МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

С.К. МЕЩАНИНОВ, д.т.н., профессор
В.В. БАГРИЙ, к.т.н., доцент
В.О. УСТИМЕНКО, преподаватель
Е.А. ТОНКОНОГ, преподаватель
Е.Н. БОГДАНОВА, студентка
Днепродзержинский государственный технический университет, г. Каменское

Математическое описание процесса преобразования измерительного сигнала в электронной системе

Представлено решение задачи адекватного математического описания процесса преобразования сигнала в электронно-измерительной системе с целью обеспечения его максимальной надежности и достоверности. Рассмотрены особенности поставленной задачи и предложен метод нахождения устойчивого решения. Для достижения поставленной цели построена модель внешнего воздействия на электронно-измерительную систему.

Введение

На сегодняшний день, эффективность работы современных электронных систем различного назначения является, одним из важнейших производственных и управленческих задач в большинстве отраслей промышленности, и формах существования человеческого общества. При этом, надежность и достоверность преобразования сигнала в электронной системе (ЭС) является важнейшим критерием, по которому можно сделать оценку целесообразности использования того или иного варианта использования комплекса такой аппаратуры в каждом конкретном случае с учетом требований точности, экономичности, безопасности, эргономических и экологических норм. Рассмотрение эффективности любого участка измерительного тракта, на сегодняшний день, по нашему мнению, наиболее целесообразно производить с использованием комплексного метода исследований, в основе которого должно находится представление о рассматриваемом объекте (или его части), как сложной технической системе, подсистемы которой находятся в определенном взаимодействии.

Постановка задачи исследований

При рассмотрении задачи математического описания процесса преобразования сигнала в ЭС на примере динамической системы с сосредоточенными параметрами, ее эволюцию можно аналитически выразить линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = A\,x + B\,z\,, \tag{1}$$

с уравнением наблюдения:

$$y = C\,x\,, \tag{2}$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{n_1}(t))^T$ — вектор-функция переменных состояния ($(.)^T$ — знак транспонирования); $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \ldots, z_{m_1}(t))^T$ — вектор-функция внешних воздействий; $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_{n_1}(t))^T$ — вектор-функция наблюдаемых в эксперименте переменных состояния [1, 2]. Под внешними воздействиями (возмущениями) будем понимать функции $z_1(t), z_2(t), \ldots, z_{m_1}(t)$, которые изменяются независимо от субъективных факторов или свойств и поведения исходной математической модели (1); $x \in X$, $z \in Z$, $y \in Y$; $A,\ B,\ C$ — матрицы с постоянными коэффициентам, соответствующей размерности. Для простоты рассуждений будем полагать, что матрица C является единичной матрицей $\left(x(t) = y(t)\right)$. Таким образом, **целью настоящей работы** является получение математического описания процесса преобразования измерительного сигнала в ЭС.

Основная часть

Рассмотрим однородную систему дифференциальных уравнений, которая соответствует системе (1):

$$\dot{x} = A\ x\,. \tag{3}$$

Введем матрицу $F[t,\ t_0] = F[t]\,F^{-1}[t_0]$,

где

$$F[t] = \begin{bmatrix} f_1^{(1)}(t), & . & . & . & f_1^{(n)}(t) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ f_n^{(1)}(t) & . & . & . & f_n^{(n)}(t) \end{bmatrix},$$

$\{f^{(k)}(t)\}$ — n линейно-независимых решений системы (3). Каждый из векторов $f^{(k)}(t)$ является вектором-столбцом с компонентами $f_1^{(k)}(t), f_2^{(k)}(t), \ldots, f_n^{(k)}(t)$. Матрицу $F[t, t_0]$ называют фундаментальной матрицей ЭИС (3) [1]. В дальнейшем будем полагать, что $t_0 = 0$.

Движение $x(t) = x(t, t_0, x^0) = x(t, x^0)$ системы

(1), которое удовлетворяет начальному условию $x(0)=x^0$, определяется формулой Коши [3]:

$$x(t)=F[t]\,x^0+\int_0^t F[t-\tau]\,Bz(\tau)d\tau=P(A,B,x^0,z), \quad (4)$$

где $P(A,B,x^0,z)=(p_1(A,B,x^0,z),\dots,p_{n_1}(A,B,x^0,z))^T$ есть вектор-функция, каждая компонента которой зависит от матриц A,B и от вектор-функции z и вектора-столбца x^0.

Предположим, что задана вектор-функция $x^g(t)=(x_1^g(t),\dots,x_{n_1}^g(t))^T$. Как правило, эта вектор-функция представлена в виде графика (экспериментальные измерения). Пусть $\tilde{x}(t)=(\tilde{x}_1(t),\dots\tilde{x}_{n_1}(t))^T$ есть вектор-функция, которая используется в расчетах. Величина отклонения $\tilde{x}(t)$ от $x^g(t)$ определяется точностью аппроксимации экспериментальных данных и задана априори:

$$\left\|\tilde{x}(t)-x^g(t)\right\|_X\le\delta_1.$$

Будем полагать, что результаты математического моделирования адекватны экспериментальным измерениям, если выполняется неравенство:

$$\rho_X(P(A,B,x^0,z),\tilde{x})\le\varepsilon, \quad (5)$$

где $\rho_X(P,y)$ есть расстояние между вектор-функцией P и вектор-функцией $\tilde{x}(t)$ в некотором метрическом пространстве X, ε — заданная величина (требуемая точность совпадения эксперимента с результатами математического моделирования).

Одним из возможных вариантов неравенства (5) может быть следующее:

$$\left\|P(A,B,x^0,z)-\tilde{x}\right\|_X\le\varepsilon, \quad (6)$$

где $\|\cdot\|_X$ — норма в функциональном пространстве X.

Величина ε задается априори и характеризует желаемое качество математического моделирования (степень адекватности результатов математического моделирования).

Очевидно, что при выполнении неравенства (5) матрицы A,B и вектор-функция z оказываются связанными. Нетрудно показать, что при фиксированных матрицах A,B в (6) существует бесконечно много различных между собой вектор-функций z, которые будут удовлетворять неравенству (6) [3]. И, наоборот, при фиксированной вектор-функции z существует бесконечно много различных матриц A,B, для которых выполняется условие (6) [3].

В практике математического моделирования проверка неравенства (6), как правило, не осуществляется, но его выполнение подразумевается. В величину ε входит обязательным слагаемым погрешность аппроксимации δ_1 и, поэтому, всегда выполняется неравенство $\delta_1\le\varepsilon$. Это происходит по той причине, что точность проведения экспериментальных измерений, как правило, на порядок выше требуемой точности моделирования. Часто довольствуются лишь качественным совпадением результатов математического моделирования с данными измерений.

Таким образом, для открытых динамических систем критерию адекватности результатов математического моделирования могут удовлетворять совершенно различные системы (различные матрицы A,B) с различными вектор-функциями $z(t)$.

Если ЭИС замкнута, тогда вектор-функция $P(A,B,x^0,z)$ будет зависеть только от матрицы A и вектора x^0

$$P(A,B,x^0,z)=P(A,x^0).$$

Неравенство (6) в этом случае также будет определять бесконечное множество различных матриц A. То есть и в этом случае критерия выбора одной «хорошей» математической модели не существует.

Таким образом, задачу синтеза адекватного математического описания процесса преобразования сигнала в ЭИС можно сформулировать следующим образом: по заданным матрицам A,B необходимо построить модель внешнего воздействия, с использованием которой результаты математического моделирования будут совпадать с определенной точностью с результатами измерений. Другими словами, необходимо построить такую модель внешнего воздействия, которая будут давать адекватные результаты математического моделирования при использовании ранее выбранного математического описания (матрицы A,B). Такой подход для построения пары (математическое описание + модель внешнего воздействия) не является единственным. Возможно также вначале фиксировать модель внешнего воздействия (с некоторой погрешностью), а затем выбирать математическое описание, которое удовлетворяло бы условиям адекватности (6).

Рассмотрим теперь возможности первого алгоритма на примере ЭИС с сосредоточенными параметрами.

Пусть ход некоторого физического процесса хорошо описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (1) с уравнением наблюдения (2).

Математическое описание (1) с переменными состояния $x(t)$ можно представить в виде совокупности взаимодействующих отдельных элементарных звеньев с выходными переменными $x_1(t),x_2(t),..,x_{n_1}(t)$. Взаимодействие отдельных звеньев происходит посредством переменных состояния (внутренних взаимодействий). Если экспериментальным путем определить, например, переменную состояния $x_k(t)$, тогда исходную систему можно представить одной или двумя более простыми подсистемами, приложив дополнительные внешние воздействия $d_kx_k(t)$ и — $d_kx_k(t)$ к соответствующим частям (d_k — const). Назовем такое преобразование «k-м сечением» исходной системы [3]. Результатом такого сечения можно получить ряд более простых подсистем исходной системы.

Будем предполагать, что с помощью ряда «сечений» указанного типа выделена подсистема исходной ЭИС, у которой известны все внешние воздействия (часть из которых получена из переменных состояния) кроме одного искомого воздействия $z_i(t)$, и известна одна из переменных состояния подсистемы, например, $x_j(t)$.

Пусть движение полученной подсистемы движение которой описывается дифференциальным уравнением:

$$\dot{x} = A_1 x + B_1 z \,, \qquad (7)$$

с уравнением наблюдения:

$$y = C_1 x + D_1 z \,, \qquad (8)$$

где:

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^T \,,$$

$$z(t) = (z_1(t), \ldots, z_m(t))^T \,,$$

$$y(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))^T \,;$$

A_1, B_1, C_1, D_1 — матрицы с постоянными коэффициентам, соответствующей размерности; D_1 — диагональная матрица с первым нулевым диагональным элементом; матрица C_1 имеет только один ненулевой элемент в первой строке, например, первый c_1.

Движение подсистемы (7) $x(t) = x(t, x^0)$ системы (1), которое удовлетворяет начальному условию $x(0) = x^0$, определяется формулой Коши.

Из уравнения наблюдения имеем:

$$x_1(t) = y_1(t) = \Phi[t]\, x^0 + \int_0^t \Phi[t-\tau]\, B\, z(\tau) d\tau \,,$$

$$x_2(t) = y_2(t) = d_2\, z_2(t) \,, \quad x_n(t) = y_n(t) = d_n\, z_n(t) \,, \qquad (9)$$

где $\Phi_1[t]$ — фундаментальная матрица однородной системы (7) с компонентами $\phi_k^{(i)}$.

Первое уравнение системы (9) дает:

$$x_1(t) = y_1(t) = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_1^{(i)}(t) x_i^0 \\ . \\ \ldots\ldots \\ . \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_n^{(i)}(t) x_i^0 \end{bmatrix} + \int_0^t \Phi[t-\tau]\, B\, z(\tau) d\tau \,, \qquad (10)$$

$$x_1(t) = \sum_{i=1}^{n} \phi_1^{(i)}(t-\tau) x_i^0 + \int_0^t \sum_{i=1}^{n} \phi_1^{(i)}(t-\tau) \sum_{k=1}^{m} b_{ik} z_k(\tau) d\tau =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \phi_1^{(i)}(t-\tau) x_i^0 + \int_0^t z_1(\tau) \sum_{i=1}^{n} \phi_1^{(i)}(t-\tau) b_{i1} z_k(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^t [z_2(\tau) \sum_{i=1}^{n} \phi_1^{(i)}(t-\tau) b_{i2} + . + z_m(\tau) \sum_{i=1}^{n} \phi_1^{(i)}(t-\tau) b_{im}]\, d\tau =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \phi_1^{(i)}(t-\tau) x_i^0 + \int_0^t K_1(t-\tau) z_1(\tau) d\tau + \sum_{j=2}^{n} \int_0^t K_j(t-\tau) z_j(\tau) d\tau \,.$$

Здесь приняты обозначения:

$$K_1(t-\tau) = \sum_{i=1}^{n} \phi_1^{(i)}(t-\tau) b_{i1},$$

$$K_j(t-\tau) = \sum_{i=1}^{n} \phi_1^{(i)}(t-\tau) b_{ij}, \; j = 2,3,..,m \qquad (11)$$

Из системы (9) имеем

$$x_1(t) = \sum_{i=1}^{n} \phi_1^{(i)}(t-\tau) x_i^0 + \int_0^t K_1(t-\tau) z_1(\tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{d_j} \int_0^t K_j(t-\tau) x_j(\tau) d\tau$$

или:

$$\int_0^t K_1(t-\tau) z_1(\tau) d\tau = E(\mathrm{t}) \,, \qquad (12)$$

где $E(t) = x_1(t) - \sum\limits_{i=1}^{n} f_1^{(i)}(t-\tau) x_i^0 - \sum\limits_{j=2}^{n} \frac{1}{d_j} \int_0^t K_j(t-\tau) y_j(\tau) d\tau$ — известная функция.

Перепишем (12) в виде:

$$A\, z = u_{\delta_1} = B\, \tilde{x} \,, \qquad (13)$$

где A есть линейный вполне непрерывный оператор $A: Z \to U$, $z \in Z$, $u_{\delta_1} \in U$, $\tilde{x} \in X$, $B: X \to U$ — линейный оператор, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1(t), z_1(t), z_2(t), \ldots, z_r(t))^T$ — исходные экспериментальные данные; z — искомая функция, (Z, U, X — банаховые функциональные пространства).

Постановка задачи синтеза внешнего воздействия

Пусть искомое внешнее воздействие z и заданный отклик математической модели $\tilde{x} \in X$ связаны зависимостью (13).

В дальнейшем будем полагать, что элемент $\tilde{x} \in X$ отличается от вектор-функции x^g, заданной в виде экспериментальной зависимости, на величину δ_1:

$$\left\| x^g - \tilde{x} \right\|_X \le \delta_1 \,, \qquad (13)$$

где x^g есть заданный отклик системы,
δ_1 — const, $\delta_1 > 0$.

Обозначим через Q_{δ_1} множество возможных решений обратной задачи идентификации модели внешнего воздействия (12) при фиксированных операторах A, B:

$$Q_{\delta_1} = \{ z : \left\| Az - B\tilde{x} \right\|_U \le \delta_1 \left\| B \right\| = \delta_0 \} \,.$$

Любая функция z из множества Q_{δ_1} является хорошей моделью внешнего воздействия, так как функция Az совпадает с $B\tilde{x}$ с точностью измерения. Множество Q_{δ_1} является неограниченным при любом δ_1 (некорректная задача), так как оператор A является вполне непрерывным в подавляющем большинстве случаев [4]. Задача нахождения $z \in Q_{\delta_1}$ названа *задачей синтеза модели внешнего воздействия* методом идентификации [1—3]. Для отбора наилучшей модели внешнего воздействия из бесконечного множества различных «хороших» моделей в работах [1—3] предлагается использовать некоторый непрерывный функционал $\Omega[z]$ со специальными свойствами, определенный на Z_1 (Z_1 есть некоторое подмножество Z) [4]. За *решение задачи синтеза модели внешнего воздействия* можно принимать элемент $z_{\delta_1} \in Q_{\delta_1}$, для которого выполняется равенство:

$$\Omega[z_{\delta_1}] = \inf_{z \in Q_{\delta_1} \cap Z_1} \Omega[z] \,. \qquad (14)$$

При этом нет оснований полагать, что функция z_{δ_1} будет близка к реальному (точному) внешнему воздействию z_T.

Решение экстремальной задачи (12) (элемент z_{δ_1}) на множестве Q_{δ_1} существует [4]. Этот элемент устойчив к малым изменениям исходных данных. Решение задачи (12) может быть неединственно. Для целей математического моделирования подходит любое такое решение.

Функцию $z_{\delta_1} \in Q_{\delta_1}$ можно интерпретировать также как наиболее стабильную часть модели внешнего воздействия. Известно из теории информации, что высокочастотная часть сигнала более чувствительна к изменению внешних факторов и параметров. В работе В.Я. Виленкина [5] было показано, что функция z_{δ_1} представляет собой результат фильтрации высокочастотных составляющих. Следовательно, функцию z_{δ_1} можно трактовать как самую устойчивую к изменению неучтенных факторов и параметров составляющую внешнего воздействия, которая вызывает отклик подсистемы, совпадающий с точностью δ_0 с экспериментально измеренным $Bx = u_{\delta_1}$. За решение задачи синтеза модели внешнего воздействия будем принимать *наиболее устойчивый к изменению неучтенных факторов элемент* $z_{\delta_1} \in Q_{\delta_1}$, (решение экстремальной задачи (12)). Указанное свойство является важным с точки зрения дальнейшего использования полученного решения при математическом моделировании физических процессов.

При исследовании конкретных динамических систем структура математического описания, как правило, является фиксированной. Исходя из конструктивных особенностей конкретных систем или устройств, возможно достаточно точно определить параметры математического описания (параметры матриц A, B). Однако эти параметры следует полагать заданными приближенно. Погрешность определения параметров зависит от способа приведения динамических систем к более простым системам [6], от различного рода предположений и допущений [7], от учета тех или иных факторов [6]. Эта погрешность может быть оценена сверху и, как правило, она не превосходит 10%.

При получении конкретной математической модели реального объекта приходиться использовать разнообразные методы упрощения, учета тех или иных сил, степени их влияния на движение системы и т.д. Это приводит к тому, что у разных исследователей получаются различные математические описания (с разными параметрами) реальной системы, даже если структуры математических описаний (моделей) совпадают. Обозначим через $p \in R^n$ вектор параметров математического описания физического процесса. Будем полагать, что вектор параметров математической модели p не определен точно и может принимать значения в некоторой замкнутой области $D \subset R^n$, то есть $p \in D$. Каждому вектору параметров $p \in D$ соответствуют определенные операторы A_p, B_p в уравнении (11) и эти операторы образуют два класса операторов $K_A = \{A_p\}$, $K_B = \{B_p\}$ при изменении p внутри D. Будем полагать для простоты, что все операторы A_p вполне непрерывные, а операторы B_p — линейные и необратимые. Обозначим через h_1 и d_1 величины максимального отклонения операторов A_p из K_A и операторов B_p из K_B, соответственно:

$$\sup_{p_\alpha, p_\beta \in D} \left\| A_{p_\alpha} - A_{p_\beta} \right\|_{Z \to U} \le h_1,$$

$$\sup_{p_\gamma, p_\lambda \in D} \left\| B_{p_\gamma} - B_{p_\lambda} \right\|_{X \to U} \le d_1. \quad (15)$$

Рассмотрим обратную задачу синтеза «хорошей» модели внешнего воздействия для классов операторов (моделей) K_A, K_B [1, 2]. Тогда множество возможных решений с учетом погрешности операторов A_p, B_p расширится до множества:

$$Q_{h_1, d_1, \delta_1} = \{ z : \left\| A_p z - B_p x_\delta \right\|_U \le \delta_1 b_0 + d_1 \|x_\delta\| + h_1 \|z\|_Z \}, \quad (16)$$

где $b_0 = \sup_{p \in D} \left\| B_p \right\|_{X \to U}$.

Любая функция из Q_{h_1, d_1, δ_1} вызывает отклик математической модели, который совпадает с откликом реального объекта с погрешностью, которая учитывает погрешность экспериментальных измерений и погрешность возможного отклонения параметров вектора $p \in D$. Задача нахождения $z \in Q_{h_1, d_1, \delta_1}$ названа по аналогии с предыдущей задачей ***задачей синтеза для класса операторов (моделей)*** [1—3].

Отметим, что в множестве решений обратной задачи синтеза при фиксированном операторе A_p из K_A содержатся элементы с неограниченной нормой (некорректная задача), поэтому величина $h_1 \| z \|_Z$ может быть бесконечно большой. Формально такая ситуация неприемлема, так как она означает, что погрешность математического моделирования равна бесконечности, если в качестве моделей использовать произвольную функцию из Q_{h_1, d_1, δ_1}. Следовательно, не все функции из Q_{h_1, d_1, δ_1} будут являться «хорошими» моделями внешнего воздействия.

Введем в рассмотрение множества $Q_{\varepsilon, p}$:

$$Q_{\varepsilon, p} = \{ z : \left\| A_p z - B_p \tilde{x} \right\|_U \le \varepsilon \left\| B_p \right\| \}. \quad (17)$$

В дальнейшем будем полагать, что величина $\left\| u_{\delta_1} \right\|_U$ превышает величину ε, т.е. $\varepsilon < \left\| u_{\delta_1} \right\|_U$. В противном случае в множество $Q_{\varepsilon, p}$ при любом операторе $A_p \in K_A$, для которого $A_p(0) = 0$, будет входить нулевой элемент пространства Z (функция тождественно равная нулю). Этот случай не представляет практического интереса, так как отклик u_{δ_1} можно получить с тривиальной моделью внешнего воздействия.

Пусть теперь $\delta_1 < \left\| u_{\delta_1} \right\|_U < \varepsilon$. Тогда в $Q_{\varepsilon, p}$ обязательно будет входить нулевой элемент при условии, что $A_p(0) = 0$. Однако, в множество Q_{h_1, d_1, δ_1} нулевой элемент не входит. Иначе из неравенства $\left\| A_p(0) - u_{\delta_1} \right\|_U = \left\| u_{\delta_1} \right\|_U \le \delta_1$ получаем противоречие с неравенством $\delta_1 < \left\| u_{\delta_1} \right\|_U$.

При $\varepsilon < \left\| u_{\delta_1} \right\|_U$ нулевой элемент не входит ни в Q_{h_1, d_1, δ_1}, ни в $Q_{\varepsilon, p}$ для линейных операторов $A_p \in K_A$. В дальнейшем будем считать, что последнее неравенство всегда выполняется.

Таким образом, если учитывать погрешность оператора A_p в неравенстве (5), то необходимо величину ε в общем случае полагать равной бесконечности. Другими словами, неравенство (5) для случая $\delta_1 < \varepsilon$ нельзя обосновать погрешностью оператора A_p.

Поскольку все модели $A_p \in K_A$ и $B_p \in K_B$ можно считать эквивалентными, тогда представляет интерес рассмотреть задачу синтеза единой модели внешнего воздействия для всех описаний (моделей) из K_A и K_B [1, 3]. Постановка задач синтеза адекватного математического описания в случае неточных операторов $A_p \in K_A$, $B_p \in K_B$ может найти применение при математическом моделировании в случаях, когда адекватное математическое описание удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, например, условию минимизации затрат управления. Одним из возможных вариантов постановки такой задачи может быть задача построения *наиболее устойчивого решения* на множестве Q_{h_1,d_1,δ_1}:

$$\Omega[z^0] = \inf_{z \in Q_{h_1,d_1,\delta_1} \cap Z_1} \Omega[z]. \qquad (18)$$

Расчеты ряда практических задач показали, что множество Q_{h_1,d_1,δ_1} является слишком широким множеством, в которое попадает, как правило, тривиальная функция. Для устранения этого недостатка в работах [7, 8] предложен метод специального оператора, который позволяет повысить точность приближенного решения.

Выводы

В работе сформулирована получения адекватного математического описания процессов преобразования измерительного сигнала в ЭС, которые хорошо описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Рассмотрены особенности задачи и предложен метод нахождения устойчивого решения. Впервые сформулирована задача синтеза для класса операторов. Выполнена постановка задачи синтеза внешнего воздействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Меньшиков Ю. Л. Вестник ХГТУ: Херсон, № 2 (15) / Ю. Л. Меньшиков. – Х.: 2002. – 326–329 с.
2. Меньшиков Ю. Л.. Вістник КНУ, / Ю. Л. Меньшиков. – 2-е изд-во К.: Математика, 2004. – 310–315 с.
3. Меньшиков Ю. Л. Идентификация моделей внешних воздействий. / Ю. Л. Меньшиков., Н. В. Поляков. – Д.: Вид-во «Наука та Освіта». – 2009, 188 с.
4. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач. / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин – М.: Наука, 1979. – 287 с.
5. Виленкин С. Я., Автоматика и телемеханика, – 1968, № 2. – 52–55 с.
6. Меньшиков Ю. Л. Сб. Динамика и прочность тяжелых машин / Ю. Л. Меньшиков – 9-е изд-во Д.: Днепропетр. ун-т., 1985. – 89–91 с.
7. Меньшиков Ю. Л., Обратная задача синтеза модели внешнего воздействия Харьков, 9: / Ю. Л. Меньшиков. – Х.: “Вестник нац. технич. ун-та ХПИ”. – Сб. науч. Трудов т. 8, 2002. – 132–136 с.
8. Меньшиков Ю. Л. Proc. of Problems of Decision making under Uncertainties (PDMU–2003)” / Ю. Л. Меньшиков, А. Г. Наконечный. – Int. Conf, September 8–12, – 2003, Kiev–Alushta. Ukraine. 2003. – 80–82 с.

пост. 10.05.2016

О.А. ЖУЛЬКОВСКИЙ, к.т.н., доцент
И.И. ЖУЛЬКОВСКАЯ, к.т.н., доцент
М.В. БАБЕНКО, к.т.н., доцент
Днепродзержинский государственный технический университет, г. Каменское

Особенности математического моделирования процессов комбинированного теплообмена в технологических системах

Представлена методика математического моделирования процессов комбинированного (радиационно-конвективного) теплообмена в технологических системах. Ввиду известной сложности численной реализации задач теплопереноса расчеты сложного теплообмена рекомендуется проводить на основе принципа аддитивности, а при записи конечно-разностной аппроксимации граничных условий целесообразно воспользоваться коэффициентом радиационного теплообмена.

Постановка проблемы

Трудоемкость, материалоемкость и дороговизна лабораторных, полупромышленных и промышленных экспериментов, их ограниченность, многомерность и нелинейность исследуемых процессов и явлений, а также стремительное развитие вычислительной техники и программного обеспечения значительно актуализировало теоретические исследования (математическое моделирование).

Особая роль в разработке и исследовании технологических систем, характеризующихся высокотемпературными условиями протекания процессов (в металлургии, энергетике, машиностроении др.), отводится созданию рациональных математических моделей процессов теплообмена.

Анализ последних исследований

Как известно [1], основой математических моделей указанных процессов является дифференциальное уравнение теплопроводности, связывающее временное и пространственное изменения температуры проектируемого или исследуемого процесса, агрегата, конструкции и т.п.:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \mathrm{div}(\lambda \, \mathrm{grad}\, T) + q_V, \qquad (1)$$

где c — теплоемкость; ρ — плотность; T — температура; τ — время; λ — теплопроводность; q_V — мощность внутренних источников теплоты.

Уравнение (1) может быть использовано для решения конкретных задач теплопроводности, если оно