

15. Ноговицын А. В. Численное моделирование гидродинамических и тепловых процессов при непрерывной двухвалковой разливке стали / А. В. Ноговицын, А. Д. Подольцев, И. Н. Кучерявая // *Металл и литье Украины* – 2015. – № 3 (262) – Киев : Издательство ФТИМС НАН Украины. – С. 15–20.
16. Guthrie R.I.L. Mathematical and physical modeling of steel flow and solidification in twin roll (horizontal belt thin strip casting machines) / R.I.L. Guthrie, R.P. Tavares // *Inter Conf on CFD in Mineral & Metal Processing and Power Generation*. CSIRO. – 1997. – P. 41–54.

пост. 28.04.2016

**В.Д. ВЕРНИГОРА**, старший викладач

**Л.М. БОЖУХА**, к.т.н., доцент

Дніпродзержинський державний технічний університет, м. Кам'янське

## Математичне моделювання процесу мийки шламу абразивної обробки металів

На підставі проведених експериментальних досліджень процесу мийки шламу абразивної обробки металів розроблено математичну модель для визначення кількості забруднень, що переходять у миючий розчин в заданий час мийки.

### Вступ

Виробництва, що пов'язані з обробкою металів, стикаються з проблемою утилізації шламових відходів, що складаються переважно з металевих і неметалевих включень, технічних мастил. На підприємствах машинобудування і металургії, які здійснюють обробку металів, щомісяця утворюються тисячі тонн шламів абразивної обробки металів. Такий шлам за своїм складом являє собою суміш дрібної металевої стружки, абразиву, технічних мастил, мастильно-охолоджуючих рідин та ін.

В даний час, при зростанні цін на сировину і розвитку технологій переробка шламів абразивної обробки металів є економічно вигідним і екологічно безпечним процесом.

Для розв'язання задачі використання шламів абразивної обробки металів, зменшення обсягів їх накопичення та зменшення рівня забруднення навколишнього середовища, використання їх складових, як вторинної сировини в народному господарстві розроблений технологічний процес і комплексна система обладнання для вилучення металевих частинок з шламів абразивної обробки металів [1]. Проведено дослідження процесу мийки шламу абразивної обробки металів [2].

### Постановка проблеми

Побудова математичної моделі, яка описує процес мийки шламу абразивної обробки металів в синтетичному миючому розчині «Лабомід».

### Аналіз публікацій поданій темі

Для вирішення поставленого завдання були використані методології та підходи, що містяться в роботах [1–5].

### Матеріали досліджень

У даній роботі розроблялася математична модель процесу мийки шламу абразивної обробки металів у миючому розчині «Лабомід».

У роботі поставлено завдання про визначення кількості мінерального мастила И-20(Г), яке переходить у миючий розчин «Лабомід» у процесі мийки шламу абразивної обробки металів. Завдання вирішувалося знаходженням умовного мінімуму функції відгуку для

кількості забруднення  $G(\tau)$ . Для одержання зазначеної функції проведений аналіз експериментальних даних технологічного процесу.

У математичній постановці задачі у якості змінних прийняті наступні фактори:  $C_p$  — концентрація миючого розчину ( $\text{кг}/\text{м}^3$ );  $T$  — температура миючого розчину ( $^{\circ}\text{C}$ );  $\tau$  — час мийки шламу (сек.).

Для побудови математичної моделі залежності кількості забруднення  $G = f(C_p, T, \tau)$  (кг), яке переноситься з боку шламу абразивної обробки металів у миючий розчин від зазначених вище факторів використовується методика планування експерименту. Для одержання функції відгуку (реакції) у вигляді ступеневого поліному другого порядку реалізований композиційний ортогональний план другого порядку для трьох факторів.

Загальна кількість досліджень у матриці центрального композиційного ортогонального плану при  $\kappa = 3$  факторах складала [6]:

$$N = 2^{\kappa} + 2\kappa + n_0 = 2^3 + 2 \cdot 3 + 1 = 15, \quad (1)$$

де  $n_0$  — кількість експериментів в центрі плану з нульовими координатами.

В процесі побудови моделі апроксимаційний поліном замінюється рівнянням регресії та методом найменших квадратів, знаходяться статистичні оцінки їх невідомих коефіцієнтів. Аналіз отриманих експериментальних даних дає можливість використовувати сімейство логарифмічних функцій. Специфіка цього сімейства функцій вимагає переходу від (стандартного) табличного композиційного плану [6,7] — матриця планування, якого складена зі значень  $\{-1; 0; +1\}$  до матриці з додатними значеннями (область допустимих значень функції  $y = \ln(x), x > 0$ ). Основними значеннями сітки плану були прийняті:

$$\{1/e; 1; e\} \Rightarrow \{\ln(1/e) = -1; \ln 1 = 0; \ln e = 1\}.$$

У якості нестандартного підходу і полегшення знаходження значень у зіркових точках, обраний базис плану  $\{1; 2; 3\}$  (таблиця 1).

Таблиця 1. Рівні і інтервали варіювання факторів

№	Фактори	Кодове позначення	Інтервали варіювання	Рівні факторів				
				0,785	1	2	3	3,215
1	$C_p$ - концентрація миючого розчину, $кг/м^3$	$x_1$	5	8,925	10	15	20	21,075
2	$T$ - температура миючого розчину, $^{\circ}C$	$x_2$	10	22,85	25	35	45	47,15
3	$\tau$ - час мийки шлему, сек.	$x_3$	1080	307,8	540	1620	2700	2932,2

Відповідно до умовдосліджень проведений експеримент мийки в миючому розчині «Лабомід», на основі стандартного факторного плану сформована матриця планування (таблиця 2) та розширена матриця планування (таблиця 3).

Таблиця 2. Матриця планування і результати досліджень

№ дослідження	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1^2$	$x_2^2$	$x_3^2$	$y_1$	$y_2$	$Y_{сд}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5,9170	6,2145	6,0658
2	1	3	1	1	3	3	1	9	1	1	4,8750	5,2079	5,0415
3	1	1	3	1	3	1	3	1	9	1	4,3960	4,7704	4,5832
4	1	3	3	1	9	3	3	9	9	1	7,5120	7,3410	7,4265
5	1	1	1	3	1	3	3	1	1	9	3,5860	4,1640	3,8750
6	1	3	1	3	3	9	3	9	1	9	4,6820	3,3587	4,0204
7	1	1	3	3	3	3	9	1	9	9	1,9850	2,2773	2,1312
8	1	3	3	3	9	9	9	9	9	9	5,7730	5,3786	5,5758
9	1	0,785	2	2	1,57	1,57	4	0,6162	4	4	3,0350	3,9630	3,4990
10	1	3,215	2	2	6,43	6,43	4	10,336	4	4	4,3788	4,1686	4,2737
11	1	2	0,785	2	1,57	4	1,57	4	0,6162	4	4,4380	5,0735	4,7558
12	1	2	3,215	2	6,43	4	6,43	4	10,3362	4	3,5460	3,7500	3,6480
13	1	2	2	0,785	4	1,57	1,57	4	4	0,6162	6,2150	6,0870	6,1510
14	1	2	2	3,215	4	3,215	3,215	4	4	10,3362	3,2760	3,6150	3,4455
15	1	2	2	2	4	4	4	4	4	4	3,5050	3,9938	3,7494
$\Sigma$	15	30	30	30	60	60	60	71	71	71			68,2416

Таблиця 3. Розширена матриця планування і результати досліджень

№ дослідження	$x_0$	$\ln x_1$	$\ln x_2$	$\ln x_3$	$\ln x_1 \ln x_2$	$\ln x_1 \ln x_3$	$\ln x_2 \ln x_3$	$\ln^2 x_1$	$\ln^2 x_2$	$\ln^2 x_3$	$y_1$	$y_2$	$Y_{cp}$
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5,917	0	0
2	1	1,098	0	0	0	0	0	1,206	0	0	4,875	1,098	0
3	1	0	1,098	0	0	0	0	0	1,206	0	4,396	0	1,098
4	1	1,098	1,098	0	1,206	0	0	1,206	1,206	0	7,512	1,098	1,098
5	1	0	0	1,098	0	0	0	0	0	1,206	3,586	0	0
6	1	1,098	0	1,098	0	1,206	0	1,206	0	1,206	4,682	1,098	0
7	1	0	1,098	1,098	0	0	1,206	0	1,206	1,985	0	1,098	
8	1	1,098	1,098	1,098	1,206	1,206	1,206	1,206	1,206	5,773	1,098	1,098	
9	1	-0,242	0,693	0,693	-0,167	-0,167	0,480	0,058	0,480	0,480	3,035	-0,242	0,693
10	1	1,167	0,693	0,693	0,809	0,809	0,480	1,363	0,480	0,480	4,378	1,167	0,693
11	1	0,693	-0,242	0,693	-0,167	0,480	-0,167	0,480	0,058	0,480	4,438	0,693	-0,242
12	1	0,693	1,167	0,693	0,809	0,809	0,480	1,363	0,480	3,546	0,693	1,167	
13	1	0,693	0,693	-0,242	0,480	-0,167	-0,167	0,480	0,480	0,058	6,215	0,693	0,693
14	1	0,693	0,693	1,167	0,480	0,809	0,809	0,480	0,480	1,363	3,276	0,693	0,693
15	1	0,693	0,693	0,693	0,480	0,480	0,480	0,480	0,480	0,480	3,505	0,693	0,693
$\Sigma$	15	8,785	8,785	8,785	5,138	5,138	5,138	8,652	8,652	8,652		8,785	8,785

За даними досліджень, які проведені згідно з матрицею планування, отримана математична модель залежності  $y$  від досліджуваних факторів процесу.

Перевіримо відтворюваність результатів експериментів.

При однаковій кількості паралельних експериментів ( $y$  нашому випадку  $m = 2$ ) на кожній комбінації рівнів факторів відтворюваність процесу перевіряється за критерієм Кохрена [6]:

$$G = \frac{s_{u\max}^2}{\sum_{u=1}^N s_u^2} \leq G(0,05; f_n; f_u), \quad (2)$$

де  $s_u^2 = \sum_{l=1}^m (y_{ul} - y_{cp})^2 / (m - 1)$  — дисперсія, що характеризує розподіл результатів на  $u$ -тій комбінації рівнів факторів;  $l = 1, 2, \dots, m$  — кількість паралельних експериментів;  $s_{u\max}^2$  — найбільша дисперсія, що характеризує розподіл результатів;  $G(0,05; f_n; f_u)$  — табличне значення критерію Кохрена при 5%-ому рівні значимості;  $f_n = N$  — кількість досліджень у матриці;  $f_u = m - 1$  — число ступенів свободи кожної оцінки.

Для знаходження значень оцінок дисперсії в кожній точці плану використовується  $s_u^2 = \Delta^2 / 2$ , де  $\Delta$  — різниця між паралельними дослідженнями.

Результати обчислень значень оцінок дисперсії факторного плану наведені в таблиці 4.

Таблиця 4. Значення оцінок дисперсії в кожній точці плану

№ дослідження	$y_1 - y_{cp}$	$y_2 - y_{cp}$	$(y_1 - y_{cp})^2$	$(y_2 - y_{cp})^2$	$m$	$s_u$	$s_u^2$
1	-0,1488	0,1488	0,0221	0,0221	2	0,2104	0,0443
2	-0,1665	0,1665	0,0277	0,0277		0,2354	0,0554
3	-0,1872	0,1872	0,0350	0,0350		0,2647	0,0701
4	0,0855	-0,0855	0,0073	0,0073		0,1209	0,0146
5	-0,2890	0,2890	0,0835	0,0835		0,4087	0,1670
6	0,6617	-0,6617	0,4378	0,4378		0,9337	0,8756
7	-0,1462	0,1462	0,0214	0,0214		0,2067	0,0427
8	0,1972	-0,1972	0,0389	0,0389		0,2789	0,0778
9	-0,4640	0,4640	0,2153	0,2153		0,6562	0,4306
10	0,1051	-0,1051	0,0110	0,0110		0,1486	0,0221
11	-0,3178	0,3178	0,1010	0,1010		0,4494	0,2019
12	-0,1020	0,1020	0,0104	0,0104		0,1442	0,0208
13	0,0640	-0,0640	0,0041	0,0041		0,0905	0,0082
14	-0,1695	0,1695	0,0287	0,0287		0,2397	0,0575
15	-0,2444	0,2444	0,0597	0,0597		0,3456	0,1195

Отже,  $\sum_{u=1}^N s_u^2 = 2,2080$  та  $s_{u\max}^2 = 0,8756$ .

Процес є відтворюєим тому, що

$$G = \frac{0,8756}{2,2080} = 0,3965 \leq G(0,05; f_n; f_u) = 0,4709. \quad (3)$$

Дисперсія відтворюваності (помилка дослідження):

$$s_y^2 = \sum_{u=1}^N s_u^2 / N = 2,2080 / 15 = 0,1472. \quad (4)$$

Коефіцієнти регресії

$$y(x) = b_0 + \sum_{j=1}^3 b_j \ln x_j + b_{12} \ln x_1 \ln x_2 + b_{13} \ln x_1 \ln x_3 + b_{23} \ln x_2 \ln x_3 + \sum_{j=1}^3 b_{jj} n^2 x_j \quad (5)$$

визначаються за допомогою метода найменших квадратів із системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases}
 \sum_{j=1}^{15} (P(x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}) - y_j) = 0 \\
 \sum_{j=1}^{15} (P(x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}) - y_j) \ln x_{1i} = 0 \\
 \sum_{j=1}^{15} (P(x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}) - y_j) \ln x_{2i} = 0 \\
 \sum_{j=1}^{15} (P(x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}) - y_j) \ln x_{3i} = 0 \\
 \sum_{j=1}^{15} (P(x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}) - y_j) \ln x_{1i} \ln x_{2i} = 0 \\
 \sum_{j=1}^{15} (P(x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}) - y_j) \ln x_{1i} \ln x_{3i} = 0 \\
 \sum_{j=1}^{15} (P(x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}) - y_j) \ln x_{2i} \ln x_{3i} = 0 \\
 \sum_{j=1}^{15} (P(x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}) - y_j) \ln^2 x_{1i} = 0 \\
 \sum_{j=1}^{15} (P(x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}) - y_j) \ln^2 x_{2i} = 0 \\
 \sum_{j=1}^{15} (P(x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}) - y_j) \ln^2 x_{3i} = 0
 \end{cases} \quad (6)$$

Чисельні значення коефіцієнтів регресії:

$$\begin{aligned}
 b_0 &= 6,1598; \\
 b_1 &= -2,4522; \quad b_2 = -2,9661; \quad b_3 = -3,4586; \\
 b_{12} &= 2,7124; \quad b_{13} = 0,6144; \quad b_{23} = -0,5820; \quad (7) \\
 b_{11} &= 1,4637; \quad b_{22} = 1,5367; \quad b_{33} = 1,5917.
 \end{aligned}$$

Визначимо значимість знайдених коефіцієнтів за критерієм Ст'юдента за формулою:

$$t_i = |b_i| / s(b_i), \quad (8)$$

де дисперсії коефіцієнтів регресії мають значення  $s^2(b_i) = s_y^2 / (N \cdot m) = 0,1472 / 30 = 0,07$ .

Отже,

$$\begin{aligned}
 t_0 &= 87,9365; \\
 t_1 &= 35,0080; \quad t_2 = 42,3480; \quad t_3 = 49,3745; \\
 t_{12} &= 38,7215; \quad t_{13} = 8,7705; \quad t_{23} = 8,3083; \quad (9) \\
 t_{11} &= 20,8959; \quad t_{22} = 21,9373; \quad t_{33} = 22,7235.
 \end{aligned}$$

Нормативний коефіцієнт Ст'юдента при  $\nu = N(m-1) = 15$  і коефіцієнті ризику  $\beta = 0,05$  має значення  $t_T = 2,13$ .

Для будь-якого  $i$  виконується співвідношення  $t_i > t_T$  при  $i = 1, 2, 3, \dots, 10$  всі коефіцієнти (7) регресії (5) є значимими.

Таким чином, математичне представлення функції відгуку в заданій області має вигляд:

$$\begin{aligned}
 y_{\text{розрах}} &= 6,1598 - 2,4522 \ln x_1 - 2,9661 \ln x_2 - 3,4586 \ln x_3 + \\
 &+ 2,7124 \ln x_1 \ln x_2 + 0,6144 \ln x_1 \ln x_3 - 0,5820 \ln x_2 \ln x_3 + \\
 &+ 1,4637 \ln^2 x_1 + 1,5367 \ln^2 x_2 + 1,5917 \ln^2 x_3. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Перевіримо адекватність отриманої моделі за критерієм Фішера:

$$F_p = \frac{s_{\text{ад}}^2}{s_y^2} = \frac{\sum (y_{\text{ср.и}} - y_{\text{розрах}})^2}{s_y^2 (N-d)} \leq F_T(0,05; f_{\text{ад}}; f_y). \quad (11)$$

де  $s_{\text{ад}}^2$  — дисперсія адекватності;  $y_{\text{ср.и}}$  — експериментальне середнє значення відгуку на  $i$ -ій комбінації рівней факторів;  $y_{\text{розрах}}$  — розрахункове значення відгуку на  $i$ -ій комбінації рівней факторів;  $N = 15$  — кількість досліджень;  $d = 10$  — кількість коефіцієнтів апроксимуючого полінома (10);  $F_T(0,05; f_{\text{ад}}; f_y)$  —

табличне значення критерію Фішера при: коефіцієнті ризику  $\beta = 0,05$ ;  $f_{\text{ад}} = N - d = 5$  — кількість ступенів свободи дисперсії адекватності;  $f_y = N(m-1) = 15$  — кількість ступенів свободи дисперсії відтворюваності.

При відповідних розрахунках дисперсії адекватності  $s_{\text{ад}}^2 = 0,2942$   $s_y^2 = 0,1472$  та формулою (11), одержуємо:

$$F_p = 1,9988 \leq 2,9 = F_T(0,05; 10; 15).$$

Отже, отримана модель адекватна.

Рівняння (10) перетворюється до вигляду з натуральними значеннями факторів шляхом заміни змінних:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0,2 \cdot C_p - 1; \\
 x_2 &= 0,1 \cdot T - 1,5; \quad (12) \\
 x_3 &= 0,00093 \cdot \tau + 0,5.
 \end{aligned}$$

Підставивши (12) у функцію (10) отримуємо адекватну інтерполяційну формулу для обчислення величини  $G(\tau)$  — кількості мастила И-20, яке переходить у миючий розчин за час  $\tau$  мийки шлама абразивної обробки металів.

#### Висновки

Побудована математична модель, що описує процес мийки шламу абразивної обробки металів в синтетичному миючому розчині «Лабомід» дозволяє визначати кількість індустріального мастила И-20, яке переходить в миючий розчин «Лабомід» в будь-який час мийки. Це дозволяє визначити кінцевий час мийки шламу, що в свою чергу дозволить мінімізувати габаритні розміри мийного жолобу установки з переробки шламу абразивної обробки металів для отримання необхідної чистоти металевих частинок і частинок абразиву.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Вернигора В. Д. Извлечение металлических частиц из шламов абразивной обработки металлов / В. Д. Вернигора, А. Н. Коробочка // Збагачення корисних копалин: Наук.-техн. зб. — 2008. — Вип. 32(73). — С. 26–32.
2. Вернигора В. Д. Исследование процесса мойки твердых частиц шлама абразивной обработки металлов / В. Д. Вернигора // Механизация производственных процессов рыбного хозяйства, промышленных и аграрных предприятий. Сб. науч. труд. КГМТУ. — Керчь: 2008. Вип. 9. — С. 137–140.
3. Вернигора В. Д. Построение математической модели для определения количества масла перенесенного со стороны шлама абразивной обработки металлов в моющей раствор / В. Д. Вернигора, А. Н. Коробочка // Механизация производственных процессов рыбного хозяйства, промышленных и аграрных предприятий. Сб. науч. труд. КГМТУ. — Керчь, 2010. Вип. 11. — С. 25–31.
4. Вернигора В. Д. Исследование процесса мойки металлосодержащих шламов / В. Д. Вернигора, А. Н. Коробочка // «Математичне моделювання». Математичні моделі та алгоритми: Науковий журнал. — Дніпродзержинськ: ДДТУ. — 2015. Випуск 1(32). — С. 52–56.

5. Вернигора В. Д. Мойка шлама абразивной обработки металлов – один из этапов технологического процесса его утилизации / В. Д. Вернигора, Л. Н. Божуха // Современные ресурсосберегающие технологии: Сборник докладов. III-я Международная научно-практическая конференция «Современные ресурсосберегающие технологии, проблемы и перспективы» 9 ноября – 13 ноября 2015 г. – Одесса: ОНУ имени И. И. Мечникова, 2015 г. – С. 49–54.
6. Спиридонов А. А. Планирование эксперимента при исследовании технологических процессов / А. А. Спиридонов // – М.: Машиностроение, 1981. – 184 с.
7. Блохин В. Г. Современный эксперимент: подготовка, проведение, анализ результатов / В. Г. Блохин, О. П. Глудкин, А. И. Гуров, М. Л. Ханин; Под ред. О. П. Глудкина // – М.: Радио и связь, 1997. – 232 с.

пост. 29.04.2016

**А.Ф. РЫЖОВ**, к.т.н., доцент

**Н.С. МИЛАШЕНКО**, аспирантка

Днепропетровский государственный технический университет, г. Каменское

### Математическая модель процесса обжига слоя кускового известняка

Представлена аналитическая методика расчета процесса обжига куска известняка, основанная на решении задачи нестационарной теплопроводности с движущейся границей фазового превращения.

#### Введение

Известь потребляется различными отраслями промышленности, и поэтому к её качеству предъявляются разнообразные требования. Получение продукта с заданными свойствами требует разработки соответствующих технологических режимов и конструкции печей.

Для выбора рационального режима тепловой обработки слоя кускового известняка, продуваемого газами, в обжиговых печах желательнее иметь обобщенные аналитические выражения, определяющие температурное поле и динамику разложения известняка в зависимости от условий внешнего теплообмена.

Из анализа экспериментальных данных [1] следует, что процесс обжига куска известняка в обжиговых печах можно условно разбить на два этапа:

- в первом этапе происходит нагрев куска известняка от начальной температуры до температуры поверхности, соответствующей началу диссоциации ( $t_{пов} = t_p$ );

- во втором этапе, проходящем при возрастающей скорости диссоциации, происходит полное разложение известняка с образованием извести.

Для анализа теплового состояния материала в первом этапе нагрева может быть использовано аналитическое решение задачи нестационарной теплопроводности при граничных условиях третьего рода [2] с коэффициентом теплообмена, отнесенным к единице поверхности куска в слое.

Исследованию процесса нагрева куска известняка во втором этапе нагрева, проходящим с углублением поверхности диссоциации вглубь материала, посвящена настоящая работа.

#### Постановка задачи

Рассматривается процесс симметричного нагрева куска известняка плоской формы толщиной  $2R$  при постоянной температуре греющей среды. Теплопередача от горячего теплоносителя к поверхности нагреваемого куска известняка осуществляется по закону Ньютона при постоянном значении суммарного коэффициента теплообмена.

В начальный момент времени распределение температуры по толщине пластины параболическое

$$t(x, 0) = t_0 + \Delta t_0 \left( \frac{x}{R} \right)^2, \quad (1)$$

где  $t_0$  — температура на оси пластины;  $\Delta t_0$  — перепад температур по толщине пластины;  $x$  — координата.

Температура нагреваемой поверхности в начальный момент равна температуре диссоциации известняка

$$t(R, 0) = t_p. \quad (2)$$

При математической постановке задачи приняты следующие допущения:

- рассматривается две зоны по толщине плоского куска: зона известняка ( $0 < x \leq z(\tau)$ ) и зона образующейся извести ( $z(\tau) < x \leq R$ ), (рис. 1);

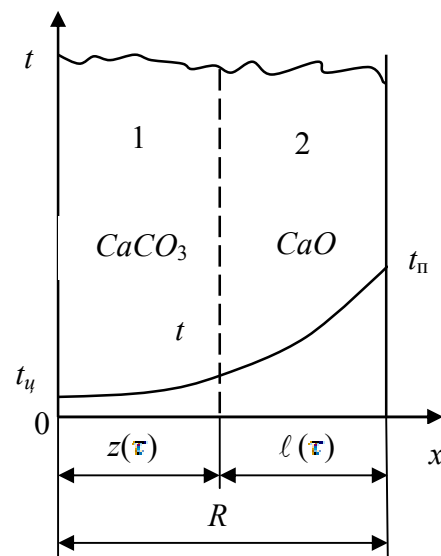


Рис. 1. К математической постановке задачи