$\Delta g_{mn} = -\omega_{mn} - \omega_{nm} = 0$, і відповідають локальним (псевдо)обертанням. Отже струм S_{mn}^{σ} має фізичний смисл тензорної густини власного моменту імпульсу (спіну) гравітаційного поля, а $\Sigma_{mn}^{\cdot\nu\sigma}$ — його суперпотенціалу. В їх термінах рівняння Палатіні записується у вигляді:

$$\partial_{\sigma}\Sigma_{mn}^{\cdot\nu\sigma} + S_{mn}^{\nu} = 0 . \qquad (62)$$

З симетричними складовими $\sigma^{mn} := l^{\{mn\}}_{\cdot}$ параметрів групи GL^{g}, які приводять до деформації метрики в афінному репері $\Delta g_{mn} = -2\sigma_{mn}$ з тензором інфінітезимальної деформації σ_{mn}, зв’язаний ньотерівський струм

$$C_{mn}^{\sigma} = M_{\{mn\}}^{\cdot\sigma} + \partial_{\nu} g_{s\{m}\Sigma_{n\}}^{s\nu\sigma} , \qquad (63)$$

який тотожно дорівнює нулю. Це ще один аргумент на користь можливості довільного вибору вакуумної метрики g_{mn}, на фоні якої розглядаються гравітаційні явища. Іншими словами можна сказати, що розширення загального принципу відносності, обумовлене використанням афінних реперних полів для завдання систем відліку, яке призводить до розширення локальної симетрії теорії з Λ^{g} до GL^{g}, полягає у волі вибору вакууму з його метрикою. Ця додаткова симетрія може виявитися корисною при знаходженні нових розв'язків в теорії гравітації, а також способів так званого голографічного перенормування енергії.

Висновки

В роботі розширено загальний принцип відносності на використання загальних систем відліку, що описуються довільними неголономними афінними реперними полями. Одержано динамічні рівняння теорії і проаналізовано наслідки її розширеної калібрувальної інваріантності.

ЛІТЕРАТУРА

1. Эйнштейн А. Основы общей теории относительности // Собр. научн. трудов т.1. – М.: «Наука». – 1965. – С.452–504.
2. Szabados Laslo B. Quasi-local energy-momentum and angular momentum in general relativity: A Review Article. – Living Rev. Relativity. – 2004. – **7**. – P.1–140.
3. Møller C. Conservation lows and absolute parallelism in general relativity // Mat. – Fys. Skr. K. Danske Vid Selsk. – 1961. – **1**(10). – P.1–50.
4. Родичев В.И. Теория тяготения в ортогональном репере. – М.: Наука, 1974. – 184 с.
5. Aldrovandi R., Pereira J.G. Teleparallel Gravity: An Introduction. – Heidelberg: Springer, 2013. – 212 p.
6. Самохвалов С.Є., Крикент А.І. Теорія гравітації в афінному репері // Математичне моделювання. – 2016. – №1(34). – С.14–15.
7. Самохвалов С.Є. Наслідки симетрії калібрувальної теорії гравітації // Математичне моделювання. – 2001. – №1(6). – С.23–27.
8. Самохвалов С.Е. Теоретико-групповое описание калибровочных полей // ТМФ. – 1988. – 76, №1. – С. 66–77.
9. Самохвалов С.Є. Теоретико-груповий опис ріманових просторів // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, №9. – С. 1238–1248.
10. Самохвалов С.Є. Метод Палатіні в афінному репері // Проблеми математичного моделювання. – 2017. – Кам’янське. С.21–23.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1973. – 504 с.
12. Noether E. Invariant Variation Problems // Transport theory and statistical physics. – 1971. – 1(3). – P.183–207.

пост. 23.05.2017

С.Г. ДРОНОВ, к.ф.-м.н., доцент
Дніпровський державний технічний університет, м. Кам’янське

Керування наближеним розв’язком диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами

В роботі наведено алгоритм пошуку наближеного розв’язку крайової задачі для звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з розривними коефіцієнтами у вигляді кубічного сплайну по нерівномірній сітці, який асимптотично співпадає з інтерполяційним сплайном від точного розв’язку задачі. Особливістю є те, що алгоритм гарантує існування наближеного розв’язку та можливість керування ним.

Постановка проблеми

У математиці та її застосуваннях постійно приходиться мати діло з наближеними представленнями функцій. Класичними апаратами таких представлень є многочлени та раціональні дробі. Теорія наближення функції многочленами була розроблена в трудах П.Л. Чебишева, К. Вейерштрасса, С.Н. Бернштейна та ін. Многочлени та раціональні дроби володіють деякими вадами як апарат наближення для функцій з особливостями та функцій з не дуже високою гладкістю. Головна вада складається у тому, що їх поведінка в околі якоїсь точки визначає їх поведінку взагалі. В зв’язку з цим в останній час наполегливо розробляються апарати наближення які не будуть мати у собі цих недоліків. Одним з таких апаратів, які найкращим чином зарекомендували себе як в теоретичних так і в прикладних дослідженнях, є сплайн-функції. Особливу увагу приділяли так званим схемам підвищеної точності які давали наближення більш високої точності ніж звичайні сплайн-колокаційні схеми. В роботі будується схема для знаходження наближеного розв’язку у вигляді кубічного сплайну, яка дає максимально можливу точність для цього апарату наближення.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Для крайових задач декілька десятиріч будувалися сплайн-колокаційні схеми знаходження наближених розв’язків, наприклад, Мирошниченко В.Л. [3]. Відомі сплайн-колокаційні схеми підвищеної точності, як правило (див. напр. [1], Гл. 10), потребують спеціального вибору вузлів сплайну і вузлів колокації або зводяться до систем, матриці коефіцієнтів яких мають більше трьох діагоналей з ненульовими коефіцієнтами.

Лигуном А.О. та Дроновим С.Г. [4], Дроновим С.Г. [5]—[6] для достатньо гладких коефіцієнтів рівняння (1) було одержано схеми, які дають наближені розв’язки у вигляді кубічних сплайнів асимптотично співпадаючих з інтерполяційними сплайнами від точних розв’язків та які дають максимально можливий порядок точності для цього апарату наближення, причому системи рівнянь для знаходження коефіцієнтів наближених розв’язків зберігали трьохдіагональні структури матриць. Такі ж схеми було побудовано в роботі [10] Тонконога Є.А., Дронова С.Г., а по нерівномірному розбиттю – в роботі [11] Тонконога Є.А., Худої Ж.В.

Аналогічні схеми для задачі Коші для диференціального рівняння (1), які дають наближені розв’язки підвищеної точності у вигляді кубічних сплайнів по рівномірній та нерівномірній сіткам вузлів були побудовані Дроновим С.Г. і Худой Ж.В. [7]—[8].

Формулювання мети дослідження

В роботі будується сплайн-схема підвищеної точності для крайової задачі з розривними коефіцієнтами та вводиться так зване «керування», яке гарантує існування та єдиність наближеного розв’язку по нерівномірній сітці та наводяться оцінки точності цієї схеми

Виклад основного матеріалу

Розглядається крайова задача для звичайного диференціального рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \qquad (1)$$

$$y'(a) = A, \quad y'(b) = B, \qquad (2)$$

коефіцієнти якого $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ можуть мати розриви першого роду в кінцевому числі точок.

Було використано той же підхід, що застосували Дронов С.Г., Лигун А.О. в роботі [4]. Для одержання сплайн-схеми підвищеної точності розглядалася сплайн-колокаційна схема не для рівняння (1), а для «збуреного» рівняння

$$y''(1+\eta(x)) + (p(x)+\alpha(x))y' + (q(x)+\beta(x))y = f(x)+\theta(x), \qquad (3)$$

де $\eta(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\theta(x)$ — цілком конкретні функції, обрані таким чином, щоб ухилення отримуємогосплайну від точного розв’язку задачі $y(x)$ було мінімальним.

Для крайової задачі (3)—(2) розглянемо звичайний метод сплайн-колокації і доведемо, що отримане наближене рішення асимптотично співпадає з інтерполяційним сплайном від точного розв’язку крайової задачі (1)—(2).

Як і раніше, позначимо через $L^r_{\infty[a;b]}$, $C^r_{[a;b]}(r = 0;1;2;...)$ множину функцій, визначених на відрізку $[a; b]$, у яких похідна порядку r $f^{(r)}$ $\left(f^{(0)} = f\right)$ належить відповідному простору $L_{\infty[a;b]}$ або $C_{[a;b]}$.

Нехай Δ_N — розбиття відрізку $[a; b]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{N-1} < x_N = b$$

і позначимо $h_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1; 2; …; N)$ такі, що виконуються умови

$$h_{i+1} = h_i + O(h_i^2) \quad \text{і} \quad h = \max h_i \ (i = 1; 2; …; N).$$

Зрозуміло, що при таких умовах сітка розбиття може дуже сильно відрізнятися від рівномірної і в багатьох питаннях теорії наближення ця умова виконується для асимптотично оптимальних сіток вузлів.

Доповнимо розбиття Δ_N вузлами

$$x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < a \quad \text{і} \quad b < x_{N+1} < x_{N+2} < x_{N+3}.$$

Будемо вважати у подальшому $h_{-2} = h_{-1} = h_0 = h_1$; $h_N = h_{N+1} = h_{N+2} = h_{N+3}$ і позначимо $\overline{\Delta}_N = \{x_i\}_{i=-3}^{N+3}$.

Функцію $s_3(x)$ назвемо кубічним сплайном мінімального дефекту по розбиттю Δ_N, якщо на кожному із інтервалів $(x_i; x_{i+1})$ розбиття Δ_N вона співпадає с алгебраїчним многочленом третього степеня, а на всьому відрізку $[a; b]$ $s_3(x) \in C^2_{[a;b]}$. Множину усіх таких сплайнів позначимо через $S_3(\Delta_N)$.

Сплайн $s_3(f, x) \in S_3(\Delta_N)$ будемо називати інтерполяційним для функції $f(x)$, якщо $s_3(f, x_i) = f(x_i)$ $(i = 0; 1; 2;…; N)$ і $s_3''(f; a) = f''(a)$, $s_3''(f; b) = f''(b)$.

Добре відомо (див. [1], с. 96—101; [2], с. 24—25), що для довільної функції $f \in C^3_{[a;b]}$ кубічний інтерполяційний сплайн існує та єдиний.

Кубічним B-сплайном, нормалізованим базисним B-сплайном будемо називати (див. [1], с. 18—26; [2], с. 44) сплайн $B_{3,i}(x) \in S_3(\overline{\Delta}_N)$, визначаємий для кожного фіксованого $i = -1; 0; 1; 2;…; N; N+1$ умовами

$$B^{(\nu)}_{3,i}(x_{i-2}) = B^{(\nu)}_{3,i}(x_{i+2}) = 0 \quad (\nu = 0; 1; 2);$$

$$\int_{x_{i-2}}^{x_{i+2}} B_{3,i}(x)dx = 1, \quad B_{3,i}(x) = 0(x < x_{i-2}; \quad x > x_{i+2}).$$

В силу того, що система функцій $\{B_{3,i}\}_{i=-1}^{N+1}$ утворює базис в $S_3(\Delta_N)$, будь-який сплайн $s_3 \in S_3(\Delta_N)$ записується у вигляді

$$s_3(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} c_i B_{3,i}(x) \quad (x \in [a; b]).$$

Припустимо, що коефіцієнти $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ рівняння (4.1) можуть мати розриви першого роду в точках τ_j $(j = 1; 2;…;k)$

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < … < \tau_k < \tau_{k+1} = b$$

та $\tau_j = x_{N_j}$ $(j = 1; 2;…;k)$, де x_{N_j} — вузли розбиття Δ_N, а на інтервалах $(\tau_{j-1}; \tau_j)$ $(j = 1; 2;…; k; k+1)$ $q(x)$, $f(x) \in L^4_{\infty[a;b]}$, $p(x) \in L^5_{\infty[a;b]}$.

Введемо вектор $(A_1, A_2,…, A_k)$, $A_0 = A$, $A_{k+1} = B$. На кожному відрізку $[\tau_{j-1}; \tau_j]$ $(j = 1; 2;…; k; k + 1)$ розглянемо крайову задачу

$$y'' + p(x)y' + q(x)y' = f(x), \qquad (1)$$

$$y'(\tau_{j-1}) = A_{j-1}, \quad y'(\tau_j) = A_j. \qquad (4)$$

Зрозуміло, що на відрізку $[\tau_{j-1}; \tau_j]$ кількість вузлів розбиття Δ_N дорівнює $L_j = N_j - N_{j-1}$ $(j = 1; 2;…; k; k+1)$. Для спрощення викладок припустимо, що крок розбиття на відрізку $[\tau_{j-1}; \tau_j]$ є сталим і дорівнює h_{j-1}, але $h_j = h_{j-1} + O\left(h^2_{j-1}\right)$ для сусідніх відрізків між точками розривів.

Точний розв'язок крайової задачі (1)—(2) позначимо через $y_*(x)$ і

$$y_i^{(\nu)} = y_*^{(\nu)}(x_i) \ (\nu = 0;\ 1;\ 2;\ldots).$$

Звичайний метод сплайн-колокації для крайової задачі (1)—(4) складається з того, що параметри сплайна $S_3(x)$, який є наближеним розв'язком задачі, знаходяться з умов $S_3''(1+\mu(x))+(p(x)+\alpha(x))S_3' + +(q(x)+\beta(x))s_3 = f(x)+\theta(x)$ та відповідно на кінцях $s_3'(\tau_{j-1}) = A_{j-1}$, $s_3'(\tau_j) = A_j$.

Використовуючи явний вигляд базисних функцій $B_{3,i}(x)$ і значення цих функцій та їх похідних у вузлах колокації, розглянемо систему рівнянь відносно невідомих $c_{i,j}$ ($i = 0;\ 1;\ 2;\ldots;\ L_j$)

$$\begin{cases} C_0 c_{0,j} + D_0 c_{1,j} = F_0, \\ B_i c_{i-1,j} + C_i c_{i,j} + D_i c_{i+1,j} = F_i, \ (i = 1;\ 2;\ldots L_i - 1) \\ B_{L_j} c_{L_{j-1},j} + C_{L_j} c_{L_j,j} = F_{L_j}, \end{cases} \quad (5)$$

де $C_0 = -2\left(1+\mu_0 h_j^2\right) + \frac{2}{3}\left(q_0 + \beta_0 h_j^2\right)h_j^2$,

$$D_0 = 2\left(1+\mu_0 h_j^2\right) + \frac{1}{3}\left(q_0 + \beta_0 h_j^2\right)h_j^2;$$

$$F_0 = f_0 h_j^2 + 2A_{j-1}h_j\left(1+\mu_0 h_j^2\right) - \left(p_0 + \alpha_0 h_j^2\right)A_{j-1}h_j^2 + \\ + \frac{1}{3}\left(q_0 + \beta_0 h_j^2\right)A_{j-1}h_j^3 + \theta_0 h_j^4;$$

$$\beta_i = 1 + \mu_i h_j^2 - \frac{1}{2}\left(p_i + \alpha_i h_j^2\right)h_j + \frac{1}{6}\left(q_i + \beta_i h_j^2\right)h_j^2;$$

$$C_i = -2\left(1+\mu_i h_j^2\right) + \frac{2}{3}\left(q_i + \beta_i h_j^2\right)h_j^2;$$

$$D_i = 1 + \mu_i h_j^2 - \frac{1}{2}\left(p_i + \alpha_i h_j^2\right)h_j + \frac{1}{6}\left(q_i + \beta_i h_j^2\right)h_j^2;$$

$$F_i = \left(f_i + \theta_i h_j^2\right)h_j^2, \quad (i = 1;\ 2;\ \ldots;\ L_{j-1});$$

$$\mu_i = \frac{1}{12}\left(2p_i' + q_i - p_i^2\right);$$

$$\alpha_i = \frac{1}{12}\left(p_i'' + 2q_i' - p_i p_i' - p_i q_i\right);$$

$$\beta_i = \frac{1}{12}\left(q_i'' - p_i q_i'\right);\ \theta_i = \frac{1}{12}\left(f_i'' - p_i f_i'\right),\ (i = 0;\ 1;\ 2;\ldots;\ L_j);$$

$$\beta_{L_j} = 2\left(1+\mu_{L_j} h_j^2\right) + \frac{1}{3}\left(q_{L_j} + \beta_{L_j} h_j^2\right)h_j^2;$$

$$C_{L_j} = -2\left(1+\mu_{L_j} h_j^2\right) + \frac{2}{3}\left(q_{L_j} + \beta_{L_j} h_j^2\right)h_j^2;$$

$$F_{L_j} = f_{L_j} h_j^2 - 2\left(1+\mu_{L_j} h_j^2\right)h_j A_{L_j} - \left(p_{L_j} + \alpha_{L_j} h_j^2\right)A_j h_j^2 - \\ - \frac{1}{3}\left(q_{L_j} + \beta_{L_j} h_j^2\right)h_j^2 A_{L_j} + \theta_{L_j} h_j^4.$$

Зрозуміло, що матриця системи має трьох діагональну структуру.

Теорема 1. Нехай $q(x)$, $f(x) \in L_\infty^4[\tau_{j-1};\tau_j]$, $p(x) \in L_\infty^5[\tau_{j-1};\tau_j]$. Тоді $y_* \in L_\infty^6[\tau_{j-1};\tau_j]$ і якщо $q(x) < q < 0$ $x \in [\tau_{j-1};\tau_j]$ (x $\in$ [τ_{j-1}; τ_j]) та для достатньо малих h_j

$$c_{i,j} = y_i - \frac{1}{6}y_i'' h_j^2 + O\left(h_j^4\right) \quad (i = 0;\ 1;\ 2;\ldots;\ L_j).$$

Доведення теореми аналогічно доведенню в [6] (с. 29—31).

Зауваження. Можна показати, що замість величин $p_i^{(\nu)}$, $q_i^{(\nu)}$, $f_i^{(\nu)}$ $(\nu = 1;\ 2)$ можна підставляти їх наближені значення, знайдені з точністю $O\left(\bar{h}^2\right)$, і це не змінить результату.

Теорема 2. Нехай виконані умови теореми 3, $c_{i,j}$ ($i = 0;\ 1;\ 2;\ldots;\ L_j$) — розв'язки системи (5);

$$c_{i,-1} = c_{i,1} - 2A_{j-1}h_j, \quad c_{L_{j+1},-1} = c_{L_j,1} + 2A_j h_j$$

та $S_{3,j}(x) = \sum_{j=-1}^{L_{j+1}} c_{i,j} B_{3,i}(x)$.

Тоді $\left\|S_{3,j} - y_*\right\|_{\infty[\tau_{j-1};\tau_j]} = O\left(\bar{h}^4\right)$, де y_* — точний розв'язок крайової задачі (1)—(2).

Зрозуміло, що сплайн $S_3^*(x) = \sum_{j=1}^{k+1} S_{3,j}(x)$ асимптотично співпадає з інтерполяційним сплайном від точного розв'язку крайової задачі (1)—(2), якщо точний розв'язок проходить через точки (τ_j; A_j) ($j = 1;\ 2;\ldots;\ k$).

Висновки та перспективи подальших досліджень

Як говорилось вище, в загальному випадку для крайової задачі (1)—(2) з розривними коефіцієнтами точний розв'язок може не існувати або задача може мати нескінченну кількість розв'язків.

Тому вектор (A_1, A_2,…, A_k) можна розглядати, як «керування» наближеним розв'язком задачі і варіюючи значеннями його координат досягати знаходження наближеного розв'язку, який задовольняє потрібним властивостям, наприклад, мінімальної довжини кривої та інше. Результати можуть бути використані як в галузі теоретичної математики, прикладної математики, механіці та фізиці.

ЛІТЕРАТУРА

1. Завьялов Ю.С., Квасов В.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М., 1980.
2. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. М., 1984.
3. Мирошниченко В.Л. Решение краевой задачи для дифференциального уравнения методом сплайн-функций. Схема повышенной точности.// Изв. АН Каз. ССР. Сер. Физика-Математика. 1973. № 3. С. 37–42.
4. Дронов С.Г., Лигун А.А. Об одном сплайн- методе решения краевой задачи.// УМЖ. !989. Т. 41, № 5. С. 703–707.
5. Дронов С.Г. О приближении сплайнами решения краевой задачи.// Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. Днепропетровск: ДГУ. 1987. С. 30–37.
6. Дронов С.Г. Применение сплайнов по неравномерной сетке к приближенному решению краевых задач.// Вопросы оптимальной аппроксимации функ-

ций и суммирования рядов. Днепропетровск: ДГУ. 1988. С. 26–32.
7. Дронов С.Г., Худая Ж.В. О сплайн-схеме повышенной точности решения задачи Коши.// Приближение функций и суммирование рядов. Днепропетровск: ДГУ. 1992. С. 29–38.
8. Дронов С.Г., Худая Ж.В. О сплайн-схеме повышенной точности решения задачи Коши для уравнения с разрывными коэффициентами.// Математичне моделювання. Днепродзержиск: ДГТУ. 1994. № 1. С. 17–20.
9. Дронов С.Г. Сплайн-метод наближеного розв’язку диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами// Математичне моделювання. Днепродзержиск: ДГТУ. 2016. № 1. С. 42–44.
10. Дронов С.Г., Тонконог Е.А. Метод розв’язання крайової задачі з використанням квазіінтерполяційних сплайнів //Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д. :ДНУ. – 2014.– С. 303–310.
11. Худа Ж.В., Тонконог Є.А. Метод розв’язання крайової задачі з мішаними граничними умовами //Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д. :ДНУ. 2015. С. 218–225.

пост. 30.05.2017