Канонічні перетворення в калібрувальних теоріях

С.Є. САМОХВАЛОВ

Дніпродзержинський державний технічний університет

Наведено перетворення струмів величин, що зберігаються внаслідок калібрувальних симетрій, а також їх суперпотенціалів при канонічних перетвореннях лагранжіанів

Приведены преобразования токов величин, которые сохраняются в результате калибровочных симметрий, а также их суперпотенциалов при канонических преобразованиях лагранжианов.

We give transformations of currents for quantities stored due gauge symmetries and their superpotentials under canonical transformations of Lagrangians

Вступ. В роботі [1] було показано, що всі величини, збереження яких обумовлене калібрувальною інваріантністю, є квазілокальними [2], тобто мають суперпотенціали, і надано алгоритм їх побудови за заданим лагранжіаном і законом калібрувальних перетворень полів. Проте будь який лагранжіан може задаватися з точністю до довільної дивергенції, або поверхневого члену, який не змінює рівняння руху для полів, хоча і впливає на означення величин, що зберігаються та на їх трансформаційні властивості.

Додавання дивергенції до польового лагранжіану аналогічне додаванню повної похідної за часом від твірної функції при канонічному перетворенні в класичній механіці, а тому перетворення, що призводять до додавання дивергенції в польових теоріях, також називатимемо канонічними. Ще одним аргументом на користь застосування терміну «канонічні перетворення» у випадку калібрувальних теорій групи трансляцій є той факт, що внаслідок даної симетрії рівняння руху, в незалежності від конкретного виду лагранжіану і змінних, які використовуються для опису гравітаційного поля, мають вигляд виразу комплексу (або тензору, в залежності від вибраної системи полів) повної енергії-імпульсу через суперпотенціал, і така структура рівняння руху, внаслідок калібрувальної трансляційної інваріантності, зберігається при додаванні до польового лагранжіану дивергенції довільної одноіндексної (навіть не обов'язково векторної) функції.

Ціль даної роботи полягає у знаходженні перетворень для струмів величин, що зберігаються внаслідок калібрувальних симетрій, а також їх суперпотенціалів при канонічних перетвореннях.

Одержані формули узагальнюють процедуру переходу від комплексу енергії-імпульсу і його суперпотенціаплу загальної теорії відносності (ЗТВ) [1] до тензору енергії-імпульсу і суперпотенціалу Мьоллра [3] теорії гравітації в ортогональному репері [4], а також відповідні формули теорії гравітації в афінному репері.

1. Канонічні перетворення лагранжіанів

В даній роботі, за деякими виключеннями, використовуються позначення, прийняті в роботі [1]. Так M — гладкий многовид з координатами x^{μ}, для яких використовуються грецькі індекси середини алфавіту, а $q^{i}(x)$ — система полів з індексами середини латинського алфавіту.

Припустимо, що для полів $q^{i}(x)$ задано дію:

$$S=\int_{\Omega} L d\Omega, \tag{1}$$

де $d\Omega$ — елемент об'єму Ω в просторі M, а L — лагранжіан теорії, який є функцією полів q і їх перших похідних по координатам ∂q. Перейдемо від лагранжіану L до лагранжіану

$$L_{V}=L+\partial_{\sigma}V^{\sigma}, \tag{2}$$

де $\partial_{\sigma}:=\partial/\partial x^{\sigma}$, шляхом додавання до L дивергенції функцій V^{σ}, від яких заздалегідь не вимагатимемо якихось трансформаційних властивостей при перетвореннях координат, але допускаючи їх можливу залежність крім самих полів q, також і від їх перших похідних ∂q, через що лагранжіан L_{V} може залежати вже й від других похідних полів $\partial^{2} q$, які, проте, звертаються в дивергенцію $\partial_{\sigma}V^{\sigma}$, завдяки чому умови екстремальності функціоналів дії для лагранжіанів L і L_{V} (рівняння руху) збігаються. Отже перетворення (2) з довільними функціями V^{σ} є симетрією рівнянь руху полів q^{i}, яку будемо називати ***фазовою симетрією***, самі перетворення (2) (по аналогії з класичною механікою) — ***канонічними перетвореннями***, а функції V^{σ}, які їх параметризують — ***твірними функціями*** канонічних перетворень (2).

Через те, що

$$\int_{\Omega}\partial_{\sigma}V^{\sigma}d\Omega=\oint_{\partial\Omega}V^{\sigma}d\Sigma_{\sigma}, \tag{3}$$

де $d\Sigma_{\sigma}$ — вектор елемента гіперповерхні $\partial\Omega$, що обмежує об'єм Ω, останній (дивергентний) доданок в лагранжіані L_{V} називається ***поверхневим членом***, на відміну від першого доданка L, який називається ***об'ємним членом***.

Прикладом (обернених) канонічних перетворень (2) є перетворення, які виконуються при одержанні усіченого лагранжіану Гілберта [5], а також лагранжіану Мьоллера [3], і зводяться до віднімання певних дивергенцій від скалярної густини кривизни простору-часу eR, де $e:=\sqrt{|g|}$.

Розглянемо повну варіацію дії

$$S_{V}=\int_{\Omega} L_{V} d\Omega \tag{4}$$

для лагранжіану L_V при інфінітезимальних перетвореннях координат і полів

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu}, \tag{5}$$

$$q'^{i}(x) = q^{i}(x) + \delta q^{i}, \tag{6}$$

яку можна представити у вигляді

$$\bar{\delta} S_V = \int_{\Omega} \delta' L_V d\Omega, \tag{7}$$

де

$$\delta' L_V := L'_V(x')J - L_V(x) \tag{8}$$

— інтегральна варіація лагранжіану L_V, причому $L'_V(x')$ є його значенням, підрахованим для змінених полів q' у зміненій точці x', а J є якобіаном переходу (5) від x до x'. Очевидно

$$\delta' L_V = \delta' L + \delta' \partial_{\sigma} V^{\sigma}. \tag{9}$$

Інтегральна варіація об'ємного члену L, внаслідок того, що він залежить від похідних не вище першого порядку від полів, може бути записаною у вигляді:

$$\delta' L = \delta_i L \delta q^i + \partial_{\sigma}(P_i^{\sigma} \delta q^i + L \delta x^{\sigma}), \tag{10}$$

де

$$\delta_i L := Q_i - \partial_{\sigma} P_i^{\sigma},$$

$$Q_i := \frac{\partial L}{\partial q^i}, \quad P_i^{\sigma} := \frac{\partial L}{\partial \partial_{\sigma} q^i}. \tag{11}$$

Для дивергентного доданку $\partial_{\sigma} V^{\sigma}$ лагранжіана L_V маємо:

$$\delta' \partial_{\sigma} V^{\sigma} = \partial_{\sigma} \delta' V^{\sigma}, \tag{12}$$

де інтегральна варіація комплексу V^{σ} набуває вигляду

$$\delta' V^{\sigma} = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\rho}} V'^{\rho}(x')J - V^{\sigma}(x), \tag{13}$$

оскільки, як легко переконатися,

$$\partial_{\sigma}\left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\rho}} J\right) \equiv 0. \tag{14}$$

Для інфінітезимальних перетворень (5), (6)

$$\begin{aligned}\delta' V^{\sigma} = \delta V^{\sigma} - V^{\rho} \partial_{\rho} \delta x^{\sigma} + \\ \partial_{\rho}(V^{\sigma} \delta x^{\rho}),\end{aligned} \tag{15}$$

де δV^{σ} — варіація форми комплексу V^{σ}, яка має місце внаслідок зміни форми полів δq, якими вона визначається, отже

$$\delta V^{\sigma} = \delta_i V^{\sigma} \delta q^i + \partial_{\rho}(\pi_i^{\sigma\rho} \delta q^i), \tag{16}$$

де

$$\delta_i V^{\sigma} := \kappa_i^{\sigma} - \partial_{\rho} \pi_i^{\sigma\rho},$$

$$\kappa_i^{\sigma} := \frac{\partial V^{\sigma}}{\partial q^i}, \quad \pi_i^{\sigma\rho} := \frac{\partial V^{\sigma}}{\partial \partial_{\rho} q^i}. \tag{17}$$

Оскільки при перетвореннях, що розглядаються, вираз $\delta' V^{\sigma}$ стоїть під знаком дивергенції (12), останні доданки в формулах (15) і (16) можна відкинути, отже інтегральна варіація поверхневого члену лагранжіана L_V може бути поданою у вигляді:

$$\delta' \partial_{\sigma} V^{\sigma} = \partial_{\sigma}(\delta_i V^{\sigma} \delta q^i - V^{\rho} \partial_{\rho} \delta x^{\sigma}). \tag{18}$$

2. Канонічні перетворення тотожностей Ньотер

Хай перетворення (5), (6) утворюють калібрувальну групу G_M^g, що параметризується функціями $g^a(x)$ для індексації яких використовуватимемо латинські індекси початку алфавіту, причому

$$\delta x^{\mu} = X_a^{\mu} g^a, \tag{19}$$

$$\delta q^i = \alpha_a^i g^a + \beta_a^{i\mu} \partial_{\mu} g^a, \tag{20}$$

де X_a^{μ}, α_a^i та $\beta_a^{i\mu}$ — функції, які залежать від x і задають інфінітезимальну дію групи G_M^g.

Виразимо інтегральну варіацію об'ємного члену через параметри групи G_M^g, підставляючи вирази (19), (20) у співвідношення (10):

$$\begin{aligned}\delta' L = \delta_i L(\alpha_a^i g^a + \beta_a^{i\mu} \partial_{\mu} g^a) - \\ \partial_{\sigma}(J_a^{\sigma} g^a + B_a^{\mu\sigma} \partial_{\mu} g^a),\end{aligned} \tag{21}$$

де введено позначення [1]:

$$J_a^{\sigma} := -P_i^{\sigma} \alpha_a^i - L X_a^{\sigma} \tag{22}$$

для ***струму***, пов'язаного з параметром g^a, а також

$$B_a^{\mu\sigma} := -P_i^{\sigma} \beta_a^{i\mu} \tag{23}$$

для ***індукції струму*** J_a^{μ}.

При канонічних перетвореннях (2) до варіації об'ємного члену додається варіація поверхневого члену (9), яку ми також виразимо через параметри групи G_M^g, підставивши вирази (19), (20) в формулу (18):

$$\delta' \partial_{\sigma} V^{\sigma} = -\partial_{\sigma}(j_a^{\sigma} g^a + b_a^{\mu\sigma} \partial_{\mu} g^a), \tag{24}$$

де

$$j_a^{\sigma} := -\delta_i V^{\sigma} \alpha_a^i + V^{\mu} \partial_{\mu} X_a^{\sigma}, \tag{25}$$

$$b_a^{\mu\sigma} := -\delta_i V^{\sigma} \beta_a^{i\mu} + V^{\mu} X_a^{\sigma}. \tag{26}$$

Отже для канонічно перетвореного лагранжіану, підсумовуючи (21) з (24), одержуємо:

$$\begin{aligned}\delta' L_V = \delta_i L(\alpha_a^i g^a + \beta_a^{i\mu} \partial_{\mu} g^a) - \\ \partial_{\sigma}(I_a^{\sigma} g^a + S_a^{\mu\sigma} \partial_{\mu} g^a),\end{aligned} \tag{27}$$

де

$$I_a^{\sigma} = J_a^{\sigma} + j_a^{\sigma}, \tag{28}$$

$$S_a^{\mu\sigma} = B_a^{\mu\sigma} + b_a^{\mu\sigma}. \tag{29}$$

Формули (28), (29) задають канонічні перетворення для струмів і індукцій.

Хай дія для лагранжіану L_V інваріантна відносно перетворень групи G_M^g, тобто $\delta' L_V = 0$. У цьому випадку, з врахуванням (27), одержуємо сильні тотожності:

$$\partial_{\sigma} I_a^{\sigma} = \delta_i L \alpha_a^i, \tag{30}$$

$$I_a^{\mu} + \partial_{\sigma} S_a^{\mu\sigma} = \delta_i L \beta_a^{i\mu}, \tag{31}$$

$$S_a^{\mu\sigma} = -S_a^{\mu\sigma}. \tag{32}$$

На екстремалі $\delta_i L = 0$, і з (31) слідує:

$$I_a^{\mu} = -\partial_{\sigma} S_a^{\mu\sigma}, \tag{33}$$

отже, з врахуванням (32), струм I_a^μ виявляється квазілокальним і суперпотенціалом для нього є $S_a^{\mu\sigma}$.

Розглянемо випадок, коли окремо і об'ємний, і поверхневий члени інваріантні відносно перетворень групи G_M^g, тобто одночасно

$$\delta' L = 0\,, \quad \delta' \partial_\sigma V^\sigma = 0\,, \qquad (34)$$

що, безумовно, забезпечує виконання умови G_M^g — інваріантності і всього лагранжіана $\delta' L_V = 0$. В цьому випадку виконуються сильні тотожності:

$$\partial_\sigma j_a^\sigma = 0\,, \qquad (35)$$

$$j_a^\mu + \partial_\sigma b_a^{\mu\sigma} = 0\,, \qquad (36)$$

$$b_a^{\mu\sigma} = -b_a^{\mu\sigma}\,, \qquad (37)$$

що слідують з умови $\delta' \partial_\sigma V^\sigma = 0$, віднімаючи які від відповідних тотожностей (30)—(32) одержуємо сильні тотожності:

$$\partial_\sigma J_a^\sigma = \delta_i L \alpha_a^i\,, \qquad (38)$$

$$J_a^\mu + \partial_\sigma B_a^{\mu\sigma} = \delta_i L \beta_a^{i\mu}\,, \qquad (39)$$

$$B_a^{\mu\sigma} = -B_a^{\mu\sigma}\,, \qquad (40)$$

що відносяться виключно до об'ємного лагранжіана L.

Проте більш цікавою є ситуація, коли окремо ні об'ємний, ні поверхневий члени не демонструють G_M^g — інваріантності, в той час як повний канонічно перетворений лагранжіан є G_M^g — інваріантним. В цьому випадку при G_M^g — перетвореннях об'ємний і поверхневий члени «перетікають» один в інший. В якості прикладу тут можна навести відновлення загальноковаріантності усіченого лагранжіану Гілберта шляхом додавання до нього дивергенції, що доповнює його до скалярної густини кривизни простору-часу, або відновлення локальної лоренц-інваріантності лагранжіану Мьоллера відповідним канонічним перетворенням.

Існують аргументи на користь того, що при переході між неінерційними системами відліку в теорії гравітації відбуваються саме канонічні перетворення енергії-імпульсу гравітаційного поля, що дозволяє з нової точки зору поглянути на принцип еквівалентності і проблему енергії-імпульсу гравітаційного поля.

Висновки

1. Дано означення фазової симетрії польової теорії і канонічних перетворень її лагранжіану, які зберігають рівняння руху теорії.

2. Для калібрувальних теорій поля надано формули канонічних перетворень струмів і їх індукцій.

3. Розглянуто окремий спрощений випадок канонічних перетворень, що зберігають калібрувальну інваріантність теорії, а також наведено приклади важливих канонічних перетворень, які змінюють симетрію лагранжіанів.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Самохвалов С.Є.* Теоретико-групове підґрунтя голографічного принципу // Математичне моделювання. – 2010. - №2(23). – С.7-11.
2. *Szabados Laslo B.* Quasi-Local Energy-Momentum and Angular Momentum in GR: A Review Article. – Living Rev. Relativity. – 2004. – **7**. – P.1-140.
3. *Møller C.* Conservation lows and absolute parallelism in general relativity // Mat. – Fys. Skr. K. Danske Vid Selsk. – 1961. – **1**(10). – P. 1 – 50.
4. *Родичев В.И.* Теория тяготения в ортогональном репере. – М.: Наука, 1974. – 184 с.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. – М.: Наука, 1973. – 504 с.

пост. 18.03.2015