4. Ганзюк А. Я. Застосування мінеральних адсорбентів у процесах очищення, розділення та кондиціювання газових і рідких середовищ / А. Я. Ганзюк, С. А. Карван, Г. М. Дейчук // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2016. – № 2. – С. 266-269.
5. I. Klymenko Developing of effective treatment technology of the phenolic wastewater / I. Klymenko, D. Yelatontsev, A. Ivanchenko, O. Dupenko, N. Voloshyn // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. — 2016. — Vol. 3, No 10(81). — P. 29-34. doi: 10.15587/1729-4061.2016.72410
6. Ахназарова С. Л. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии: учеб. пособие для хим.-технол. спец. вузов. / С. Л. Ахназарова, В.В. Кафаров. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Высш. шк., 1985. — 327 с.
7. Вуколов Э. А. Основы статистического анализа: практикум по статистическим методам и исследованию операций с использованием пакетов STATISTICA и EXCEL / Э. А. Вуколов. — М. : Форум: ИНФРА-М, 2013. — 463 с.
8. Климова Г. М. Исследование адсорбции поливинилового спирта на монтмориллоните / Г. М. Климова, А. А. Панасевич, Ю. И. Тарасевич // Укр. хим. журн. – 1978. – Вип. 44(4). – С. 386-389.

пост. 14.11.2016

С.Г. ДРОНОВ, к.ф.-м.н., доцент
Дніпродзержинський державний технічний університет, м. Кам'янське

Сплайн-метод наближеного розв'язку диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами

В роботі наведено алгоритм пошуку наближеного розв'язку крайової задачі для звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з розривними коефіцієнтами у вигляді кубічного сплайну по нерівномірній сітці, який асимптотично співпадає з інтерполяційним сплайном від точного розв'язку задачі. Особливістю є те, що алгоритм гарантує існування наближеного розв'язку та можливість управління ним для досягнення потрібної мети.

Розглядається крайова задача для лінійного диференціального рівняння другого порядку

$$y'' + p(x)y'\ \text{y} + q(x)y = f(x), \qquad (1)$$

$$y(a) = A,\ \ y(b) = B. \qquad (2)$$

Відомо, що наближений розв'язок у вигляді кубічного сплайну методом сплайн-колокації або разницевими схемами дає похибку $O(h^2)$, де h — найбільший крок розбиття відрізку [a, b] (див. [1]), причому ця точність досягається як по рівномірній сітці вузлів, так і по нерівномірній.

До достоїнств схем, які будуються на основі кубічних сплайнів, можна відзначити відносну обчислювальну простоту тому, що знаходження коефіцієнтів сплайнів зводиться до розв'язання систем лінійних рівнянь з трьохдіагональними матрицями коефіцієнтів, що дозволяє застосовувати метод звичайної прогонки.

Схеми, які мають похибку $O(h^{\,n})$ (n = 3, 4) для кубічних сплайнів називають схемами підвищенної точності. Питаннями одержання таких схем присвячено багато робот. Наприклад, ці питання розглядалися Мирошниченко В.Л. [3]. Відомі сплайн-колокаційні схеми підвищеної точності, як правило (див. напр. [1], Гл. 10), потребують спеціального вибору вузлів сплайну і вузлів колокації або зводяться до систем, матриці коефіцієнтів яких мають більше трьох діагоналей з ненульовими коефіцієнтами.

Лигуном А.О. та Дроновим С.Г. [4], Дроновим С.Г. [5]—[6] для достатньо гладких коефіцієнтів рівняння (1) було одержано схеми, які дають наближені розв'язки у вигляді кубічних сплайнів асимптотично співпадаючих з інтерполяційними сплайнами від точних розв'язків та які дають максимально можливий порядок точності для цього апарату наближення, причому системи рівнянь для знаходження коефіцієнтів наближених розв'язків зберігали трьохдіагональні структури матриць.

Аналогічні схеми для задачі Коші для диференціального рівняння (1), які дають наближені розв'язки підвищеної точності у вигляді кубічних сплайнів по рівномірній та нерівномірній сіткам вузлів були побудовані Дроновим С.Г. і Худой Ж.В. [7]—[8].

В цьому дослідженні розглядається схема для крайової задачі (1)—(2) з розривними коефіцієнтами, яка дозволяє одержати наближений розв'язок у вигляді кубічного сплайну по майже рівномірному розбиттю і дає максимально можливий порядок точності $O(h^4)$, зберігаючи трьохдіагональність матриць коефіцієнтів.

Позначимо через $L^r_{\infty[a;b]}$, $C^r_{\infty[a;b]}$ $(r = 0;1;2;\ldots)$ множину функцій, визначених на відрізку $[a; b]$, у яких похідна порядку ν $f^{(\nu)}(x)$ $(f^{(0)}(x) = f(x))$ належить відповідному простору $L_{\infty[a;b]}$ або $C_{\infty[a;b]}$.

Нехай ΔN — розбиття відрізку $[a; b]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots.< x_{N\text{-}1} < x_N = b$$

і позначимо $h_i = x_i - x_{i\text{-}1}$ (i = 1; 2; ...; N) такі, що виконуються умови $h_{i+1} = h_i + O(h^2_i)$ і $h = \max h_i$ (i = 1; 2; …; N).

Зрозуміло, що при таких умовах сітка розбиття може дуже сильно відрізнятися від рівномірної і в багатьох питаннях теорії наближення ця умова виконується для асимптотично оптимальних сіток вузлів.

Доповнимо розбиття ΔN вузлами

$x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < a$ і $b < x_{N+1} < x_{N+2} < x_{N+3}.$

Будемо вважати у подальшому $h_{-2} = h_{-1} = h_0 = h_1$; $h_N = h_{N+1} = h_{N+2} = h_{N+3}$ і позначимо $\overline{\Delta}N = \{x_i\}_{i=-3}^{N+3}$.

Функцію $s_3(x)$ назвемо кубічним сплайном мінімального дефекту по розбиттю ΔN, якщо на кожному із інтервалів $(x_i; x_{i+1})$ розбиття ΔN вона співпадає с алгебраїчним многочленом третього степеня, а на всьому відрізку $[a; b]$ $s_3(x) \in C^2_{[a;b]}$. Множину усіх таких сплайнів позначимо через $s_3(\Delta N)$.

Сплайн $s_3(f, x) \in s_3(\Delta N)$ будемо називати інтерполяційним для функції $f(x)$, якщо $s_3(f, x_i) = f(x_i)$ ($i = 0; 1; 2;\ldots; N$) і $s_3''(f; a) = f''(a)$, $s_3''(f; b) = f''(b)$.

Добре відомо (див. [1], С. 96—101; [2], С. 24—25), що для довільної функції $f \in C^3_{[a;b]}$ кубічний інтерполяційний сплайн існує та единий.

Кубічним B-сплайном, нормалізованим базисним B-сплайном, будемо називати (див. [1], С. 18—26; [2], С. 44) сплайн $B_{3,i}(x) \in s_3(\overline{\Delta}_N)$, який визначається для кожного фіксованого $i = -1; 0; 1; 2;\ldots; N; N+1$ умовами

$$B_{3,i}^{(\nu)}(x_{i-2}) = B_{3,i}^{(\nu)}(x_{i+2}) = 0 \quad (\nu = 0;1;2);$$

$$\int_{x_{i-2}}^{x_{i+2}} B_{3,i}(x)dx = 1, \quad B_{3,i}(x) = 0 \quad (x < x_{i-2}; x > x_{i+2}).$$

В силу того, що система функцій $\{B_{3,i}\}_{i=-1}^{N+1}$ утворює базис в $s_3(\Delta_N)$, будь-який сплайн $s_3 \in S_3(\Delta_N)$ записується у вигляді

$$s_3(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} c_i B_{3,i}(x) \qquad (x \in [a;b]).$$

Для $i = -1; 0; 1; 2;\ldots; N; N+1$ и довільної функції $f(x)$ положимо

$$f_i^{(\nu)} = f^{(\nu)}(x_i) \qquad (\nu = 0; 1; 2;\ldots) \qquad (f^{(0)}(x) = f(x)).$$

Припустимо, що коефіцієнти $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ рівняння (1) можуть мати розриви першого роду в точках τ_j ($j = 1; 2;\ldots; k$)

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_k < \tau_{k+1} = b$$

и $\tau_j = x_{N_j}$ ($j = 1; 2;\ldots;k$), де x_{N_j} — вузли розбиття Δ_N, а на інтервалах $(\tau_{j-1}; \tau_j)$ ($j = 1; 2;\ldots; k; k+1$) $q(x)$, $f(x) \in L^4_{\infty[a;b]}$, $p(x) \in L^5_{\infty[a;b]}$.

Введемо вектор $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$, $A_0 = A$, $A_{k+1} = B$. На кожному відрізку $[\tau_{j-1}; \tau_j]$ ($j = 1; 2;\ldots; k; k+1$) розглянемо крайову задачу

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{1}$$

$$y(\tau_{j-1}) = A_{j-1}; \; y(\tau_j) = A_j. \tag{4}$$

Відповідно до ідей роботи [4], будемо розглядати замість рівняння (1) «збурене» рівняння

$$y''(1 + \eta(x)) + (p(x) + \alpha(x))y' + (q(x) + \beta(x))y = f(x) + \theta(x), \tag{3}$$

де $\eta(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\theta(x)$ — цілком конкретні функції, обрані таким чином, щоб ухилення знайденого сплайну від точного розв'язку задачі $y_*(x)$ було мінімальним. Для крайової задачі (3)—(4) розглянемо звичайний метод сплайн-колокації і доведемо, що отримане наближене рішення асимптотично співпадає з інтерполяційним сплайном від точного розв'язку крайової задачі (1)—(2).

Зрозуміло, що на відрізку $[\tau_{j-1}; \tau_j]$ кількість вузлів розбиття Δ_N дорівнює $L_j = N_j - N_{j-1}$ ($j = 1; 2;\ldots; k; k+1$). Точний розв'язок крайової задачі (1)—(2) позначимо через $y*(x)$ і

$$y_i^{(\nu)} = y^{(\nu)}*(x_i) \qquad (\nu = 0; 1; 2;\ldots).$$

Розглянемо систему рівнянь відносно невідомих $c_{i,j}$ ($i = 0; 1; 2;\ldots; L_j$)

$$\begin{cases} \alpha_0 c_{0,j} + \beta_0 c_{1,j} = A_{j-1} + \theta_0; \\ \dfrac{6}{h_i + h_{i-1}}\left[\dfrac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{h_{i+1} + h_i + h_{i-1}} - \dfrac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{h_i + h_{i-1} + h_{i-2}}\right] \times \\ \quad \times\left(1 + \eta_i \dfrac{h_i h_{i-1}}{12}\right) + 3(p_i + \alpha_i) \times \\ \times\left[\lambda_i \dfrac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{h_{i+1} + h_i + h_{i-1}} - \mu_i \dfrac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{h_i + h_{i-1} + h_{i-2}}\right] + \\ + \left(q_i + \beta_i \dfrac{h_i h_{i-1}}{12}\right) c_{i,j} = f_i + \theta_i \dfrac{h_i h_{i-1}}{12} \left(i = \overline{1, L_{j-1}}\right), \\ \alpha_{L_j} c_{L_j,j} + \beta_{L_j} c_{L_{j-1},j} = A_j + \theta_{L_j}. \end{cases} \tag{5}$$

де $\lambda_i = h_{i-1} \cdot (h_i + h_{i-1})^{-1}$; $\mu_i = 1 - \lambda_i$ ($i = 0; 1; 2;\ldots; L_j$);

$$\eta_i = \rho_i^2 - 2\rho_i' + q_i;$$

$$\beta_i = \rho_i \cdot q_i' - q_i'';$$

$$\theta_i = \rho_i \cdot f_i' - f_i'';$$

$$\alpha_i = \frac{h_i \cdot h_{i-1}}{12}(p_i \cdot q_i + p_i \cdot p_i' - p_i'' - 2q_i') - \\ - \frac{h_i - h_{i-1}}{3} \cdot q_i \quad (i = 1; 2;\ldots; L_j - 1);$$

$$\alpha_0 = \left[1 - \frac{p_0(h_0^2 + h_0 \cdot h_1)}{2(h_1 + 2h_0)}\right] \times \\ \times \left(1 + \frac{p_0}{2} \cdot h_0 + \frac{p_0^2}{4} \cdot h_0^2 - \frac{q_0}{6} \cdot h_0^2 - \frac{p_0 \cdot q_0}{4} \cdot h_0^3 + \frac{p_0^3}{8} \cdot h_0^3\right);$$

$$\beta_0 = \left[-\frac{p_0 h_0^2}{2(h_1 + 2h_0)}\right] \cdot \left(1 + \frac{P_0}{2} \cdot h_0 + \frac{p_0^2}{4} \cdot h_0^2 - \frac{q_0}{6} \cdot h_0^2\right);$$

$$\theta_0 = \frac{f_0 \cdot h_0}{6} \cdot (-\alpha_0 \cdot h_0 + \beta_0 \cdot (h_0 + h_1));$$

$$\alpha_{L_j} = \left[1 + \frac{p_{L_j}\left(h_{L_j-1}^2 + h_{L_j-1} \cdot h_{L_j-2}\right)}{2\left(h_{L_j-2} + 2h_{L_j-1}\right)}\right] \times \\ \times \left(1 - \frac{p_{L_j}}{2} \cdot h_{L_j-1} + \left(\frac{p_{L_j}^2}{4} - \frac{q_{L_j}}{6}\right) \cdot h_{L_j-1}^2 + \left(\frac{p_{L_j} q_{L_j}}{6} - \frac{p_{L_j}^3}{8}\right) \cdot h_{L_j-1}^3\right);$$

$$\beta_{L_j} = \frac{p_{L_j} \cdot h_{L_j-1}^2}{2\left(h_{L_j-2} + 2 \cdot h_{L_j-1}\right)} \cdot \left(1 - \frac{p_{L_j}}{2} \cdot h_{L_j-1} + \left(\frac{p_{L_j}^2}{4} - \frac{q_{L_j}}{6}\right) \cdot h_{L_j-1}^2\right);$$

$$\theta_{L_j} = \frac{f_{L_j} \cdot h_{L_j-1}}{6} \cdot \left(-\alpha_{L_j} \cdot h_{L_j-1} + \beta_{L_j} \cdot \left(h_{L_j-1} + h_{L_j-2} \right) \right).$$

Зрозуміло, що матриця системи має трьох діагональну структуру.

Теорема I. Нехай $q(x)$, $f(x) \in L_\infty^4 [\tau_{j-1};\tau_j]$, $p(x) \in L_\infty^5 [\tau_{j-1};\tau_j]$. Тоді $y_* \in L_\infty^6 [\tau_{j-1};\tau_j]$ і якщо $q(x) < q < 0$ $(x \in [\tau_{j-1};\tau_j])$, а числа h_i при $N \to \infty$ задовольняють умовам (рівномірно по i)

$$h_{i+1} = h_i + O\left(h_i^2\right) \qquad (i = 0;\ 1;\ 2;\ldots;\ L_j),$$

$$2\left(1 + \frac{h_i \cdot h_{i-1}}{12} \cdot \eta_i\right) - h_i\left(p_i + \alpha_i\right) \ge 0\ ;$$

$$2\left(1 + \frac{h_i \cdot h_{i-1}}{12} \cdot \eta_i\right) + h_{i-1}\left(p_i + \alpha_i\right) \ge 0\ ;$$

то

$$c_i = y_i + \frac{h_i - h_{i-1}}{3} \cdot y_i' - \frac{h_i h_{i-1}}{6} \cdot y_i'' + O\left(\bar{h}^2\right)$$

$$(i = 0;\ 1;\ 2;\ldots;\ L_j).$$

Зауваження. Можна показати, що замість величин $p_i^{(\nu)}$, $f_i^{(\nu)}$, $f_i^{(\nu)}$ $(\nu = 1;2)$ можна підставляти їх наближені значення, знайдені з точністю $O\left(\bar{h}^2\right)$, і це не змінить результату.

Доведення теореми аналогічно доведенню в [6] (ст. 29—31).

В роботі [9] доведено, що для сплайна

$$\bar{S}_3(f;x) = \sum_{i=-1}^{N+1} b_i B_{3,i}(x),$$

коефіцієнти якого визначаються рівностями

$$b_i = f_i + \frac{h_i - h_{i-1}}{3} \cdot f_i' - \frac{h_i h_{i-1}}{6} \cdot f_i'' \quad (i = 0, 1,\ldots, N),$$

$$b_{-1} = f_0 - h_0 f_0' + \frac{1}{3} f_0'' \cdot h_0^2\ ;$$

$$b_{N+1} = f_N - h_{N-1} f_N' + \frac{1}{3} f_N'' \cdot h_{N-1}^2,$$

для довільної функції $f(x) \in L_{\infty[a;b]}^4$ при $N \to \infty$ виконується нерівність

$$\left\| \bar{S}_3(f) - S_3(f) \right\|_{\infty[a;b]} = O\left(h^{-4}\right),$$

де $S_3(f,x)$ — інтерполяційний сплайн від $f(x)$.

Крім того (див., напр., [1, ст. 115]), для $f(x) \in L_{\infty[a;b]}^4$ при $N \to \infty$

$$\left\| S_3(f) - f \right\|_{\infty[a;b]} = O\left(h^{-4}\right).$$

Із цих фактів та теореми I витікає

Теорема II. Нехай виконані умови теореми I, $c_{i,j}(i = 0;\ 1;\ 2;\ldots;\ L_j)$ — розв'язки системи (5);

$$c_{-1,j} = 6A_{j-1} - c_{0,j}\left(5 - \frac{3h_0}{h_1 + 2h_0}\right) - \frac{3c_{1,j} \cdot h_0}{h_1 + 2h_0}\ ;$$

$$c_{L_j,j} = 6A_j - c_{L_j,j}\left(5 - \frac{3h_{L_j-1}}{h_{L_j-2} + 2h_{L_j-1}}\right) - \frac{3c_{L_j-1} \cdot h_{L_j-1}}{h_{L_j-2} + 2h_{L_j-1}}$$

та $S_{3,j}(x) = \sum_{i=-1}^{L_j+1} c_{i,j} B_{3,i}(x)$. Тоді $\left\| S_{3,j} - y_* \right\|_{\infty[\tau_{j-1};\tau_j]} = O\left(h^{-4}\right)$, де y_* — точний розв'язок крайової задачі (3)—(4).

Зрозуміло, що сплайн $S_3^*(x) = \sum_{i=1}^{k+1} S_{3,i}(x)$ асимптотично співпадає з інтерполяційним сплайном від точного розв'язку крайової задачі (1)—(2), якщо точний розв'язок проходить через точки (τ_j ; A_j) ($j = 1;\ 2;\ldots;\ k$). Але в загальному випадку це не так. Відомо, що крайова задача (1)—(2) з розривними коефіцієнтами може мати нескінченну кількість розв'язків.

Тому вектор (A_1 ,A_2,…, A_k) можна розглядати, як «управління» наближеним розв'язком задачі і змінюванням значень його координат досягати знаходження наближеного розв'язку, який задовольняє потрібним властивостям, наприклад, мінімальної довжини кривої та інше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Завьялов Ю.С., Квасов В.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М., 1980.
2. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. М., 1984.
3. Мирошниченко В.Л. Решение краевой задачи для дифференциального уравнения методом сплайн-функций. Схема повышенной точности.// Изв. АН Каз. ССР. Сер. Физика-Математика. 1973. № 3. С. 37-42.
4. Дронов С.Г., Лигун А.А. Об одном сплайн- методе решения краевой задачи.// УМЖ. !989. Т. 41, № 5. С. 703 – 707.
5. Дронов С.Г. О приближении сплайнами решения краевой задачи.// Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. Днепропетровск: ДГУ. 1987. С. 30-37.
6. Дронов С.Г. Применение сплайнов по неравномерной сетке к приближенному решению краевых задач.// Вопросы оптимальной аппроксимации функций и суммирования рядов. Днепропетровск: ДГУ. 1988. С. 26-32.
7. Дронов С.Г., Худая Ж.В. О сплайн-схеме повышенной точности решения задачи Коши.// Приближение функций и суммирование рядов. Днепропетровск: ДГУ. 1992. С. 29-38.
8. Дронов С.Г., Худая Ж.В. О сплайн-схеме повышенной точности решения задачи Коши для уравнения с разрывными коэффициентами.// Математичне моделювання. Днепродзержиск: ДГТУ. 1994. № 1. С. 17-20.
9. Жанлав Т. О представлении интерполяционных кубических сплайнов через В-сплайны// Методы сплайн-функций. Вычислительные системы. Новосибирск, 1981. Вып. 37.

пост. 16.11.2016