. Лінеаризація цільової функції зазвичай досягається шляхом введення нових змінних та нових лінійних (і бінарних) обмежень. Потім можуть бути застосовані існуючі методи для лінійного цілочисельного програмування (MILP). Однак дуже велика кількість нових змінних та обмежень, як правило, створює перешкоду для ефективного розв’язування отриманої лінеаризації через MILP.

Існує декілька лінеаризацій QAP, серед яких можна виділити чотири: лінеаризація Лоулера [4], яка була першою, лінеаризація Кауфмана та Брейекса [5], яка має найменше число змінних і обмежень, Фрізе та Ядегара [6] та лінеаризацію з Адамса і Джонсона [7]. Остання є невеликою, але релевантною модифікацією лінеаризації, запропонованою Фрізе та Ядегаром, об'єднує більшість попередніх лінеаризацій.

Лоулер замінює квадратичні терміни $x_{ij}x_{kl}$ в цільовій функції на n^4 змінні і отримує таким чином лінійну програму з бінарними змінними $n^4 + n^2$ і обмеженнями $n^4 + 2n^2 + 1$. Таким чином, QAP можна записати у вигляді наступної лінійної програми [4, 8]:

$$
\begin{gathered}
\min \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{n} c_{ijkl} y_{ijkl}, \\
(x_{ij}) \in X_n, \\
\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{n} y_{ijkl} = n^2, \\
x_{ij} + x_{kl} - 2y_{ijkl} \ge 0, i, j, k, l = 1,2,\dots,n, \\
y_{ijkl} \in \{0,1\}, i, j, k, l = 1,2,\dots,n.
\end{gathered} \tag{1}
$$

В лінеаризації Кауфманна і Брокекса додають досить велику постійну до коефіцієнтів витрат, що не змінює оптимального рішення, і можна припустити, що всі коефіцієнти витрат c_{ijkl} є невід’ємні. Переставляючи умови в цільову функцію, отримаємо

$$
\sum_{i,j=1}^{n} x_{ij} \sum_{k,l=1}^{n} c_{ijkl} x_{kl} . \tag{2}
$$

Кауфманн і Брокекс визначають n^2 нові дійсні змінні

$$
\omega_{ij} := x_{ij} \sum_{k.l=1}^{n} c_{ij} x_{kl}, i, j = 1,\dots,n \tag{3}
$$

і підключають їх до цільової функції (2), щоб отримати лінійну цільову функцію форми

$$
\sum_{i,j=1}^{n} \omega_{ij},
$$

Тоді вони вводять n^2 констант для $i, j = 1, \dots, n$ і показують, що початкова формула QAP еквівалентна наступній змішаній лінійній програмі:

$$
\begin{gathered}
\min \sum_{i,j=1}^{n} \omega_{ij} \\
(x_{ij}) \in X_n, \\
a_{ij} x_{ij} + \sum_{k,l=1}^{n} c_{ijkl} x_{kl} - \omega_{ij} \le a_{ij}, i, j = 1,2,\dots,n, \\
\omega_{ij} \ge 0, i, j = 1,2,\dots,n.
\end{gathered} \tag{4}
$$

У цій формулі використовуються n^2 дійсні змінні, n^2 двійкові змінні та $n^2 + 2n$ обмеження. Доказ еквівалентності QAP до змішаної цільової лінійної програми (4) можна знайти в [8, 5]. Вищезгадана лінеаризація, як і інші, що з'явилися в літературі [9, 10], можна отримати шляхом застосування загальної стратегії лінеаризації, запропонованої Гловером [11].

Фрізе і Ядегар замінюють добуток $x_{ij}x_{kl}$ двійкових змінних безперервними змінними y_{ijkl} ($y_{ijkl} := x_{ij}x_{kl}$) і одержують змішане ціле лінійне програмне формулювання для QAP, яке має n^4

дійсних змінних, n^2 двійкових змінних та $n^4 + 4n^3 + n^2 + 2n$ обмежень. Для отримання нижньої межі Фрізе та Ядегар розглянули лагранжеву релаксацію цієї змішаної цілочисельної програми шляхом розслаблення обмежень і розв'язали її приблизно, застосовуючи методи субградієнтної оптимізації. Вони показали, що розв'язок релаксації Лагранжа більший за всі нижні межі, отримані методами редукції, застосованими до Гільмора-Лоулера, що відповідає QAP.

З наслідку Джеффріона [12] випливає, що рішення релаксації Лагранжана дорівнює рішенню безперервної релаксації змішаної цільової функції QAP Фрізе і Ядегара.

Методи розв'язання QAP

Існуючі методи та алгоритми пошуку рішення QAP можна умовно розділити на дві великі групи:

– методи точного розв'язання (гілок та границь, традиційні методи ріжучої площини, багатогранної ріжучої площини);
– евристичні та мета-евристичні алгоритми (імітаційний відпал, Табу-пошук, генетичні алгоритми, алгоритм мурашиної колонії, методи побудови та інші).

Точний алгоритм комбінаторної задачі оптимізації забезпечує глобальний оптимальний розв'язок задачі.

Метод розгалужень та границь

Алгоритми розгалужень та границь успішно застосовуються для багатьох складних комбінаторних задач оптимізації, і є одними з найбільш ефективних точних алгоритмів для розв'язування QAP. Основними складовими алгоритму гілок і границь є обмеження, розгалуження та правило вибору.

Три типи стратегій розгалуження в основному використовуються для QAP: одиночне призначення (Гілмор [13], Лоулер [4]), парне призначення (Гаветт і Плітер [14], Ленд [15], Нагент та ін. [16]), та призначення на основі відносного позиціювання (Мерчандані та Обата [17]). Одиночне призначення, призначає об'єкту місце розташування на кожному кроці розгалуження, тобто кожна проблема розділена на підпроблеми шляхом визначення положення одного з об'єктів, які ще не призначені.

Алгоритми парного призначення призначають пару об'єктів для пари розташувань на етапі розгалуження, тоді як у алгоритмах відносного позиціювання рівні дерева пошуку не відповідають кількості об'єктів, вже призначених для місцеположення. Тут фіксовані присвоювання в межах кожної підпроблеми визначаються з точки зору відстаней між об'єктами, тобто їх відносними позиціями. Чисельні результати показують, що алгоритми парного призначення або відносного розташування перевершують алгоритми одиночного призначення.

Незважаючи на суттєві покращення у розробці точних алгоритмів для QAP, проблеми розміру n>20 досі непрактичні для вирішення через дуже високі вимоги до часу роботи комп'ютера. Це робить розробку евристики незамінною, як алгоритми, які забезпечують якісне рішення за розумний час. Багато досліджень було присвячено розробці таких підходів.

Алгоритм мурашиної колонії

Ідея імітації поведінки мурах для пошуку гарних рішень для комбінаторних задач оптимізації була ініційована Доріго, Маньєццо та Фарні [18, 19]. Принцип цих методів ґрунтується на тому, як мурашки шукають їжу і знаходять свій шлях назад до гнізда. Спочатку мурахи досліджують територію навколо свого гнізда випадково. Як тільки мураха знаходить джерело їжі, вона оцінює кількість та якість їжі та поставляє її частину у гніздо. Під час зворотного відправлення мураха залишає хімічний слід із феромонів на землі. Роль цього феромонного сліду полягає в тому, щоб спрямувати інших мурашок у бік джерела їжі, а кількість феромонів, залишених мурахою, залежить від кількості знайдених продуктів. Через деякий час шлях до джерела їжі буде позначений сильним слідом феромонів, і чим більше мурах, які досягають джерела їжі, тим сильніше залишається слід із феромонів.

Оскільки джерела, близькі до гнізда, відвідуються частіше, ніж ті, що далеко, феромонні стежки, що ведуть до найближчих джерел, ростуть швидше. Ці феромонні стежки експлуатуються мурахами як засіб, щоб знайти свій шлях від гнізда до джерела їжі та назад.

Транспозиція реальної поведінки щодо пошуку продуктів харчування в алгоритмічну структуру для вирішення задач комбінаторної оптимізації здійснюється шляхом аналогії між:

1) реальною областю пошуку мурах та набором можливих рішень комбінаторної задачі;

2) кількість їжі в джерелі та цільовою функцією;

3) феромонова трасою та адаптивною пам'яттю.

Генетичні алгоритми

Одним із різновидів евристичних алгоритмів є генетичні алгоритми.

Генетичний алгоритм (GA) — це еволюційний метод пошуку для вирішення задач оптимізації з використанням механізмів, що нагадують біологічну еволюцію. У GA генерується життєвий цикл живого організму: відтворення потомства, спадкоємність і механізм природного відбору, який зберігає особини з найкращим критерієм. В GA всі терміни пов’язані з біологією і мають спрощений вигляд [20]. GA оперує популяціями особин. Особина — об’єкт предметної області вирішуваної проблеми. Кожна особина складається із хромосом — закодованим набором кінцевої множини чисел параметрів задачі, точки в просторі пошуку. Хромосоми в свою чергу складаються із впорядкованої послідовності генів — атомарних базових елементів GA.

Мірою пристосованості кожної особини в популяції є функція пристосованості або функція оцінки (fitness function). Вона дозволяє вибрати найбільш пристосовані особини (з максимальним значення фітнес-функції) відповідно до еволюційних принципів виживання «найсильніших» (найкраще пристосувалися). Функція пристосованості впливає на функціонування генетичних алгоритмів і повинна мати точне і коректне визначення. У завданнях оптимізації функція пристосованості, як правило максимізується і називається цільовою функцією. На кожній ітерації генетичного алгоритму пристосованість кожної особини даної популяції оцінюється за допомогою функції пристосованості, і на цій основі створюється наступна популяція особин, що складають безліч потенційних рішень проблеми, наприклад, завдання оптимізації. Чергова популяція в генетичному алгоритмі називається поколінням.

Сам алгоритм складається з декількох кроків [21].

Підготовчий етап — формування початкової популяції (початкового набору рішень). Алгоритм для формування може бути різним, але найчастіше використовують випадковий процес з метою охопити більшу різноманітність для пошуку рішень. Можливе застосування інших способів формування, наприклад, із заздалегідь відомими властивостями, але слід мати на увазі, що це може вплинути на хід розвитку системи надалі.

Відбір — важливий етап в алгоритмі, відповідає за вибір напрямку розвитку популяцій, найчастіше відкидаються рішення з низьким значенням функції пристосованості, що сприяє поліпшенню середньої пристосованості всієї популяції.

Схрещування — етап, на якому відбувається утворення нових рішень в популяції, що пройшла через відбір, для відновлення чисельності.

Особливість його в тому, що при використанні схрещування беруться два або більше існуючих рішень в популяції, а з них — складові частини (гени) і з'єднуються в новому рішенні, яке залишається в популяції.

Схрещування не дозволяє в повній мірі охопити всі можливі варіанти поєднань і значень генів, тому не менш важливий процес мутації. Він полягає в тому, що в деяких рішеннях з популяції відбуваються випадкові зміни в генах. Цей процес сприяє збільшенню різноманітності особин в популяції.

Оцінка рішень і зупинка алгоритму — в більшості випадків; якщо для вирішення завдання необхідно застосовувати генетичний алгоритм, то немає критерію зупину, заснованого на самих рішеннях, замість нього застосовується підхід з числом обчислень (числом створюваних популяцій). Іноді зупинку алгоритму можна виробляти наперед, якщо можливий випадок виродження популяцій.

Табу-пошук

У 1991 році Тайлард запропонував надійний метод табу [22]. Метод реактивного табу був запропонований в 1994 році [23]. У 2005р. Дрезнер [24] представив новий пошук табу.

Основні ідеї табу-пошуку (TS) можна охарактеризувати наступним чином. Перший інгредієнт, який є загальним для більшості евристичних та алгоритмічних процедур, полягає у визначенні сусідства або набору ходів, які можуть бути застосовані до даного рішення щоб створити новий.

Серед усіх сусідніх рішень TS прагне отримати найкращу евристичну оцінку. У найпростішому випадку така оцінка вказує на вибір переміщень, що покращує більшу частину цільової функції. Якщо немає покращених ходів (що вказують на місцевий оптимум), TS вибирає той, який найменш погіршує цільову функцію.

Щоб уникнути повернення до місцевого оптимуму, який тільки що був відвіданим, перехресний перехід повинен бути заборонений. Це відбувається шляхом збереження цього переміщення (або, точніше, характеристики даного переміщення) у структурі даних, яка називається табу-списком. Цей список містить кількість елементів, що визначають заборонені (табу) ходи. Параметр s називається розміром списку табу. Вибір цього розміру табу-списку є критичним. Багато досліджень зроблено для визначення оптимального чи хорошого розміру цього списку табу, а автори пропонують різні підходи, включаючи фіксований розмір та динамічний розмір.

Розглянуті методи використовуються при розв'язуванні задачі QAP, але значних успіхів при їх використанні не отримано. Тому пошук більш ефективних методів для розвязування задачі QAP продовжується.

Формулювання мети дослідження

Розробка ефективного методу розв'язування квадратичної задачі про призначення. Перевірка актуальності методу точної квадратичної регуляризації щодо розв'язування QAP. Порівняння отриманих результатів із результатами, отриманими іншими методами та алгоритмами на точність і швидкодію.

Виклад основного матеріалу

Розглянемо квадратичну задачу про призначення в такій постановці. Є m пунктів, в яких необхідно розмістити (поставити у відповідність) n об'єктів. Кожному пункту відповідає тільки один об'єкт. Відомо відстані d_{ij} між i-м та j-м пунктами, а також показники, що характеризують взаємозв'язок між s-м і k-м об'єктами. Це може бути трафік між об'єктами, вартість передачі даних або кількість комунікацій і т.п. Необхідно визначити таке призначення (розміщення) об'єктів, щоб мінімізувати відповідні витрати або інші показники, виражені квадратичною функцією. Математична модель цієї задачі буде мати наступний вигляд:

$$\min\{\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{k=s+1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{sk} d_{ij} x_{si} x_{kj}\}$$

при обмеженнях:

$$\sum_{k=1}^{m} x_{sk} = 1, s = 1,..., n,$$

$$\sum_{s=1}^{n} x_{sk} = 1, k = 1,..., m,$$

де

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \ i\text{ - й компонент назначається на } j\text{ - у позицію} \\ 0, \ \text{в протилежному випадку} \end{cases}$$

Часто розглядається симетричний вид квадратичної задачі про призначення

$$\min\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ijsk} x_{ij} x_{sk}\} \tag{5}$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1,...,n,$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, k = 1,...,n, \tag{6}$$

де всі x_{ij} — булеві змінні. Складність розв'язування задачі (5)—(6) полягає не тільки в булевих змінних, а й в тому, що квадратична цільова функція є неопуклою. Обмеженнями даної задачі є частина вершин гіперкуба, і розв'язок буде досягатися в одній із вершин. У задачі (5)—(6) необхідно заповнити квадратну матрицю x_{ij} нулями і одиницями, причому в кожному рядку і в кожному стовпці має бути тільки по одній одиниці. Ця матриця повинна мінімізувати квадратичну цільову функцію.

У навчальній літературі з оптимізації добре відома класична задача про призначення, яка відрізняється від завдання (5)—(6) тільки лінійної цільової функцією

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} . \tag{7}$$

Для вирішення задач про призначення (6)—(7) розроблений досить простий і ефективний угорський алгоритм. З іншого боку, для вирішення квадратичних задач

$$\min\{x^T Qx + q^T x \mid Ax = b, x \ge 0\}$$

відомим є метод Франка-Вулфа [25]. У цьому методі на k-й ітерації розв'язується лінеаризована до (5) задача

$$\min\{(2Qx^k + q)^T x \mid Ax = b, x \ge 0\}, \tag{8}$$

яка є задачею лінійного програмування і легко розв'язується симплекс-методом або прямо-двоїстим методом внутрішньої точки. Метод Франка-Вулфа ми використали для розв'язування квадратичної задачі про призначення. В цьому випадку, відповідна допоміжна задача (8) буде збігатися з задачами (6)—(7), для якої існує ефективний алгоритм.

Розроблено програмне забезпечення методу Франка-Вулфа для квадратичної задачі про призначення і проведені чисельні експерименти. Даний метод порівнювався з методом розгалужень та границь для $n \le 10$. Метод Франка-Вулфа давав значення цільової функції близькі до розв'язків задачі методом розгалужень та границь, але останній метод для розв'язування потребував значно більшого часу. У загальному випадку, цей метод не дозволяє знаходити найкращі розв'язки. Це пов'язано з тим, що метод Франка-Вулфа ефективний тільки для опуклої квадратичної функції. Для приведення квадратичної цільової функції до опуклої використовувалася квадратична регуляризація [26]. В результаті, задача (5)—(6) перетворювалася до вигляду

$$\max\{\|z\|^2 \mid \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ijsk} x_{ij} x_{sk} + s + (r-1)\|z\|^2 \le d, \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}(1-x_{ij}) + r\|z\|^2 \le d, 0 \le x \le 1\}, \tag{9}$$

де $r > 0$ — параметр квадратичної регуляризації, параметр s забезпечує активність першого обмеження, а $z = (x_{11},\ldots, x_{nn}, x_{nn+1})$. У реформованій задачі (9) необхідно знайти мінімальне значення змінної d, для розв'язку якої виконується умова $r\|z\|^2 = d$. Це значення d знаходимо методом дихотомії. При фіксованому значенні d задача розв'язувалася прямо-двоїстим методом внутрішньої точки [27]. Багаточисельні експерименти на тестових задачах показують значну перевагу методу точної квадратичної регуляризації над розглянутими вище методами. Все це спонукало авторів використати його для розв'язання задачі QAP. Перші чисельні експерименти підтверджують його ефективність при розв'язуванні і цієї складної задачі.

Розглянемо наступну задачу з матрицями, що представлені в табл. 1.

Таблиця 1. Дані для квадратичної задачі про призначення

Матриця c_{ij}									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	5	2	4	9	8	7	3	5	8
5	7	1	7	8	7	3	5	4	9
6	1	4	6	5	1	4	7	4	6
4	2	6	6	2	5	8	4	3	1
9	8	5	2	3	5	2	4	7	3
8	7	1	6	5	1	6	1	2	7
7	3	8	8	2	6	3	3	8	4
3	5	7	4	4	1	6	4	6	2
5	4	3	3	7	2	8	6	6	8
Матриця d_{ij}									
11	14	16	20	47	65	42	35	15	71
14	22	16	81	42	32	16	22	44	18
16	16	36	26	20	10	34	21	75	66
20	81	26	22	11	16	86	90	51	44
47	42	25	11	33	24	44	49	74	22
65	32	10	16	24	34	21	85	35	27
42	16	34	86	44	21	55	32	12	48
35	22	21	90	49	85	32	55	18	75
15	44	75	51	74	35	12	18	32	38
71	18	34	44	22	27	48	40	38	55

Найкращий розв'язок цієї задачі, отриманий методом розгалужень та границь дорівнює 16349, а розв'язок, отриманий методом точної квадратичної регуляризації, значно кращий зі значенням цільової функції 15885.

Висновки та перспективи подальших досліджень

Розглянуті методи розв'язування складної квадратичної задачі про призначення. Показано, що ці методи не знаходять найкращі розв'язки. Пропонується для розв'язування задачі QAP використовувати точну квадратичну регуляризацію. В даний час проводяться порівняльні числові експерименти, які використовують прямо-двоїстий метод внутрішньої точки та метод дихотомії для розв'язування перетвореної задачі (9). Перші результати показують, що розглянутий метод може бути використаний для розв'язування квадратичних задач про призначення великої розмірності. У подальшому в чисельних експериментах будуть використані модифікації методу точної квадратичної регуляризації.

Список використаної літератури

1. Commander C.W. A Survey of the Quadratic Assignment Problem with Applications / C.W. Commander. – The University of Florida, 2003. – 18 p.
2. Cook W. Fifty-Plus Years of Combinatorial Integer Programming / W. Cook. – Georgia Institute of Technology, 2009. – 39 p.
3. Kenneth V.P. Differential Evolution. A Practical Approach to Global Optimization / V.P. Kenneth, R.M. Storn, J.A. Lampinen. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. –542 p.
4. Lawler E. L. The quadratic assignment problem / E. L. Lawler // Management Science. – 1963. – № 9. – P. 586 – 599.

5. Kaufmann L. An algorithm for the quadratic assignment problem using Bender's decomposition / L. Kaufmann, F. Broeckx // European Journal of Operational Research. – 1978. – № 2. – P. 204 – 211.
6. Frieze A. M. On the quadratic assignment problem / A. M. Frieze, J. Yadegar // Discrete Applied Mathematics. – 1983. – № 5. – P. 89 – 98.
7. Adams W. P. Improved linear programming-based lower bounds for the quadratic assignment problem, in Quadratic Assignment and Related Problems / W. P. Adams, T. A. Johnson ; P. M. Pardalos and H. Wolkowicz eds. // DIMACS Series on Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. – 1994. – № 16. – P. 43 – 75.
8. Burkard R. E. Locations with spatial interactions: the quadratic assignment problem / R. E. Burkard, P. B. Mirchandani, R. L. Francis eds. // Discrete Location Theory, John Wiley and Sons, 1991. – P. 387–437.
9. Burkard R. E. A heuristic for quadratic boolean programs with applications to quadratic assignment problems / R. E. Burkard, T. Bonniger // European Journal of Operational Research. – 1983. – № 13. – P. 374 – 386.
10. Burkard R. E. Assignment and matching problems: Solution methods with Fortran programs / R. E. Burkard, U. Derigs // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. – Springer-Verlag, Berlin. – 1980. – 148 p.
11. Glover F. Improved linear integer programming formulations of nonlinear integer problems / F. Glover // Management Science. – 1975. – № 22. – P. 455 – 460.
12. Geoffrion A. M. Lagrangean relaxation and its uses in integer programming / A. M. Geoffrion // Mathematical Programming Study. – 1974. – № 2. – P. 82 – 114.
13. Gilmore P. C. Optimal and suboptimal algorithms for the quadratic assignment problem / P. C. Gilmore // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1962. – № 10. – P. 305 – 313.
14. Gavett J. W. The optimal assignment of facilities to locations by branch and bound / J. W. Gavett, N. V. Plyter // Operations Research. – 1966. – № 14. – P. 210 – 232.
15. Land A. M. A problem of assignment with interrelated costs / A. M. Land // Operations Research Quarterly. – 1963. – № 14. – P. 185 – 198.
16. Nugent C. E. An experimental comparison of techniques for the assignment of facilities to locations / C. E. Nugent, T. E. Vollmann, J. Ruml // Journal of Operations Research. – 1969. – № 16. – P. 150 – 173.
17. Burkard R.E. Assignment problems / R.E. Burkard. – University of Bolona, 2009. - 392 p.
18. Dorigo M. Positive feedback as a search strategy / M. Dorigo, V. Maniezzo, A. Colorni. – Department of Electronics and Information, Milan : Polytechnic of Milan, 1991. – 20 p. (Technical Report 91-016).
19. Dorigo M. The ant system: Optimization by a colony of cooperating agents / M. Dorigo, V. Maniezzo, A. Colorni // IEEE Transactions on Systems, 1996. – vol. 26(1). – P. 29 – 41.
20. Rutkovskaya D. Neural networks, genetic algorithms and fuzzy systems / D. Rutkovskaya, M. Pilinsky, L. Rutkovsky ; trans. from polish I.D. Rudinsky. – M .: Hotline – Telecom, 2006. – 452 p.
21. Моров В.А. Применение генетического алгоритма к задачам оптимизации. Реализация генетического алгоритма для проблемы коммивояжера / В. А. Моров // Вестник Амурского Государственного Университета. Естественные и экономические науки. – 2012. – № 57. – С. 18 – 22.
22. Taillard E. Robust taboo search for the quadratic assignment problem / E. Taillard // Parallel Computing. – 1991. – № 17. – P. 443 – 455.
23. Battiti R. The reactive tabu search / R. Battiti, G. Tecchiolli // ORSA Journal on Computing. – 1994. – № 6(2). – P. 126 – 140.
24. Drezner Z. The extended concentric tabu for the quadratic assignment problem / Z. Drezner // European Journal of Operational Research. – 2005. – № 160. – P. 416 – 422.
25. Мину М. Математическое программирование / М. Мину ; перев. с фран. А.И. Штерна. – М.: Наука, 1990. – 487 p.
26. Косолап А. И. Глобальная оптимизация. Метод точной квадратичной регуляризации / А.И. Косолап. – Днепропетровск: ПГАСА, 2015. –164 p.
27. Nocedal, J. Numerical optimization / J. Nocedal, S.J. Wright. – Springer, 2006. – 685 p.

THE SOLUTION OF THE QUADRATIC ASSIGNMENT PROBLEM
Kosolap A.I., Dubovik D.A.

Abstract

The quadratic assignment problem is fairly well known and one of the most important and complex in combinatorial optimization. It occurs when solving various applied problems. This task is used in solving the problems of placement, loading multiprocessor systems, tracing printed circuit boards, in many problems of design and topological engineering. The classical linear assignment problem has an effective solution method, and replacing the linear objective function by a quadratic one considerably complicates the problem.

To solve the quadratic assignment problem are used branch and boundary methods, genetic, evolutionary and other methods that use random search. Significant progress in solving this problem by these methods hasn't been achieved. In the methods of branches and boundaries, a decision tree is constructed. Each tree requires a solution to the problem with additional linear constraints. Therefore, at each iteration of this method, the dimension of the problem increases. With increasing dimension of the problem, the number of tree branches increases exponentially. This allows on modern PC to solve such a problem by this method of only small dimension. At the same time, random search methods don't guarantee obtaining an exact solution and allow finding it with a certain probability. All this stimulates the search for new methods for solving the quadratic assignment problem.

In practice, QAP can be used for example for the following purpose. It is necessary to place n components of the printed circuit board in m positions of the installation space so that the total length of the electrical connections between the components would be minimal. This minimization is determined by the quadratic target function. The complexity of the solution of the problem is expressed not only in Boolean variables, but also in the fact that the quadratic objective function is not convex.

The constraints in this case are part of the vertices of the hypercube, and the solution can be achieved at one of the vertices. It is necessary to fill the square matrix x_{ij} with zeros and ones, and in each row and in each column there must be only one unit. This matrix should minimize the quadratic target function. To bring the quadratic target function to a convex species, we need to use a quadratic regularization, which transforms the initial problems to a new form the maximization of the Euclidean norm of a vector on a convex set. We use an effective is primer-dual interior point method for the solution of the received problem. Generally, it is necessary to use also a dichotomy method.

Currently, comparative numerical experiments are carried out that implement a straight-duplex internal point method for solving a transformed problem. The first results show that the considered method can be used to solve quadratic assignment problem a large dimension.

References

[1] Commander, C.W. A Survey of the Quadratic Assignment Problem, with Applications. The University of Florida, 2003, 18 p.

[2] Cook W. Fifty-Plus Years of Combinatorial Integer Programming. Georgia Institute of Technology, 2009, 39 p.

[3] Kenneth V.P. Differential Evolution. A Practical Approach to Global Optimization. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005, 542 p.

[4] Lawler E.L., The quadratic assignment problem, Management Science 9, 1963, pp. 586–599.

[5] Kaufmann L., Broeckx F. An algorithm for the quadratic assignment problem using Benders' decomposition. European Journal of Operational Research, 1978, no.2, pp. 204–211.

[6] Frieze A.M., Yadegar J. On the quadratic assignment problem, Discrete Applied Mathematics, 1983, no.5, pp. 89–98.

[7] Adams W.P., Johnson T.A. Improved linear programming-based lower bounds for the quadratic assignment problem, in Quadratic Assignment and Related Problems, P. M. Pardalos and H. Wolkowicz, eds., DIMACS Series on Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 1994, no. 16, pp. 43–75.

[8] Burkard R.E. Locations with spatial interactions: the quadratic assignment problem, in Discrete Location Theory, P. B. Mirchandani and R. L. Francis, eds., Wiley, 1991, pp. 387–437.

[9] Burkard R.E., Bonniger T.A heuristic for quadratic boolean programs with applications to quadratic assignment problems. European Journal of Operational Research, 1983, no.13, pp. 374–386.

[10] Burkard R.E., Derigs U. Assignment and matching problems: Solution methods with Fortran programs. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag, Berlin, 1980, no. 184, 148 p.

[11] Glover F., Improved linear integer programming formulations of nonlinear integer problems, Management Science, 1975, no.22, pp. 455–460.

[12] Geoffrion A.M. Lagrangean relaxation and its uses in integer programming, Mathematical Programming Study, 1974, no.2, pp. 82–114.

[13] Gilmore P.C. Optimal and suboptimal algorithms for the quadratic assignment problem, SIAM Journal on Applied Mathematics, 1962, no.10, pp. 305–313.

[14] Gavett J. W., Plyter N. V. The optimal assignment of facilities to locations by branch and bound, Operations Research, 1966, no.14, pp. 210–232.

[15] Land A.M. A problem of assignment with interrelated costs, Operations Research Quarterly, 1963, no.14, pp. 185–198.

[16] Nugent C.E., Vollmann T.E., Ruml J. An experimental comparison of techniques for the assignment of facilities to locations, Journal of Operations Research, 1969, no.16, pp. 150–173.

[17] Burkard R.E. Assignment problems. University of Bolona, 2009, 392 p.

[18] Dorigo M., Maniezzo V. and Colorni A. Positive feedback as a search strategy. Technical Report 91-016, Dipartimento di Elettronica e Informazione, Milano: Politecnico di Milano, 1991, 20 p.

[19] Dorigo M., Maniezzo V. and Colorni A. The ant system: Optimization by a colony of cooperating agents. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics–Part B 26, 1996, pp. 29–41.

[20] Rutkovskaya, D. Neural networks, genetic algorithms and fuzzy systems: Per. from polish I.D. Rudinsky / D. Rutkovskaya, M. Pilinsky, L. Rutkovsky. – M.: Hotline - Telecom, 2006, 452 p.

[21] Morov V.A. Primenenie geneticheskogo algoritma do zadach optimizatcii. Realizatciya geneticheskogo algoritma dlya problemu komivoyagera. [Application of the genetic algorithm to optimization problems. Realization of the genetic algorithm for the traveling salesman problem.] Vestnik Amurskogo Gosudarstvennogo Universiteta, 2012. – Vol. 57: Estestvennie i econ. nayki. pp. 18–22. (in Russian).

[22] Taillard, E. Robust taboo search for the quadratic assignment problem. Parallel Computing, 1991, no.17, pp. 443–455.

[23] Battiti, R. and Tecchiolli, G. The reactive tabu search. ORSA Journal on Computing, 1994, no.6(2), pp. 126–140.

[24] Drezner, Z. The extended concentric tabu for the quadratic assignment problem. To appear in European Journal of Operational Research, 2005, no.160, pp. 416–422.

[25] Minu M. Matematicheskoe programmirovanie [Mathematical programming]. M.: Nauka, 1990, 487 p. (in Russian).

[26] Kosolap A.I. Globalnaya optimizatciya. Metod tochnoy kvadratichnoy regulyarizatcii. [Global optimization. Method of exact quadratic regularization]. Dnepropetrovsk: PGACA, 2015, 164 p. (in Russian).

[27] Nocedal J., Wright S.J. Numerical optimization. Springer, 2006, 685 p.