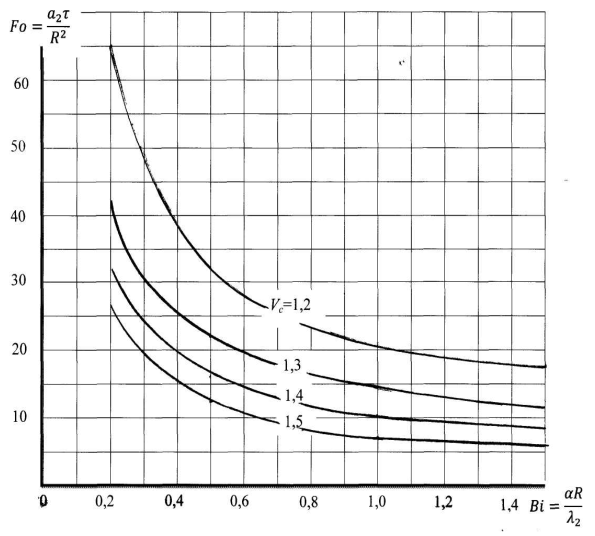

$V_c = t_c / t_p$; t_p — температура диссоциации;

t_c — температура греющей среды.

Рис. 2. Обобщенная зависимость продолжительности обжига плоского куска известняка от условий теплообмена

Для определения длительности обжига известняка неплоской формы необходимо полученное из рис. 2 значение Fo разделить на коэффициент геометрической формы тела K_1 ($K_1 = 1$ — для пластины, $K_1 = 2$ — для цилиндра, $K_1 = 3$ — для шара).

Выводи

Найденные аналитические зависимости, определяющие характер продвижения границы раздела фаз и распределения температуры по сечению нагреваемого куска материала представлены в критериальном виде и достаточно просто реализуются при численных расчетах. Они получены в явной форме, что облегчает проведение анализа теплового состояния обжигаемого куска известняка в печи.

Представленную аналитическую методику можно использовать для выбора рационального режима обжига кускового известняка в печах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монастырев А. В. Производство извести / Монастырев А. В* – М.: Высшая школа, 1975. – 224 с.
2. Лыков А. В. Теория теплопроводности / Лыков А. В – М.: Энергия, 1968. – 472 с.
3. Любов Б. Я., Яловой Н. И. Математический анализ плавления тел / Б. Я. Любов, Н. И. Яловой // Изв. АН СССР. Металлы. – 1970**.** № 2. – С. 152–162.

пост. 18.05.2016

Л.П. ТЕЛІПКО, к.т.н., доцент
Л.М. МАМАЄВ, к.т.н., професор
А.М. КАБАКОВ, к.т.н., доцент
О.Д. РОМАНЮК, к.т.н., доцент
Дніпродзержинський державний технічний університет, Каи'янське

Урахування дисипації енергії при напружено-деформованому стані складених вісесиметричних циліндричних тіл при гармонійному навантаженні

В роботі розглядається визначення напружено-деформованого стану складеного циліндричного тіла в обоймі, що знаходиться в умовах осьової симетрії при гармонійному навантаженні з урахуванням дисипації енергії по гіпотезі Е.С.Сорокіна. Рішення рівнянь Ляме, якими описуються динамічна рівновага складеного циліндра і обойми проводити дискретним методом Л.П. Вінокурова, що дає рішення по радіальній перемінній *r* в кінцево-різністній формі.При врахуванні дисипації енергії по гіпотезі Е.С.Сорокіна виникає необхідність утворення комплексної збуджувальної сили по заданій дійсній силі. Методом розділення перемінних по Фурьє система диференціальних рівнянь в частинних похідних зведена до системи диференціальних рівнянь в звичайних похідних, яка за допомогою підстановок Ейлера зведена до системи алгебраїчних рівнянь. Визначник цієї системи має комплексний частотний параметр, з якого треба виділити дійсну складову частотного параметра. Після визначення корнів характеристичного рівняння і сталих інтегрування з граничних умов , отримаємо рішення диференціальних рівнянь, якими описуються динамічна рівновага складеного циліндра і обойми, в комплексній формі. Оскільки розглядуваний складений циліндр завантажений дійсною гармонійною силою, то рішення диференціальних рівнянь в дійсній формі представиться речовинною частиною комплексного рішення. Отримані вирази показують, що урахуванням дисипації енергії по гіпотезі Е.С.Сорокіна приводить до зсуву фаз між збуджувальним навантаженням та деформаціями складеного циліндра.

Постановка проблеми

При динамічних розрахунках напружено-деформованого стану вузлів багатогабарітного обладнання урахування незворотніх втрат енергії коливань, обумовлених наявністю внутрішнього непружнього опору, має важливе значення, особливо при дослідженні резонансних явищ. У більшості випадків урахування дисипації енергії проводиться по гіпотезі в'язкого тертя Фойгта, відповідно якої сили непружнього опору є лінійною функцією швидкості деформацій. Гіпотеза Фойгта у якості фізичної константи використовує коефіцієнт затухання. Вона зручна в математичному відношенні, але протиречить експериментальним даним. Так по гіпотезі в'язкого тертя коефіцієнт затухання і декремент затухання пропорційні частоті, але в дійсності вони не залежать від частоти коливань. Недоліком цієї гіпотези також є те, що вона не відображає залежності непружнього опору в матеріалі від амплітуди деформації.

Формулювання мети дослідження

На наш погляд, більше відповідає дійсності гіпотеза гістерезисного тертя Е.С.Сорокіна, в якій сили непружнього опору пропорційні переміщенню і у якості фізичної константи використовується коефіцієнт непружнього опору γ. Гіпотеза Е.С.Сорокіна передбачує, що сили непружнього опору пропорційні пружнім, але зсунуті відносно пружнім по фазі на кут $\pi/2$. Відповідно цій гіпотезі, сили внутрішнього опору представляються в комплексній формі

$$S^* = (1+i)S\,, \tag{1}$$

де S^* — сумарна (пружна + непружна) внутрішня сила;

S — пружне зусилля;

$\gamma = \dfrac{\psi}{2\pi}$ — коефіцієнт непружнього опору;

ψ — коефіцієнт поглинання, що залежить від фізичних властивостей матеріалу;

мниме число $i = \sqrt{-1}$ — забезпечує зсув фаз на 90°.

Коефіцієнт γ є функцією амплітуди переміщень, але в більшості випадків можна приймати $\gamma = \mathrm{const}$ для широкого діапазону амплітуд переміщень.

Дослідження напружено-деформованого стану вузлів багатогабарітного обладнання при квазістатичному навантаженні розглянуто в роботі [1]. Аналогічна задача, але при гармонійному навантаженні розглянута в роботі [2]. В даній роботі розглядається задача про напружено-деформований стан вузла, який в розрахунковій схемі може бути представлений у вигляді складеного циліндра (суцільного, або складеного в циліндричній однорідній обоймі) при навантаженні по торцям рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю $q(t) = q_0 \cdot \cos\omega t$ з урахуванням дисипації енергії. Повна висота складеного циліндра і обойми H, зовнішній радіус складеного циліндра R_1, внутрішній (радіус циліндра до торців якого прикладене зовнішнє навантаження) — $\bar{r}$; зовнішній радіус обойми R_2. В циліндричній системі координат r, φ, x переміщення складеного циліндра і обойми мають вертикальну $u(x,r,t)$ і радіальну $w(x,r,t)$ складові (тангенціальна складова $\vartheta = 0$).

Динамічна рівновага складеного циліндра і обойми, що знаходяться в умовах осьової симетрії, описуються рівняннями Ляме, рішення яких, як і в [1,2] будемо проводити дискретним методом [3], що дає рішення по радіальній перемінній r в кінцево-різністній формі.

Об'єм складеного циліндра і обойми апроксимуються призмами шляхом ділення його поздовжньоми перерізами, що проходять через вертикальну вісь x і складають між собою кути θ, і концентричними колами. Переміщення ребер призм приймаються за незалежні невідомі. У випадку осьової симетрії в диференціальних рівняннях дискретного методу будуть утримуватися переміщення на вертикальних лініях-ребрах, розташованих в одній діаметральній площині.

Виклад основного матеріалу

Динамічна рівновага складеного циліндра і обойми при рівномірному кроку ділення радіусу і врахуванні дисипації енергії по гіпотезі Е.С.Сорокіна описуються системою диференціальних рівнянь

$$\left.\begin{aligned}
&(1+i\gamma)\left[\alpha_\mu \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial \xi^2} + 2\beta_\mu \frac{\partial w_1^*}{\partial \xi} + 2(u_1^* - -u_0^*)\right] - \\
&\quad - \frac{qb^2}{E}\rho \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial t^2} = 0, \\
&(1+i\gamma)\left\{ j^2 \frac{\partial^2 w_j^*}{\partial \xi^2} + 2\alpha_\mu j \left[w_{j+1}^*\left(j+\frac{1}{2}\right) + \right.\right. \\
&\quad \left. + w_{j-1}^*\left(j-\frac{1}{2}\right) - w_j^*\left(2j+\frac{1}{j}\right)\right] + \\
&\quad \left. + j^2 \beta_\mu \frac{\partial}{\partial \xi}(u_{j+1}^* - u_{j-1}^*\right\} - \\
&\quad - \frac{2qj^2b^2}{E}\rho \frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2} = 0, \\
&(1+i\gamma)\left\{ 2\alpha_\mu \frac{\partial^2 u_j^*}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2}\left[u_{i+1}^*\left(2+\frac{1}{j}\right) + \right.\right. \\
&\quad \left. + u_{j-1}^*\left(2-\frac{1}{j}\right) - 4u_j^*\right] + 2j\beta_\mu \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{1}{j^2} w_j^* + \right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{1}{2j}(w_{j+1}^* - w_{j-1}^*)\right]\right\} - \frac{2qb^2}{E}\rho \frac{\partial^2 u_j^*}{\partial t^2} = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

де u^* та w^* — комплексні переміщення.

Напруження в точках ребер 0 і j, відповідно представленню комплексного гармонічного напруження по Е.С.Сорокіну $[4]$ в вигляді

$$\sigma^* = E(1+i\gamma)\varepsilon^*\,, \tag{2}$$

визначаються виразами

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_{x_0}^* = \frac{E(1+i\gamma)}{1+\mu}\left(\alpha_\mu \frac{\partial u_0^*}{\partial x} + 2\rho_\mu \frac{w_1^*}{r_1}\right), \\
&\sigma_{r_0}^* = \sigma_{\theta_0}^* = \frac{E(1+i\gamma)}{1+\mu}\left[\frac{\alpha_\mu}{r_1} w_1^* + \right. \\
&\quad \left. + \rho_\mu\left(\frac{1}{r_1} w_1^* + \frac{\partial u_0^*}{\partial x}\right)\right], \\
&\sigma_{x_j}^* = \frac{E(1+i\gamma)}{2(1+\mathrm{\mu})}\left\{\frac{\rho_\mu}{r_j}\left[2w_j^* + \alpha_j(w_{j+1}^* - \right.\right. \\
&\quad \left.\left. - w_{j-1}^*\right] + 2\alpha_\mu \frac{\partial u_j^*}{\partial x}\right\} \\
&\sigma_{r_j}^* = \frac{E(1+i\gamma)}{2(1+\mu)}\left[\frac{2\rho_\mu}{r_j} w_j^* + \frac{\alpha_\mu \alpha_j}{r_j}(w_{j+1}^* - \right. \\
&\quad \left. - w_{j-1}^*) + 2\rho_\mu \frac{\partial u_j^*}{\partial x}\right] \\
&\sigma_{\theta_j}^* = \frac{E(1+i\gamma)}{2(1+\mu)}\left[\frac{2\alpha_\mu}{r_j} w^*{}_j + \frac{\alpha_j \rho_\mu}{r_j}(w_{j+1}^* - \right. \\
&\quad \left. - w_{j-1}^*) + 2\rho_\mu \frac{\partial u_j^*}{\partial x}\right] \\
&\tau^*{}_{rx_j} = \frac{E(1+i\gamma)}{2(1+\mu)}\left[\frac{\alpha_j}{2r_j}(u_{j+1}^* - u_{j-1}^*) + \frac{\partial w_j^*}{\partial x}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Урахування внутрішнього розсіювання енергії при коливаннях по комплексній теорії Є.С.Сорокіна вимагає утворення комплексної збуджувальної сили $F^{*}(t)$ по заданій дійсній збуджувальній силі $F(t)$. У випадку, коли збуджувальна сила змінюється по гармонійному закону $\cos \omega t$ комплексна сила запишеться у вигляді

$$F^{*}(t) = F_0 \cdot e^{i\omega t}, \tag{4}$$

При цьому мнима частина $F^{*}(t)$ має вигляд

$$I_m\left[F^{*}(t)\right] = F_0 \cdot \sin\omega t. \tag{5}$$

В подальшому задану дійсну силу приймемо за речовинну частину комплексної сили (4).

Розв'язок системи (1) диференціальних рівнянь в часткових похідних для випадку усталених коливань, відповідно методу Фурьє, знаходимо в вигляді

$$\begin{aligned} u_0^{*}(\xi,t) &= u_0(\xi)\cdot e^{i\omega t}, \\ u_j^{*}(\xi,t) &= u_j(\xi)\cdot e^{i\omega t}, \\ w_j^{*}(\xi,t) &= w_j(\xi)\cdot e^{i\omega t}, \end{aligned} \tag{6}$$

де $u_0(\xi), u_j(\xi), w_j(\xi)$ — дійсні функції перемінної ξ.

Підстановкою (6) в систему (1) отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_\mu \frac{d^2u_0}{d\xi^2} + 2\beta_\mu \frac{dw_1}{d\xi} + 2(u_1 - u_0) + \\ &\quad + qk_*^2 u_0 = 0, \\ &j^2\frac{d^2w_j}{d\xi^2} 2\alpha_\mu j\left[w_{j+1}\left(j+\frac{1}{2}\right) + w_{j-1}\left(j-\frac{1}{2}\right) - \right. \\ &\left. - w_j\left(2j+\frac{1}{2}\right)\right] + j^2\beta_\mu \frac{d}{d\xi}(u_{j+1} - u_{j-1}) + \\ &\quad + 2qj^2k_*^2 w_j = 0, \\ &2\alpha_\mu \frac{d^2u_j}{d\xi^2} + \frac{1}{2}\left[u_{j+1}\left(2+\frac{1}{j}\right) + u_{j-1}\left(2-\frac{1}{j}\right) - \right. \\ &\left. - 4u_j\right] + +2j\beta_\mu \frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{j^2}w_j + \frac{1}{2j}(w_{j+1} - \right. \\ &\left. - w_{j-1})\right] + 2qk_*^2 u_j = 0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

де

$$k_*^2 = \frac{\rho b^2\omega^2}{(1+i\gamma)E}. \tag{8}$$

Частотний параметр k_*^2 є комплексною величиною.

Інтегрувати цю систему будемо за допомогою виразів

$$\left.\begin{aligned} u_0(\xi) &= A_0 \cdot e^{s\xi}, \\ u_j(\xi) &= A_j \cdot e^{s\xi}, \\ w_j(\xi) &= B_j \cdot e^{s\xi}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Після підстановки (9) в (7) отримаємо систему алгебраїчних рівнянь, визначник якої утримує комплексний частотний параметр k_*^2. Розв'язати цей визначник не є можливим. Тому з виразу (8) треба виділити дійсну складову

$$\mathrm{Re}(k_*^2) = \frac{\rho b^2\omega^2}{(1+\gamma^2)E}. \tag{10}$$

Зміна $\mathrm{Re}(k_*^2)$ при реальних значеннях величин, що входять до нього відбувається в відносно малому діапазоні. Після розкриття визначника системи алгебраїчних рівнянь отримаємо характеристичне рівняння, рішення якого знаходилося на підставі складеної програми SUR-5 на ЕОМ. Так як корні s характеристичного рівняння є функціями параметра k_*^2, то для їх знаходження задавалися чисельні значення параметра k_*^2.

Рішення системи однорідних диференціальних рівнянь (7) запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} u_0^{*}(\xi,t) &= \left(\Sigma D_m^{*} e^{s_m\xi}\right)e^{i\omega t}, \\ u_j^{*}(\xi,t) &= (\Sigma D_m^{*} a_{jm} e^{s_m\xi})e^{i\omega t}, \\ w_j(\xi,t) &= (\Sigma D_m^{*} b_{jm} e^{s_m\xi})e^{i\omega t}. \end{aligned} \tag{11}$$

Вирази напружень (3), відповідно методу Фурьє, запишемо у вигляді

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{ч_0}^{*}(\xi,t) &= (1+i\gamma)\sigma_{x_0}(\xi)e^{i\omega t}, \\ \sigma_{r_0}^{*}(\xi,t) &= \sigma_{\theta_0}^{*}(\xi,t) = \\ &= (1+i\gamma)\sigma_{r_0}(\xi)e^{i\omega t}, \\ \sigma_{xj}(\xi,t) &= (1+i\gamma)\sigma_{xj}(\xi)e^{i\omega t}, \\ \sigma_{rj}(\xi,t) &= (1+i\gamma)\sigma_{rj}(\xi)e^{i\omega t}, \\ \sigma_{\theta j}(\xi,t) &= (1+i\gamma)\sigma_{\theta j}(\xi)e^{i\omega t}, \\ \tau_{rj}(\xi,t) &= (1+i\gamma)\tau_{rj}(\xi)e^{i\omega t}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

де $\sigma_{ч0}, \sigma_{r0}$ та $\sigma_{xj}, \sigma_{rj}, \sigma_{\theta j}, \tau_{rxj}$ визначаються виразами

$$\sigma_{x_0} = \frac{E(}{1+\mu}(\alpha_\mu \frac{\partial u_0}{\partial x} + 2\rho_\mu \frac{w_1}{r_1}),$$

$$\sigma_{r_0} = \sigma_{\theta_0} = \frac{E}{1+\mu}\left[\frac{\alpha_\mu}{r_1}w_1 + \rho_\mu\left(\frac{1}{r_1}w_1 + \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right],$$

$$\sigma_{x_j}^{*} = \frac{E}{2(1+\mu)}\left\{\frac{\rho_\mu}{r_j}\left[2w_j + \alpha_j(w_{j+1} - w_{j-1}\right] + 2\alpha_\mu \frac{\partial u_j}{\partial x}\right\}$$

$$\sigma_{r_j} = \frac{E}{2(1+\mu)}\left[\frac{2\rho_\mu}{r_j}w_j + \frac{\alpha_\mu\alpha_j}{r_j}(w_{j+1} - w_{j-1}\right],$$

$$\sigma_{\theta_j} = \frac{E}{2(1+\mu)}\left[\frac{2\alpha_\mu}{r_j}w_j + \frac{\alpha_j\rho_\mu}{r_j}(w_{j+1} - w_{j-1}) + 2\rho_\mu \frac{\partial u_j}{\partial x}\right],$$

$$\tau_{rx_j} = \frac{E}{2(1+\mu)}\left[\frac{\alpha_j}{2r_j}(u_{j+1} - u_{j-1}) + \frac{\partial w_j}{\partial x}\right].$$

Сталі інтегрування D_m^{*} в виразах (11) визначаються з граничних умов, які після розділення перемінних, мають вид

при $\xi = 0,$ і $\xi = H/b$ $(1+i\gamma)\tau_{rx} = 0,$

$$(1+i\gamma)\sigma_x = \begin{cases} -\dfrac{F}{\pi\bar{r}^2} & \text{при } 0 \le r \le \bar{r} \\ 0 & \text{при } \bar{r} \le r \le R, \end{cases}$$

та з умов рівності переміщень u та w на циліндричних поверхнях контакту складеного циліндру.

З граничних умов та з умов спряження складових складеного циліндра на границях ї контактів випливає система алгебраїчних рівнянь, яка в матричній формі має вид

$$CD^* = \overline{F}, \tag{13}$$

де $C = \{c_{jn}\}$ — матриця коефіцієнтів при невідомих сталих інтегрування D^*;

$$\overline{F} = \left\{ \frac{qb}{E(1+i\gamma)} \frac{F}{\pi \bar{r}^2},\ 0,\ \ 0, ... 0 \right\} \text{ —}$$

матриця стовбець правих частин.

Після рішення системи рівнянь (13) сталі інтегрування визначаються виразами

$$D_m^* = \frac{\overline{D}_m Fb}{E(1+i\gamma)\pi \bar{r}^2},$$

де $\overline{D}_m$ числовий коефіцієнт, який отримується в результаті рішення системи (13).

Представляючи комплексний вираз для D^* в показовій формі та підставляючи його в рішення (11), отримаємо

$$\left. \begin{aligned} u_0^*(\xi,t) &= \left(\frac{Fb}{(1+\gamma^2)^{1/2} E\pi \bar{r}^2} \Sigma \overline{D_m} e^{s_m \xi} \right) e^{i(\omega t + \nu)}, \\ u_j^*(\xi,t) &= \left(\frac{Fb}{(1+\gamma^2)^{1/2} E\pi \bar{r}^2} \Sigma \overline{D_m a_{jm}} e^{s_m \xi} \right) e^{i(\omega t + \nu)}, \\ w_j^*(\xi,t) &= \left(\frac{Fb}{(1+\gamma^2)^{1/2} E\pi \bar{r}^2} \Sigma \overline{D_m b_{jm}} e^{s_m \xi} \right) e^{i(\omega t + \nu)}, \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

де $\nu = \operatorname{arctg}\gamma$.

Так як зовнішня сила $F \cdot \cos \omega t$, яка прикладена до граничних площин, являє собою дійсну частину комплексної сили (4), рішення диференціальних рівнянь (1) в дійсній формі представиться речовинною частиною комплексного рішення (14). Застосовуючи до останнього тотожність Ейлера, запишемо

$$u_0(\xi,t) = \left(\frac{Fb}{(1+\gamma^2)^{1/2} E\pi \bar{r}^2} \Sigma \overline{D}_m e^{s_m \xi} \right) \cdot cos(\omega t + \nu),$$

.

$$u_j(\xi,t) = \left(\frac{Fb}{(1+\gamma^2)^{1/2} E\pi \bar{r}^2} \Sigma \overline{D}_m a_{jm} e^{s_m \xi} \right) \cdot cos(\omega t + \nu),$$

(15)

$$w_j(\xi,t) = \left(\frac{Fb}{(1+\gamma^2)^{1/2} E\pi \bar{r}^2} \Sigma \overline{D}_m b_{jm} e^{s_m \xi} \right) \cdot cos(\omega t + \nu)$$

Висновки та перспективи подальших досліджень

Врахування дисипації енергії, як це випливає з виразів (15), приводить до зсуву фаз між збуджувальним навантаженням и деформаціями складового циліндра. При роботі машин та механізмів можливі резонансні явища в вузлах з'єднання елементів обладнання. Тому в подальших дослідженнях будуть розглянуті вільні коливання складового циліндричного тіла з урахуванням дисипації енергії по гіпотезі Е.С.Сорокіна.

ЛІТЕРАТУРА

1. Телипко Л.П., Манько В.М. Исследование напряженно-деформированного состояния узлов механизмов при диагностировании их технического состояния / Л.П.Телипко, В.М.Манько // Механизация производственных процессов рыбного хозяйства, промышленных и аграрных предприятий. Механика твердого тела: сборник научных трудов Керченского государственного морского технологического университета и Днепродзержинского государственного технического университета. – Керчь-Днепродзержинск: ДГТУ, вып. 11, 2010. – С. 156–159.
2. Телипко Л.П., Манько В.М. Напряженно-деформированное состояние крупногабаритных узлов машин металлургического комплекса // Л.П.Телипко, В.М.Манько // ВІСНИК СевНТУ, збірник наукових праць, випуск 137/2013, серія Механіка,енергетика, екологія. Севастополь – С. 200–203.
3. Винокуров Л.П. Прямые методы решения пространственных и контактных задач для массивов и фундаментов / Л.П. Винокуров. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1956. – 280 с.
4. Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем / Е.С. Сорокин // Госстройиздат, М. 1960. – 36 с.

пост. 14.06.1016