

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА АЛГОРИТМИ



П.С. СМОЛЯНСКИЙ, к.т.н., доцент

Т.П. КОЗИКОВА, ассистент

ГВУЗ «Криворожский национальный университет», г. Кривой Рог

Построение подсистемы АСУ "Страж" по обнаружению эволюционирующих пустот в условиях карьера

Поиск пустот техногенного и природного характера становится все более актуальной задачей в современных условиях. Основную опасность при этом представляют собой эволюционирующие пустоты, то есть пустоты, которые изменяют свое положение в пространстве с течением времени. Авторами статьи предложена методика построения подсистемы АСУ карьера для обнаружения эволюционирующих пустот.

Постановка задачи

Поиск пустот техногенного и природного характера является актуальной задачей геофизики, в частности в условиях Кривбасса [1].

С этим связана возрастающая опасность катастрофического обрушения при интенсивной добыче полезных ископаемых как подземным, так и открытым способом, прежде всего, вблизи заброшенных или действующих шахтных выработок или карьеров. Значительную опасность при этом представляют собой эволюционирующие пустоты (ЭП), то есть пустоты, которые изменяют свое положение в пространстве с течением времени. Чтобы своевременно предотвратить опасности этого явления необходимо определять величину и пространственное положение ЭП.

Для окончательного уточнения пространственного положения ЭП требуется бурение диагностических скважин. Стоимость таких работ значительна, например, затраты на бурение одной скважины в условиях Центрального Горно-Обогадательного комбината (ЦГОК) составляют 40—50 тыс. у.е., а таких скважин для определения одной ЭП может потребоваться несколько.

В монографии [1] описаны многочисленные случаи катастрофического выхода на поверхность такого рода ЭП в условиях ЦГОК. Наиболее известный случай произошел в г. Кривой Рог 18.03.2013г. в районе ш. Орджоникидзе. Этот случай имел огромный общественный резонанс, так как воронка площадью 12,5 га образовалась в районе жилых построек.

К сожалению, на современном этапе не существует простого и надежного способа решения проблемы диагностики наличия и локализации в пространстве ЭП. Одним из перспективных способов решения этой проблемы являются методы гравиметрии.

Некоторые подходы к решению задачи определения параметров ЭП методами гравиметрии были предложены в [5, 6, 10]. Для ее решения предлагалось на основании систематических измерений в заранее выбранных точках путем нахождения первых конечных

разностей нормальной составляющей силы тяжести находить параметры ЭП путем минимизации специального квадратичного функционала.

Анализ предыдущих исследований и публикаций

Методы гравиметрии основаны на теории обратных некорректных задач. Как известно [2—4], к обратным задачам относятся задачи восстановления структуры физического объекта по косвенным наблюдениям. В свою очередь, эти задачи, как правило, могут быть сведены к решению интегральных уравнений первого рода относительно физических характеристик объекта, в нашем случае плотности среды. Решение классической задачи гравиметрии [2, 4, 7] приводит к многомерным интегральным уравнениям первого рода относительно неизвестной функции плотности $\rho(x, y, z)$ пространственно распределенных источников гравитационных аномалий. Для определения $\rho(x, y, z)$ следует решить трехмерное интегральное уравнение первого рода:

$$G \cdot \int_D (z - z_N) \cdot \rho(x, y, z) / R^3 \cdot dV = F_z(x_N, y_N, z_N). \quad (1)$$

Здесь $R = \sqrt{(x - x_N)^2 + (y - y_N)^2 + (z - z_N)^2}$ — расстояние между текущей точкой среды $M(x, y, z)$ и точкой наблюдения $M_N(x_N, y_N, z_N)$ где $M_N \in T$, T — область наблюдений, D — исследуемая область, в которой локализованы источники гравитационных аномалий, G — гравитационная постоянная. Через $F_z(x_N, y_N, z_N)$ обозначена вертикальная проекция силы тяжести в точке наблюдения $M_N(x_N, y_N, z_N)$ от всей области D .

Как показано в [5], решение уравнения (1) относительно распределения плотности ρ , с приемлемой для практики точностью, даже для упрощенной бинарной среды представляет практически непосильную задачу для современных технологий и методов гравиметрии, кроме специальных случаев.

Для определения характеристик ЭП допустим, что в D может быть только одна эволюционирующая пустота в данный момент наблюдения. Точнее говоря, в исследуемой области может быть сколь угодно ЭП, но при этом для области D можно произвести декомпозицию, то есть разбить область D на непересекающиеся подобласти, например, R и S , такие, что $D = R \cup S$, $R \cap S = \emptyset$.

Причем, разбиение может быть выполнено таким образом, что гравитационное влияние от ЭП области S во всех точках области R было бы ничтожно мало, и наоборот. В этих условиях области R и S можно анализировать совершенно независимо. Последнее условие практически всегда выполнимо в силу достаточной статистической редкости возникновения явления ЭП и их разной скорости движения [1]. Но наиболее вероятно, что вся область D имеет только одну ЭП или их нет вообще. Это естественное допущение предлагаемого метода расчета.

Будем считать известной усредненную плотность среды ρ_C в области D . Если ЭП достаточно удалена от дневной поверхности Земли, то плотность среды можно считать однородной и равной ρ_C , вариации плотности породы не существенны для расчета параметров ЭП. Влиянию вариаций плотности среды на решение уравнения (1) была посвящена работа [6].

Изложение материала и результатов

Как было показано в [10] для практического определения параметров ЭП необходимо решить следующую задачу. На поверхности области D заданы N фиксированных точек наблюдения, координаты которых известны. В этих точках систематически, в заданные моменты, измеряется нормальная составляющая силы тяжести F_{ZJ} , $J = 1, N$. Кроме того, известны абсолютная погрешность измерений P_{GR} гравиметра и средняя плотность среды ρ_C . Требуется определить по результатам наблюдений, имеется ли ЭП и ее параметры: объем и координаты центра тяжести в данный момент. Как уже было сказано выше, предполагается, что ЭП в данной области D только одна.

Будем полагать, что ЭП можно заменить в первом приближении однородным шаром радиуса r и известной плотности, центр которого расположен в точке $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ — центре тяжести ЭП.

Нормальная составляющая силы притяжения в точке наблюдения $M_J(x_J, y_J, z_J)$ от однородного шара радиуса r и плотности ρ , центр которого расположен в точке $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, определяется [9]:

$$F_Z(x_J, y_J, z_J) = G \cdot \pi \cdot 4/3 \cdot \rho \cdot (\bar{z} - z_J) \cdot \bar{r}^3 / R_J^3.$$

Здесь R_J — расстояние между точками \bar{M} и M_J .

Обозначим:

$$Q_J = 3 \cdot F_Z(x_J, y_J, z_J) / (4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot G).$$

Таким образом, нужно решить систему нелинейных уравнений:

$$(\bar{z} - z_J) \cdot r^3 / R_J^3 = Q_J, J = 1, N, \quad (2)$$

считая неизвестными координаты центра шара $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ и его радиус \bar{r} , причем, число точек наблюдения N , а значит и уравнений в системе (2) велико, как правило,

50—100 и более. Следовательно, система (2) является переопределенной нелинейной системой уравнений.

Для решения задачи был применен нелинейный метод наименьших квадратов. Выберем среди всех точек наблюдения такую точку наблюдения, где величина Q_J будет максимальной, пусть это будет точка с номером M . Вычислим:

$$P_J = [R_J^2 \cdot (\bar{z} - z_M)] / [R_M^2 \cdot (\bar{z} - z_J)] \quad (3)$$

Таким образом, для решения системы (2) необходимо найти минимум функционала:

$$S(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \sum_{J=1}^N [Q_J / Q_M - P_J]^2. \quad (4)$$

Минимум (4) будем искать с помощью метода безусловного градиента [8]. Начальную точку (x_0, y_0, z_0) приближения к решению выбираем случайным образом. После чего производим минимизацию (4) по формулам:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i - \alpha \cdot \text{grad}_x(S_i), \\ y_{i+1} &= y_i - \alpha \cdot \text{grad}_y(S_i), \\ z_{i+1} &= z_i - \alpha \cdot \text{grad}_z(S_i). \end{aligned} \quad (5)$$

Как показали численные эксперименты, скорость сходимости процесса минимизации функции (5) невелика. Это связано, прежде всего, с большими ошибками измерений нормальной силы тяжести. Поэтому для повышения качества минимизации процесса (5) он производился многократно. Результаты многократных попыток минимизации (5) усреднялись.

Для практической локализации ЭП была предложена подсистема АСУ "Страж", предназначенная для локализации ЭП. В рамках ее производятся систематические "сторожевые" наблюдения за возможным движением ЭП в условиях карьера. Для этого в заданных точках наблюдения систематически производятся измерения нормальной составляющей силы тяжести. Как правило, результаты этих измерений не являются постоянными во времени, хотя это и не обязательно свидетельствует о наличии ЭП. Основными причинами изменения нормальной составляющей силы тяжести являются:

1. Процесс измерений неизбежно сопровождается значительными по величине погрешностями, порядка сотых долей мГал. Как уже было сказано, эти погрешности — основная трудность для определения наличия эволюционирующих пустот.

2. Небольшие периодические погрешности вносят колебания регионального фона. Явление вариации гравитационного регионального фона вызывается движением больших масс породы на значительных, порядка нескольких десятков километров и более, глубинах. Будем считать, что в пределах области D величина фона на дневной поверхности Земли постоянна для всех точек наблюдения в силу небольшого размера исследуемой области.

3. Существенно меньшие погрешности, чем влияние регионального фона, на результаты гравитационных измерений могут оказывать обильные осадки (дождь и снег), после выпадения которых может меняться плотность верхнего слоя почвы.

4. Незначительное, но систематическое влияние на изменение нормальной силы тяжести оказывает добыча руды в карьере.

Таким образом, нормальная составляющая силы

тяжести, измеренная в момент времени T_K в точке с номером J может быть представлена суммой:

$$F_{JK} = \bar{F}_{JK} + P_{JK} + \delta_{JK} + \mu_{JK}. \quad (6)$$

Здесь \bar{F}_{JK} — точное значение нормальной составляющей силы тяжести в этой точке, P_{JK} — фактическая погрешность измерения гравиметра, δ_{JK} — колебание гравитационного фона, μ_{JK} — остальные неучтенные факторы — добыча руды в карьере, сезонные осадки и так далее. Напомним, что $|P_{JK}| \leq P_{GR}$, где P_{GR} — абсолютная погрешность гравиметра. Для эксплуатируемого на ЦГОКе в настоящий момент гравиметра $P_{GR} = 0,03$ мГал.

Алгоритм работы подсистемы заключается в наблюдении за изменением (6) во времени, то есть изучении конечных разностей величин (6) в каждой точке и анализом того, могут ли эти изменения быть вызваны влиянием ЭП.

Наибольшую ошибку в процесс измерения вносит погрешность гравиметра P_{GR} . Колебания гравитационного фона δ_{JK} в области D практически одинаковы во всех точках и влияния на изменение величин (6) не оказывают. Это связано с относительно небольшими размерами D , порядка нескольких километров. Поэтому этот фактор формирования погрешности измерения можно не учитывать.

Также полагаем, что остальные неучтенные факторы μ_{JK} оказывают совместное влияние на изменение (6) в 100—1000 раз меньше, чем погрешность гравиметра. Однако следует заметить, что последний параметр не является постоянным, а имеет определенный тренд, правда, он меняется очень медленно. Поэтому с течением времени его влияние может накапливаться и им пренебречь уже будет невозможно. Это учтено в алгоритме работы подсистемы — систематическое изменение нулевого уровня (см. далее).

Алгоритм работы подсистемы "Страж" для определения ЭП

Построение подсистемы состоит из нескольких этапов. Прежде всего, необходимо определить ряд принципиально важных параметров, которым должна соответствовать разрабатываемая подсистема. Необходимо определить параметры:

1. Максимальная погрешность используемого гравиметра P_{GR} (мГал). Этот параметр может быть изменен после проведения численных экспериментов.

2. Минимальный объем V_{\min} (тыс. м³) и максимальную глубину залегания Z_{\max} (м) ЭП, появление которой на глубине Z_{\max} подсистема должна гарантировано обнаружить.

3. Количество измерений K_{izm} , которое будет производиться в каждой точке наблюдения.

Полагаем, что ошибки измерений нормальной составляющей силы тяжести распределены по нормальному закону. Известно, что при возрастании количества измерений одной и той же величины с нормальным законом распределения ошибок измерения ее усреднения погрешность усредненного измерения уменьшается и существенно ниже, чем отдельного измерения. Точ-

нее, погрешность уменьшается пропорционально $\sqrt{K_{izm}}$.

4. Среднюю плотность ρ (г/см³) среды в области D движения ЭП.

5. Области, в которых необходимо контролировать появление ЭП. Область в простейшем случае представляет собой прямоугольный параллелепипед, хотя может иметь и более сложную форму. Таких областей может быть сколь угодно много. В каждой из них следует задать координаты точек наблюдения, в которых будут производиться систематические измерения вертикальной составляющей силы тяжести. Выбор точек наблюдения должен гарантировать контроль всей области.

Стадия математического моделирования изучаемых процессов

После определения всех требований к системе следует произвести численные эксперименты для изучения возможностей достижения поставленных целей при заданных параметрах системы. Другими словами, следует на численных экспериментах проверить, возможно ли хотя бы теоретически получить необходимые пользователю параметры подсистемы при заданных ограничениях. Однако, желательнее теоретически получить несколько более точные оценки, чем необходимо для работы подсистемы.

В случае невозможности даже теоретического получения заданных параметров функционирования подсистемы можно поставить вопрос о замене гравиметра на прибор с меньшей погрешностью. Также, возможно, придется переопределить все или часть параметров работы подсистемы и продолжить процесс моделирования до получения положительного результата.

Примеры математического моделирования работы подсистемы "Страж" приведены на рисунках 1—3. Во всех примерах область D имеет величину 1 км. Система ТН состоит из точек, расположенных на трех параллельных прямых, первая из них находится на расстоянии 10 м от борта карьера ($Y = 120$), вторая на расстоянии 40 м от борта карьера ($Y = 150$), третья — на расстоянии 60 м для $Y = 180$. Точки измерения следуют через каждые 50 м для первой и третьей линии, через 100 — для второй. Борт карьера — прямая линия $Y = 110$ м. Эта линия параллельна трем прямым, где расположены ТН. Для первого рисунка абсолютные погрешности гравиметров равны 0.01 мГал, 0.02 мГал и 0.03 мГал, для второго и третьего — 0.03 мГал. Радиус ЭП для первого рисунка — 25 м, для второго и третьего — 23 метра. Нулевой уровень сформирован с помощью пяти измерений, которые выполнены с небольшим интервалом времени и были усреднены для снижения погрешности измерений.

На рисунке 1 показан основной результат математического моделирования подсистемы АСУ — геометрия областей достоверного определения параметров ЭП при заданных параметрах ТН, абсолютной погрешности гравиметра и радиуса ЭП. Например, для гравиметра с абсолютной погрешностью 0.01 мГал координаты центра тяжести ЭП с радиусом 25 м уверенно определяются подсистемой на глубинах порядка 150—170 м. Для гравиметра с абсолютной погрешностью 0.03 мГал такая же ЭП выявляется на глубинах порядка 110—120 м.

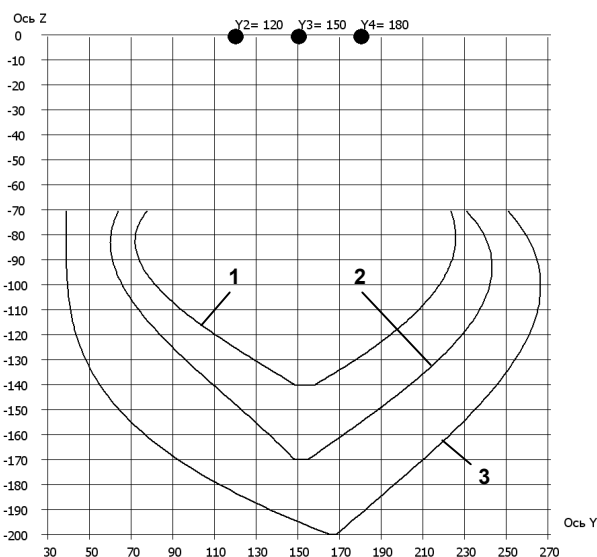


Рис. 1. Геометрия области достоверного определения параметров шара $R = 25$ м при абсолютной

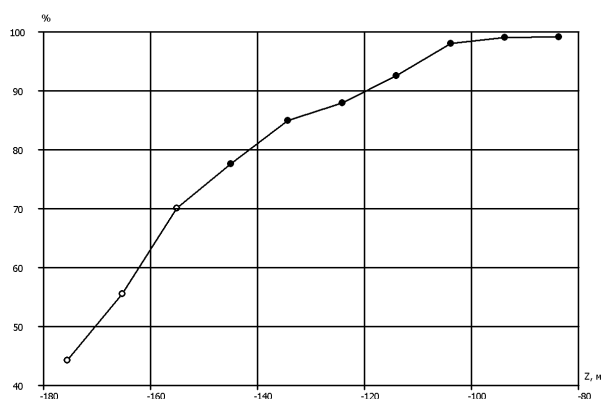


Рис. 2. Перекрывание площадей истинной и расчетной сфер (в %) в зависимости от глубины Z

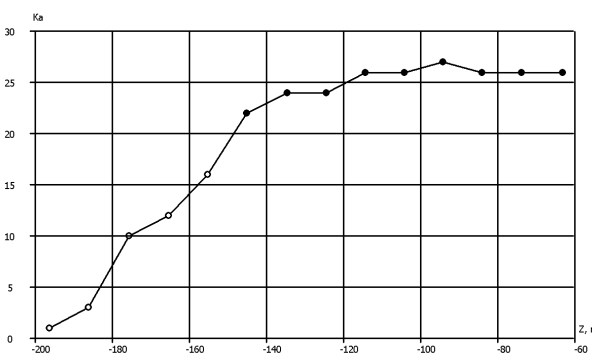


Рис. 3. Количество активных точек наблюдения K_a в зависимости от глубины Z

На рисунке 2 смоделирован процесс подъема ЭП с глубины 200 м и ее локализация. На графике рисунка 2 приведен объем пересечения реальной ЭП и предсказанной подсистемой в зависимости от глубины в процентах. Подобные зависимости имеют существенное значение при бурении диагностических скважин (БДС). БДС производится вертикально, в центре предсказанной ЭП. БДС считается успешным, если бур пересечет реальную ЭП. Очевидно, что для успешного БДС подсистема должна достаточно точно определить радиус и координаты x_0, y_0 центра масс реальной ЭП.

Очевидно, что при глубинах 120 и менее метров бурения диагностических скважин будет успешным, причем эта оценка занижена, успешное бурение возможно и для ЭП, которые расположены на больших глубинах.

На рисунке 3 указано количество “активных точек наблюдения” (K_a) в зависимости от глубины, то есть точек наблюдения, в которых значения нормальной составляющей силы тяжести больше максимальной погрешности. Только такие точки могут быть использованы для локализации ЭП. Появление хотя бы одной из таких точек однозначно свидетельствует о наличии ЭП в заданной области. Очевидно, что количество активных точек для определения четырех параметров ЭП-координат центра тяжести и ее радиуса, должно быть четыре и более.

На рисунках 2 и 3 маркерами обозначены моменты измерений. Закрашенные маркеры означают успешное определение параметров ЭП — когда ДБС на основании предсказанных параметров ЭП пересечет реальную ЭП. В противном случае точка измерения обозначалась белым кружком.

Стадия инициализации подсистемы

Для начала функционирования подсистемы необходимо получить вертикальную составляющую силы тяжести во всех точках наблюдения области в условиях, когда гарантированно отсутствует движение пустот в заданной области. Если в процессе измерений в каждой точке наблюдения показания гравиметра за вычетом фона не превышают абсолютной погрешности F_{GR} гравиметра, то будем считать, что не происходит движение пустот в заданной области.

В этих условиях подряд, на протяжении короткого времени, производится некоторое количество K (порядка 5—8) измерений и результат усредняется в каждой точке. В результате получается “нулевой” (постоянный) уровень гравитации во всех точках наблюдения в данной области с минимальными ошибками при отсутствии движения пустот в заданной области. Для этого необходимо получать постоянные, с учетом погрешности измерений, значения нормальной силы тяжести во всех точках наблюдения области на протяжении определенного времени, но за вычетом регионального фона.

Стадия опытной эксплуатации подсистемы

Производятся систематические наблюдения нормальной силы тяжести во всех точках наблюдения. После каждого нового измерения производится анализ на наличие ЭП. Для каждой области периодически производится переустановка “нулевого уровня”. Как уже было выше сказано, небольшие изменение силы тяже

