С.Є. САМОХВАЛОВ, д.т.н., професор serg_samokhval@ukr.net
Дніпровський державний технічний університет, м. Кам'янське

Загальні системи відліку і визначення енергії в теорії гравітації

Загальну теорію відносності (ЗТВ) подано в термінах компонентів фізичних величин відносно довільного афінного реперного поля, яке ототожнюється з загальною глобальною системою відліку. Надано вираз для енергії-імпульсу гравітаційного поля і його власного моменту в заданій системі відліку.

Вступ

В загальній теорії відносності (ЗТВ) під системою відліку розуміється довільна система координат, що визначає в просторі-часі голономне координатне реперне поле $\partial_\mu := \partial / \partial x^\mu$ [1]. Недоліком цього обмеження в виборі систем відліку є необхідність використання в якості потенціалів гравітаційного поля компонентів метричного тензора $g_{\mu\nu}$, з яких неможливо побудувати скалярний лагранжіан гравітаційного поля, що залежав би від $g_{\mu\nu}$ і їх перших похідних, внаслідок чого в ЗТВ не може бути побудовано тензор енергії-імпульса гравітаційного поля [2]. Такий тензор може бути побудовано в теорії гравітації в ортогональному репері (ТГОР)[1] [3, 4], де в якості потенціалів гравітаційного поля виступають коефіцієнти h_μ^m переходу між ортонормованим e_m і координатним реперами $\partial_\mu = h_\mu^m e_m$, які є, в певному сенсі, квадратними коренями від метричних коефіцієнтів $g_{\mu\nu} = h_\mu^m h_\nu^n \eta_{mn}$, де η_{mn} — метрика простору Мінковського. Проте в загальному випадку в якості системи відліку може виступати довільне афінне реперне поле, окремим випадком якого є як координатний репер (що відповідає системам відліку, якими обмежується ЗТВ), так і ортонормований.

В даній роботі більш детально, ніж в замітці [6], представлено теорію гравітації в афінному репері (ТГАР), основні співвідношення якої подано в загальній неголономній системі відліку, тобто відносно довільного афінного реперного поля. Проаналізовано наслідки узагальненої калібрувальної трансляційної інваріантності теорії [7] в загальній системі відліку, а також наслідки інваріантності теорії відносно локальних лінійних перетворень реперних полів, що відповідають переходу між загальними системами відліку і реалізують загальний принцип відносності в ТГАР. Надано вираз для змішаного координатно-реперного тензора енергії-імпульсу та власного моменту імпульсу гравітаційного поля і їх суперпотенціалів.

1. Лагранжіан ТГАР

Хай в просторі X з координатами x^μ, для нумерації яких будемо використовувати грецькі літери, задано афінний репер $e_m = h_m^\mu \partial_\mu$, вектори якого нумеруватимемо латинськими літерами. Припустимо, також, що простір X є (псевдо)рімановим, отже задано скалярний добуток $e_m \cdot e_n = g_{mn}$. Заміну координатних індексів на реперні і навпаки виконуватимемо за допомогою матриць h_m^μ і обернених до них h_μ^m, зокрема $g_{\mu\nu} = h_\mu^m h_\nu^n g_{mn}$. Будемо вважати, також, що в просторі X задано зв'язність з коефіцієнтами $\gamma^k{}_{mn}$ в афінному репері e_m. Коефіцієнти неголономності F^k_{mn} реперного поля e_m означаються виразом

$$[e_m, e_n] = F^k_{mn} e_k \,, \qquad (1)$$

де квадратними дужками позначено комутатор векторних полів.

Умовою відсутності скруту є:

$$F^k_{mn} = \gamma^k{}_{mn} - \gamma^k{}_{nm} \,, \qquad (2)$$

а умовою узгодженості зв'язності з метрикою:

$$\partial_k g_{mn} = \gamma_{\dot{m}kn} + \gamma_{\dot{n}km} \,, \qquad (3)$$

де $\partial_k g_{mn} := h_k^\mu \partial_\mu g_{mn}$. При виконанні умов (2), (3), коефіцієнти зв'язності розпадаються на суму $\gamma_{\dot{m}kn} = \omega_{\dot{m}kn} + \sigma_{\dot{m}kn}$, де

$$\omega_{\dot{m}kn} = \tfrac{1}{2}(F_{\dot{k}mn} + F_{\dot{m}kn} - F_{\dot{n}km}) \,, \qquad (4)$$

$$\sigma_{\dot{m}kn} = \tfrac{1}{2}(\partial_n g_{mk} + \partial_k g_{mn} - \partial_m g_{kn}) \qquad (5)$$

з властивостями симетрії

$$\omega_{\dot{m}kn} = -\omega_{\dot{n}km} \,, \qquad \sigma_{\dot{m}nk} = \sigma_{\dot{m}kn} \,. \qquad (6)$$

Крапкою позначається місце, звідки опущено (або піднято) індекс.

Важливим є теоретико-групове значення афінного репера $e_m = h_m^\mu \partial_\mu$ як набору генераторів деформованої групи дифеоморфізмів T^g, а коефіцієнтів неголономності F^k_{mn}, як її структурних функцій, аналогічних структурним константам групи Лі [8, 9]. Тому ці величини в ТГАР, як калібрувальній теорії групи трансляцій, мають важливий фізичний зміст. Зокрема компоненти h_μ^m координатного репера відносно афінного репера виступають в якості потенціалів гравітаційного поля, а коефіцієнти неголономності F^k_{mn} — в якості тензора напруженості гравітаційного поля.

Основними польовими змінними в ТГАР вибираються коефіцієнти переходу h_μ^m між афінним і координатним реперами, а також метричні коефіцієнти g_{mn} і коефіцієнти зв'язності $\gamma^m{}_{\mu n}$ в афінному репері. Такий вибір польових змінних диктує розбиття лагранжіана Гілберта

$$L_R = -\tfrac{1}{2\kappa} eR \,, \qquad (7)$$

[1] Поширена назва — телепаралельний еквівалент загальної теорії відносності [5]. Але ми будемо користуватися терміном ТГОР, який, на наш погляд, краще відбиває геометричну структуру даної теорії та її калібрувальну симетрію.

де κ — гравітаційна стала Ейнштейна (яку надалі прийматимемо рівною 1), $e:=\sqrt{|g_{\mu\nu}|}$, а R — скалярна кривизна простору-часу, на об'ємну складову L_γ (усічений лагранжіан Гілберта), яка не залежить від похідних коефіцієнтів зв'язності $\gamma^m_{\mu n}$ (а за виконання умов (2), (3) — від других похідних h^m_μ і g_{mn}), та поверхневу складову, що має форму дивергенції $\partial_\sigma V^\sigma$, в яку похідні $\gamma^m_{\mu n}$ (другі похідні h^m_μ і g_{mn}) згортаються:

$$L_R = L_\gamma + \partial_\sigma V^\sigma . \tag{8}$$

Дійсно, оскільки

$$\tfrac{1}{2}eR = \Sigma_m{}^{n\mu\nu}(\partial_\mu \gamma^m_{\nu n} + \gamma^m_{\mu s}\gamma^s_{\nu n}) , \tag{9}$$

де $\Sigma_m{}^{n\mu\nu} := \frac{1}{2}e\delta^{\mu\nu}_{ms}g^{sn}$, $\delta^{\mu\nu}_{mn} := h^\mu_m h^\nu_n - h^\mu_n h^\nu_m$, перекидаючи в першому доданку формули (9) похідну на перший множник і змінюючи знак, одержуємо:

$$\begin{aligned} L_R = {} & \partial_\mu \Sigma_m{}^{n\mu\nu}\gamma^m_{\nu n} - \Sigma_m{}^{n\mu\nu}\gamma^m_{\mu s}\gamma^s_{\nu n} - \\ & -\partial_\mu(\Sigma_m{}^{n\mu\nu}\gamma^m_{\nu n}). \end{aligned} \tag{10}$$

Таким чином,

$$L_\gamma = \partial_\mu \Sigma_m{}^{n\mu\nu}\gamma^m_{\nu n} - H , \quad H := \Sigma_m{}^{n\mu\nu}\gamma^m_{\mu s}\gamma^s_{\nu n} , \tag{11}$$

$$V^\sigma = \Sigma_m{}^{n\nu\sigma}\gamma^m_{\nu n} = e\gamma^{[n\sigma]}_{n\cdot} . \tag{12}$$

Квадратні дужки тут означають антисиметризацію за індексами, що в них містяться.

Всі доданки розбиття (8), як і сам лагранжіан Гілберта, є скалярними густинами по відношенню до заміни координат x^μ. Загальноковаріантний спосіб виокремлення поверхневого члену з лагранжіану Гілберта є можливим завдяки використанню реперних полів, що не змінюються при заміні координат.

2. Наслідки метричності зв'язності і відсутності скруту

Інтегральна варіація лагранжіана L_γ:

$$\delta' L_\gamma := L'_\gamma(x')\partial x' - L_\gamma(x) , \tag{13}$$

де $\partial x' := \left|\partial_\mu x'^\nu\right|$ — якобіан переходу від x до x', визначається виразом:

$$\begin{aligned} \delta' L_\gamma = {} & \delta_{h^n_\nu} L_\gamma \,\delta h^n_\nu + \delta_{g_{mn}} L_\gamma \,\delta g_{mn} + \delta_{\gamma^m{}_{\nu n}} L_\gamma \,\delta\gamma^m{}_{\nu n} + \\ & + \partial_\mu(\delta\Sigma_m{}^{n\mu\nu}\gamma^m_{\nu n} + L_\gamma \delta x^\mu) , \end{aligned} \tag{14}$$

де $\delta_{q^i} L_\gamma := \partial_{q^i} L_\gamma - \partial_\sigma\left(\partial_{\partial_\sigma q^i} L_\gamma\right)$ — варіаційні, а $\partial_{q^i} L_\gamma$ — частинні похідні лагранжіана L_γ по полям q^i, δq^i — варіації форми полів q^i.

Варіаційні похідні лагранжіана L_γ по $\gamma^m{}_{\nu n}$ зводяться до звичайних $\delta_{\gamma^m{}_{\nu n}} L_\gamma = \partial_{\gamma^m{}_{\nu n}} L_\gamma$, оскільки L_γ не залежить від їх похідних. За умови відсутності скруту (2) і метричності зв'язності (3) виконується рівняння Палатіні в афінному репері:

$$\partial_{\gamma^m{}_{\nu n}} L_\gamma = \partial_\sigma \Sigma_m{}^{n\sigma\nu} - M_m{}^{n\nu} = 0 , \tag{15}$$

де

$$M_m{}^{n\nu} := \partial_{\gamma^m{}_{\nu n}} H = \Sigma_m{}^{s\nu\sigma}\gamma^n{}_{\sigma s} - \Sigma_s{}^{n\nu\sigma}\gamma^s{}_{\sigma m} . \tag{16}$$

Дійсно, за умов (2) і (3) одержуємо:

$$\partial_\sigma \Sigma_m{}^{n\sigma\nu} = -\tfrac{1}{2}eg^{ns}(\gamma^\nu{}_{sm} + \gamma_{sm\cdot}^{\cdot\ \ \nu} - \gamma^p{}_{pm}h^\nu_s - \gamma_{sp\cdot}^{\cdot\ \ p}h^\nu_m) \tag{17}$$

що співпадає з результатом для $M_m{}^{n\nu}$, підрахованим безпосередньо за формулою (16). При одержанні формули (17) враховано, що $e = hl$, де $h := \left|h^m_\mu\right|$ і $l := \sqrt{|g_{mn}|}$, а отже $\partial_\sigma(hh^\sigma_n) = hF^p_{pn}$, $\partial_s l = \frac{1}{2}l\,g^{mn}\partial_s g_{mn}$, звідки, за умов (2) і (3), слідує $\partial_\sigma(eh^\sigma_n) = e\gamma^p{}_{pn}$. Можна показати, що якщо вимагати виконання лише умови відсутності скруту (2), з рівняння Палатіні (15) слідує умова метричності (3), і навпаки [10]. Далі будемо припускати виконання умов (2) і (3), а значить і рівняння Палатіні (15).

Обидві інші варіаційні похідні в формулі (14) виражаються через симетричний в нашому випадку тензор Ейнштейна $G_{mn} = R_{mn} - \frac{1}{2}g_{mn}R$:

$$\delta_{h^n_\nu} L_\gamma = eG^\nu_n , \qquad \delta_{g_{mn}} L_\gamma = \tfrac{1}{2}eG^{mn} , \tag{18}$$

і всі відмінні від нуля доданки з варіаційними похідними в формулі (14) зводяться до виразу:

$$eG^\nu_n \,\delta h^n_\nu + \tfrac{1}{2}eG^{mn}\,\delta g_{mn} = \tfrac{1}{2}eG^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu} . \tag{19}$$

Це свідчить про надмірність кількості полів h^m_μ і g_{mn} для знаходження рівняння руху гравітаційного поля в ТГАР. Так, наприклад, в якості базових польових змінних можна вибрати h^m_μ, а g_{mn} розглядати як параметри. Зокрема, в якості g_{mn} може виступати метрика η_{mn} плоского простору, що відповідає вибору ортонормованих реперних полів, або метрика $g_{\mu\nu}$ простору, який розглядається, що відповідає ЗТВ Ейнштейна, або метрика будь-якого іншого псевдоріманового простору, наприклад простору де-Сіттера. Простір з метрикою g_{mn} може розглядатися як вакуумний, на фоні якого спостерігаються гравітаційні явища, що описуються потенціалами h^m_μ. В теоретико-груповому тлумаченні гравітаційного поля, як калібрувального [8], гравітаційне поле в даному випадку виступає як додеформація базового (вакуумного) простору.

Поверхневий член не впливає на варіаційні похідні, а значить рівняння руху, що слідують з лагранжіана L_R і будь-яких з його усічених варіантів, зокрема L_γ, співпадають.

Оскільки $\delta\Sigma_m{}^{n\mu\nu}$ залежить лише від полів h^s_σ і g_{ps}, маємо:

$$\delta\Sigma_m{}^{n\mu\nu} = \partial_{h^s_\sigma}\Sigma_m{}^{n\mu\nu}\,\delta h^s_\sigma + \partial_{g_{ps}}\Sigma_m{}^{n\mu\nu}\,\delta g_{ps} . \tag{20}$$

Безпосередньо з означення $\Sigma_m{}^{n\mu\nu}$ знаходимо:

$$\partial_{h^s_\sigma}\Sigma_m{}^{n\mu\nu} = h^\sigma_s\Sigma_m{}^{n\mu\nu} + h^\mu_s\Sigma_m{}^{n\nu\sigma} + h^\nu_s\Sigma_m{}^{n\sigma\mu} , \tag{21}$$

$$\partial_{g_{ps}}\Sigma_m{}^{n\mu\nu} = -g^{n\{p}\Sigma_m{}^{s\}\mu\nu} + \tfrac{1}{2}g^{ps}\Sigma_m{}^{n\mu\nu} .$$

(22)

Фігурні дужки тут означають симетризацію за індексами, що в них містяться. Таким чином,

$$\delta\Sigma_m{}^{n\mu\nu}\,\gamma^m_{\nu n} = B^{\sigma\mu}_s \delta h^s_\sigma + \tfrac{1}{2}D^{ps\mu}\delta g_{ps}\,, \qquad (23)$$

де

$$B^{\sigma\mu}_s := \partial_{\partial_\mu h^s_\sigma} L_\gamma = \partial_{h^s_\sigma}\Sigma_m{}^{n\mu\nu}\gamma^m_{\nu n}\,, \qquad (24)$$

$$\tfrac{1}{2}D^{ps\mu} := \partial_{\partial_\mu g_{ps}} L_\gamma = \partial_{g_{ps}}\Sigma_m{}^{n\mu\nu}\gamma^m_{\nu n} \qquad (25)$$

— узагальнені імпульси полів h^s_σ та g_{ps} відповідно. З використанням (21), (22) одержуємо:

$$B^{\sigma\mu}_s = e\gamma^{[\sigma\,\mu]}_{s\,.} - h^\sigma_s V^\mu + h^\mu_s V^\sigma\,, \qquad (26)$$

$$D^{ps\mu} = -e\gamma^{\mu\{ps\}} + e\gamma^{n\{p}_n g^{s\}\mu} - g^{ps}V^\mu\,. \qquad (27)$$

Формула (14), з врахуванням (15), (18) і (19), приймає вигляд:

$$\begin{aligned}\delta' L_\gamma &= \tfrac{1}{2}eG^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + \\ &+\partial_\mu(B^{\sigma\mu}_s\delta h^s_\sigma + \tfrac{1}{2}D^{ps\mu}\delta g_{ps} + L_\gamma\delta x^\mu).\end{aligned} \qquad (28)$$

З рівняння Палатіні (15) слідує $\partial_\mu\Sigma_m{}^{n\mu\nu}\,\gamma^m_{\nu n} = 2H$, отже за умови його виконання

$$L_\gamma = H = \Sigma_m{}^{n\mu\nu}\gamma^m_{\mu s}\gamma^s_{\nu n}\,. \qquad (29)$$

В координатному репері, коли $\gamma^s_{\mu n}$ переходять в символи Крістоффеля $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$, лагранжіан L_γ співпадає з усіченим лагранжіаном Гілберта в координатному репері L_Γ [11], а в ортонормованому репері, коли $\gamma^s_{\mu n}$ переходять в коефіцієнти обертання Річчі $\Omega^i_{\mu j}$, лагранжіан L_γ співпадає з лагранжіаном Мьоллера L_Ω [3]. В загальному випадку афінного репера, при застосуванні для лагранжіану L_γ формули (29), треба враховувати виконання умов (2) і (3), отже коефіцієнти зв'язності в цьому випадку вже не будуть довільними і при їх вар'їруванні треба застосовувати формули (4), (5) для їх складових.

3. Калібрувальна трансляційна інваріантність ТГАР

Лагранжіан Гілберта L_R демонструє унікально широку калібрувальну симетрію G^g, як відносно калібрувальних трансляцій простору-часу (T^g-перетворень), так і відносно переходу між загальними системами відліку — афінними реперними полями (GL^g-перетворень): $G^g = T^g\times)GL^g$. В результаті цього і рівняння, одержані з усіченого лагранжіану L_γ, будуть G^g-симетричними. Відзначимо, що перетворення групи G^g тут розглядаються з активної точки зору, тобто як реальні зміщення $x\to x'$ точок простору X в фіксованих координатах та реальні локальні лінійні перетворення дотичних просторів TX_x , а не їх перепараметризація.

Розглянемо тотожності Ньотер [12], які слідують з калібрувальної інваріантності ТГАР, починаючи з інваріантності відносно перетворень групи T^g, які параметризуємо компонентами t^m векторів локальних зрушень в афінному репері (деформована група дифеоморфізмів) [8]. В інфінітезимальному випадку T^g-перетворення мають вигляд:

$$\delta x^\mu = h^\mu_m t^m\,, \qquad (30)$$

$$\delta h^m_\mu = -F^m_{\mu n}t^n - \partial_\mu t^m\,, \qquad (31)$$

$$\delta g_{mn} = -\partial_s g_{mn}t^s\,, \qquad (32)$$

в результаті чого інтегральна варіація (28) лагранжіану L_γ при калібрувальних трансляціях приймає вигляд:

$$\begin{aligned}\delta' L_\gamma &= -eG^{ps}(F^{\cdot}_{\{ps\}m} + \tfrac{1}{2}\partial_m g_{ps})\,t^m - G^\mu_m\partial_\mu t^m - \\ &-\partial_\sigma(t^\sigma_m t^m + B^{\mu\sigma}_m\partial_\mu t^m),\end{aligned} \qquad (33)$$

або з врахуванням умов (2), (3):

$$\begin{aligned}\delta' L_\gamma &= -eG^\nu_n(\gamma^n_{\nu m}t^m + \partial_\nu t^n) - \\ &-\partial_\sigma(t^\sigma_m t^m + B^{\mu\sigma}_m\partial_\mu t^m),\end{aligned} \qquad (34)$$

де

$$t^\sigma_m := B^{\mu\sigma}_s F^s_{\mu m} + \tfrac{1}{2}D^{ps\sigma}\partial_m g_{ps} - L_\gamma h^\sigma_m\,, \qquad (35)$$

або з врахуванням умови (3):

$$t^\sigma_m = B^{n\sigma}_s F^s_{nm} + D^{n\sigma}_s\gamma^s_{mn} - L_\gamma h^\sigma_m\,, \qquad (36)$$

а також умови (2):

$$t^\sigma_m = B^{n\sigma}_s\gamma^s_{nm} + M_s{}^{n\sigma}\gamma^s_{mn} - L_\gamma h^\sigma_m \qquad (37)$$

— ньотерівський струм, пов'язаний з калібрувальними трансляціями з групи T^g, який відіграє, таким чином, роль змішаної координатно-реперної тензорної густини енергії-імпульсу гравітаційного поля в ТГАР. В формулі (37) позначено

$$M_m{}^{n\sigma} := D^{n\sigma}_m - B^{n\sigma}_m\,. \qquad (38)$$

Підстановка виразів (26), (27) в цю формулу дозволяє переконатися, що дана величина співпадає зі складовою рівняння Палатіні, що означається формулою (16), чому вони однаково і позначені. Завважимо крім того, що для позначення величин, які мають різні тензорні розмірності, може використовуватися одна літера без небезпеки сплутати ці величини, як в (33), наприклад, параметри трансляцій t^m і тензорну густину енергії-імпульсу гравітаційного поля t^σ_m.

Внаслідок T^g-інваріантності теорії $\delta' L_\gamma = 0$ мають місце наступні сильні тотожності Ньотер, які одержуються прирівнюванням нулю коефіцієнтів в формулі (34) при параметрах t^m групи T^g і їх похідних:

$$\partial_\sigma t^\sigma_m = -eG^\sigma_n\,\gamma^n_{\sigma m}\,, \qquad (39)$$

$$\partial_\sigma B^{\mu\sigma}_m + t^\mu_m = -eG^\mu_m\,, \qquad (40)$$

$$B^{\{\mu\nu\}}_m = 0\,. \qquad (41)$$

За наявності матеріальних полів з тензорною густиною енергії-імпульса τ^μ_m, при виконанні рівнянь Ейнштейна $eG^\mu_m = \tau^\mu_m$, тотожність (40) приймає вигляд:

$$\partial_\sigma B^{\mu\sigma}_m = -T^\mu_m\,, \qquad (42)$$

де $T^\mu_m = t^\mu_m + \tau^\mu_m$, що з врахуванням тотожності (41) призводить до збереження повної густини енергій-імпульсу гравітаційного і матеріальних полів T_m^μ :

$$\partial_\mu T_m^\mu = 0 \tag{43}$$

і свідчить про те, що тензорна густина $B_m^{\mu\sigma}$, яку називатимемо індукцією гравітаційного поля в ТГАР, виступає в ролі суперпотенціалу повної густини енергії-імпульса гравітаційного і матеріальних полів T_m^μ .

На гравітаційній екстремалі $eG_m^\mu = \tau_m^\mu$, і з врахуванням закону збереження $\partial_\sigma t_m^\sigma = -\partial_\sigma \tau_m^\sigma$ тотожність (39) переходе в рівняння руху макроматерії [7]:

$$\partial_\sigma \tau_m^\sigma = \tau_s^\sigma \gamma_{\sigma m}^s . \tag{44}$$

4. Узагальнений принцип відносності в ТГАР

Відмінною особливістю ТГАР є більш широке, ніж в ЗТВ, тлумачення системи відліку, як неголономного в загальному випадку афінного реперного поля. Таке розширення поняття системи відліку в ТГАР веде до розширення загального принципу відносності, який в рамках ТГАР тлумачиться як інваріантність рівнянь гравітаційного поля відносно переходів між загальними системами відліку, які утворюють групу локальних лінійних перетворень GL^g афінних реперних полів. Група GL^g більш широка, ніж група загальноковаріантних перетворень $Diff\, X$, що описує переходи між голономними реперними полями, прийнятими як системи відліку в ЗТВ, або ніж група локально-лоренцевих перетворень Λ^g між ортонормованими реперними полями, прийнятими в ТГОР як системи відліку. Ці обидві групи є підгрупами GL^g , отже симетрія ТГАР — більш широка і цікаво зрозуміти, що ця більш широка симетрія означає і до збереження яких величин призводить.

Лагранжіан Гілберта інваріантний відносно GL^g -перетворень, які подамо тут в скінченому вигляді:

$$h'^m_\mu = L^m{}_k h^k_\mu , \tag{45}$$

$$g'_{mn} = L_m{}^k L_n{}^l g_{kl} , \tag{46}$$

$$\gamma'^m{}_{\mu n} = L^m{}_k L_n{}^l \gamma^k{}_{\mu l} + L^m{}_k \partial_\mu L_n{}^k , \tag{47}$$

де $L^m{}_k$ і $L_m{}^k$ — залежні від x взаємно обернені матриці $L^m{}_k L_n{}^k = \delta^m_n$ (які відрізнятимемо по послідовності розташування індексів), в результаті чого рівняння гравітаційного поля в ТГАР є GL^g -інваріантним, хоча розбиття (8) лагранжіана Гілберта на об'ємну і поверхневу частини не є GL^g -інваріантним і при зміні загальної системи відліку між ними відбувається перерозподіл зі збереженням:

$$\Delta L_R = \Delta L_\gamma + \partial_\sigma \Delta V^\sigma = 0 , \tag{48}$$

де Δ означає зміну форми функції при GL^g -перетвореннях (45)—(47). Розглянемо спочатку інфінітезимальний варіант перетворень $L^m{}_k \approx \delta^m_k + l^m{}_k$ з нескінченно малими параметрами $l^m{}_k$, з якими $L_k{}^m \approx \delta^m_k - l^m{}_k$ і формули (45)—(47) приймають вигляд:

$$\Delta h^m_\mu = l^m{}_k h^k_\mu , \tag{49}$$

$$\Delta g_{mn} = -l^k{}_m g_{kn} - l^k{}_n g_{mk} , \tag{50}$$

$$\Delta \gamma^m{}_{\mu n} = l^m{}_k \gamma^k{}_{\mu n} - l^k{}_n \gamma^m{}_{\mu k} - \partial_\mu l^m{}_n . \tag{51}$$

З останньої формули, з врахуванням (12), слідує:

$$\Delta V^\sigma = -\Sigma_m{}^{n\nu\sigma} \partial_\nu l^m{}_n . \tag{52}$$

Зауважимо, що GL^g -перетворення не діють в просторі-часі, отже $\Delta x^\mu = 0$ і $\Delta g_{\mu\nu} = 0$. Таким чином, з загальної формули (28) в нашому випадку, коли $\delta' = \delta = \Delta$, одержуємо:

$$\Delta L_\gamma = \partial_\sigma (B_m^{\mu\sigma} \Delta h^m_\mu + \tfrac{1}{2} D^{mn\sigma} \Delta g_{mn}) , \tag{53}$$

що з врахуванням умови симетрії (48), виразів (49), (50), (52) і означення (38) дає:

$$\partial_\sigma (M_m{}^{n\sigma} l^m{}_n + \Sigma_m{}^{n\nu\sigma} \partial_\nu l^m{}_n) = 0 . \tag{54}$$

Цікаво відмітити, що завдяки тому, що $\Delta g_{\mu\nu} = 0$, в виразі (54) немає варіаційних похідних, отже всі тотожності, які одержуються з (54) прирівнюванням коефіцієнтів при параметрах $l^m{}_n$ групи GL^g і їх похідних, сильні:

$$\partial_\sigma M_m{}^{n\sigma} = 0 , \tag{55}$$

$$\partial_\sigma \Sigma_m{}^{n\nu\sigma} + M_m{}^{n\nu} = 0 , \tag{56}$$

$$\Sigma_m{}^{n\{\nu\sigma\}} = 0 . \tag{57}$$

Величина $M_m{}^{n\sigma}$ є ньотерівським струмом, який відповідає лінійним перетворенням реперних полів, а $\Sigma_m{}^{n\nu\sigma}$ — його суперпотенціалом. Закон збереження (55) є наслідком GL^g -інваріантності ТГАР. Тотожність (56) співпадає з рівнянням Палатіні (15), яке, як бачимо, є наслідком GL^g -інваріантності теорії і описує вираження ньотерівського струму, пов'язаного з інваріантністю ТГАР по відношенню до вибору загальної системи відліку, через суперпотенціал.

Умова (54) GL^g -інваріантності ТГАР для контраваріантних параметрів $l^{mn}_{\cdot}$ групи GL^g приймає вигляд:

$$\partial_\sigma (S_{mn}{}^\sigma l^{mn}_{\cdot} + \Sigma_{mn}{}^{\cdot\nu\sigma} \partial_\nu l^{mn}_{\cdot}) = 0 , \tag{58}$$

де

$$S_{mn}{}^\sigma := M_{mn}{}^{\cdot\sigma} + \Sigma_m{}^{s\nu\sigma} \partial_\nu g_{sn} . \tag{59}$$

Використовуючи формулу (16) і умову метричності (2), знаходимо:

$$S_{mn}{}^\sigma = \Sigma_{ms}{}^{\cdot\nu\sigma} \gamma^s{}_{\nu n} - \Sigma_{ns}{}^{\cdot\nu\sigma} \gamma^s{}_{\nu m} , \tag{60}$$

або з врахуванням умови відсутності скруту (2):

$$S_{mn}{}^\sigma = \tfrac{e}{2} (F^\sigma_{mn} - h^\sigma_m \gamma^s_{sn} + h^\sigma_n \gamma^s_{sm}) . \tag{61}$$

Зауважимо, що $S_{mn}{}^\sigma$, як і $\Sigma_{mn}{}^{\cdot\nu\sigma}$ — антисиметричні за нижніми індексами. Отже в умову (58) входять лише антисиметричні складові $\omega^{mn} := l^{[mn]}_{\cdot}$ параметрів групи GL^g . Перетворення з параметрами ω^{mn} не змінюють метрику g_{mn} в афінному репері, оскільки