нального технічного університету. – 2014. – №3 (50). – С. 88–92.
7. Кондратець В.О. Математичне моделювання формування потоків рудного живлення кульових млинів при транспортуванні / В.О. Кондратець // Вісник Херсонського національного технічного університету. – 2014. – № 2 (49). – С. 42–50.
8. Ржевский В.В. Основы физики горных пород / В.В. Ржевский, Г.Я. Новик; Изд. 5-е. – М.: Книжный дом «Либроком», 2010. – 360 с.
9. Андреев С.Е. Дробление, измельчение и грохочение полезных ископаемых / Андреев С.Е., Перов В.А., Зверевич В.В. – М.: Недра, 1980. – 415 с.

пост. 11.02.2016

Математична модель динаміки дроту в ковші, що враховує напруження згинання і кручення

К.С. КРАСНІКОВ

Дніпродзержинський державний технічний університет

Статтю присвячено розробці математичної моделі динаміки порошкового дроту в сталерозливному ковші на етапі позапічної обробки металу. На відміну від попередніх моделей враховуються напруження не тільки згинання, але й кручення дроту. Запропоновано вирази для узагальненої на цей випадок потенціальної енергії дроту. З використанням розробленого раніше підходу, який полягає в заміні дроту системою пружно сполучених стрижнів, надано систему рівнянь його руху і запропоновано методи їх чисельного розв'язання.

Статья посвящена разработке математической модели динамики порошковой проволоки в сталеразливочном ковше на стадии внепечной обработки металла. В отличие от предыдущих моделей учитывается напряжение не только изгиба, но и кручения проволоки. Предложено выражения для обобщенной на этот случай потенциальной энергии проволоки. С использованием разработанного раньше подхода, который состоит в замене проволоки системой упруго соединенных стержней, дано систему уравнений ее движения и предложено методы численного решения.

The article is devoted to the development of mathematical model of the dynamics of cored wire in steel ladle during secondary treatment of the metal. Unlike previous models in addition to bending stress the wire`s torsion is taken into account. A generalized for this case expression of wire`s potential energy is proposed. Using the previously developed approach, which is replacing of the wire by system of elastic connected rods, it is given the system of equations of motion and proposed methods of numerical solution.

Введення порошкового дроту у розплав сталі на агрегаті ківш-піч є поширеним у наш час засобом обробки сталі. Під час цього процесу трайб-апарат достатньо міцно тримає дріт і прокручування дроту всередині трайб-апарату не відбувається, що означає появу напруження в ситуаціях, коли рухомий розплав закручує дріт, пересуваючи вільний кінець дроту, який знаходиться у розплаві. Сталева оболонка дроту чинить опір крученню, виникає напруження, яке впливає на рух дроту. Відмінність середньої густини у порошкового дроту та сталі, обмеження руху дроту стінками ковшу – є сприятливими умовами не тільки для кручення дроту, але і для його згинання, яке також має бути враховано.

У роботі [1] наведено модель руху, яка дозволяє приблизно оцінити глибину занурення та траєкторію руху дроту з урахуванням плавлення. Модель враховує Архімедову силу, силу тяжіння та швидкість введення дроту. Модель не враховує сили пружності при згині та крученні дроту, сили гідродинамічного опору з боку розплаву, і є моделлю руху частинки у розплаві (вплив сусідніх ланок не враховано). Але можливість врахувати вищенаведені фізичні явища є, наприклад, за допомогою Лагранжевої механіки [2-4].

Доведемо, що у працях [2], [3] потенційна енергія внутрішньої деформації дроту (системи стрижней) явно залежить від вибору координат, що суперечить принципу відносності Галілея. Візьмемо вектор у напрямку k-го стрижня, компоненти якого виразимо кутами сферичної системи координат ($\sin\theta_k \cos\varphi_k$, $\sin\theta_k \sin\varphi_k$, $\cos\theta_k$) – один і той самий вектор можна визначати нескінченною кількістю наборів кутів θ_k і φ_k, наприклад:

$$\begin{aligned}&\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos 0, \sin\frac{\pi}{6}\sin 0, \cos\frac{\pi}{6}\right) = \\ &= \left(\sin\frac{-\pi}{6}\cos\pi, \sin\frac{-\pi}{6}\sin\pi, \cos\frac{-\pi}{6}\right)\end{aligned} \quad (1)$$

Тобто, якщо кут θ_k змінити з $\pi/6$ на - $\pi/6$, а кут φ_k – з 0 на π, тоді спостерігаючи за k-м стрижнем з будь-якої точки зору ми не побачимо відмінність у його розташуванні у просторі – змінився тільки спосіб визначення розташування стрижня. Відомо, що потенційна енергія системи залежіть тільки від розстановки матеріальних точок, з яких складається система, тому у випадку системи стрижней потенційна енергія не повинна змінюватися при вищенаведеній заміні кутів θ_k і φ_k. Розглянемо в [1] доданок у виразі потенційної енергії (нехтуючи залишковою деформацією), який визначає роботу сил пружності при вигинанні дроту:

$$W = \frac{\kappa_k}{2}\left(\Delta_k\right)^2, \quad (2)$$

де $\Delta^2_k = (\theta_k - \theta_{k-1})^2 + (\varphi_k - \varphi_{k-1})^2\sin^2\theta_k$, κ_k – коефіцієнти пружності в з'єднанні (k – 1)-го та k-го стрижнів. Переставляючи кути для k-го стрижня в (2) так, як наведено в

(1) (приймаючи нульові кути для k-1 стрижня), отримаємо зміну потенційної енергії:

$$\Delta W = \frac{\kappa_k}{2}\left(\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + 0 - \left(\frac{-\pi}{6}\right)^2 - \pi^2 \sin^2\frac{\pi}{6}\right) \neq 0, \quad (3)$$

що і треба було довести. Таким же чином, замінюючи кути у формулі в роботі [4], можна отримати суттєве відхилення потенційної енергії. Для запобігання вищенаведеної помилки, надалі будемо розв'язувати фізичну задачу з використанням векторів у просторі.

Метою дослідження є визначення моментів сил пружності при згинанні та крученні дроту для математичній моделі його руху [3]. Для розв'язку задачі робимо ряд наближень:

1) нехтується кінетична енергія власного обертання дроту через малу кутову швидкість;
2) матеріал дроту має ідеальну пружність і представляє собою однорідну суцільну середу;
3) розглядається сумарний ефект від деформації згинання і кручення, а переміщення точок всередині дроту вважаються малими відносно його діаметру і довжини, при цьому сили напружень пропорційні цим пересуванням точок;
4) сила внутрішнього тертя нехтується.

Як і у роботі [3], дріт представляємо системою стрижнів – ідеальних твердих тіл, з'єднаних у ланцюг. Кожен стрижень є ідеалізацією частини дроту. Позначаємо вісі k-го і (k-1)-го стрижней одиничними векторами $\underline{\tau}_k$ і $\underline{\tau}_{k-1}$ відповідно. Кручення k-го стрижня відобразимо обертанням одиничного вектора $\underline{n}_k$, нормального до $\underline{\tau}_k$, навколо вісі $\underline{\tau}_k$ (рис. 1). Вектор $\underline{n}_k$ можна представити як напрямок, у якому розташоване ребро жорсткості всередині порошкового дроту.

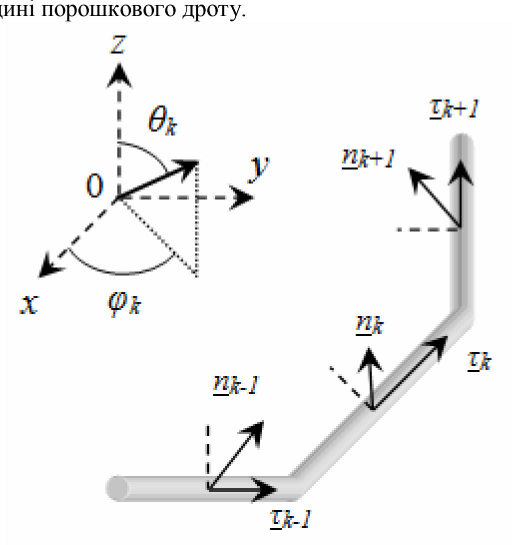

Рис 1. Орієнтація у просторі частин дроту із використанням векторів (кути між стрижнями зазвичай значно менші ніж на малюнку).

Таким чином орієнтація у просторі k-го стрижня визначається двома векторами $\underline{\tau}_k$ і $\underline{n}_k$. Знайдемо потенційну енергію у з'єднанні двох стрижней із використанням векторів $\underline{\tau}_k$, $\underline{n}_k$, $\underline{\tau}_{k-1}$, $\underline{n}_{k-1}$ (рис. 2):

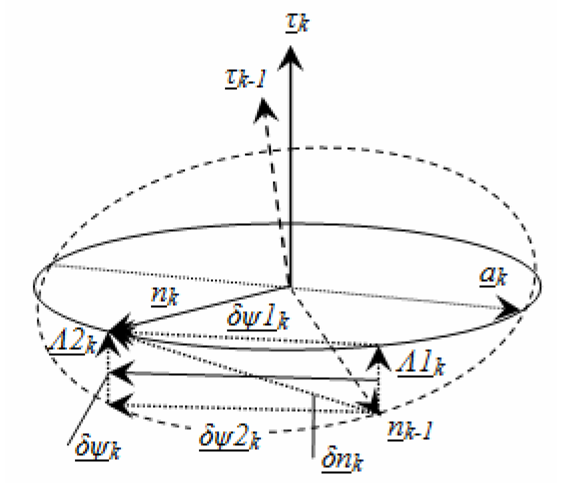

Рис 2. Визначення згинання і кручення у з'єднанні k-го і (k-1)–го стрижней.

Деформацію згинання визначаємо через скалярний добуток одиничних векторів $\underline{\tau}_k$ і $\underline{\tau}_{k-1}$:

$$\cos\Delta_k = \underline{\tau}_k \cdot \underline{\tau}_{k-1}, \quad (4)$$

де Δ_k – кут, який виражає деформацію згину у з'єднанні k-го і (k-1)-го стрижней.

Деформацію кручення визначаємо довжиною вектора $\underline{\delta\psi}_k$, який знайдемо з використанням рис. 2:

$$\underline{\delta\psi}_k = \frac{\underline{\delta\psi 1}_k + \underline{\delta\psi 2}_k}{2}, \quad (5)$$

$$\underline{\delta\psi 1}_k = \underline{\delta n}_k - \underline{\Delta 2}_k, \quad (6)$$

$$\underline{\delta\psi 2}_k = \underline{\delta n}_k - \underline{\Delta 1}_k, \quad (7)$$

$$\underline{\Delta 2}_k = \Delta_k\left(\underline{a}_k \times \underline{n}_k\right), \quad (8)$$

$$\underline{\Delta 1}_k = \Delta_k\left(\underline{a}_k \times \underline{n}_{k-1}\right), \quad (9)$$

$$\underline{\delta\psi}_k = \underline{\delta n}_k - \frac{\Delta}{2}\left(\underline{a}_k \times (\underline{n}_k + \underline{n}_{k-1})\right), \quad (10)$$

При малих крученнях і згинаннях можна використовувати закон Гука для визначення сил напруження у з'єднанні (k-1)-го і k-го стрижней, робота яких приймає вигляд:

$$P_{def} = \sum_k\left(\frac{\kappa_k}{2}\Delta_k^2 + \frac{\chi_k}{2}\delta\psi_k^2\right), \quad (11)$$

$$\Delta_k^2 = 2 - 2(\underline{\tau}_k \cdot \underline{\tau}_{k-1}), \quad (12)$$

$$\begin{aligned}\delta\psi_k^2 = \left\|\underline{\delta\psi}_k\right\|^2 = 2 - 2(\underline{n}_k \cdot \underline{n}_{k-1}) + \\ + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}(\underline{n}_{k-1}\cdot\underline{\tau}_k)^2 + (\underline{n}_k\cdot\underline{\tau}_{k-1})^2 - \\ -2(\underline{\tau}_{k-1}\cdot\underline{\tau}_k)(\underline{n}_{k-1}\cdot\underline{\tau}_k)(\underline{n}_k\cdot\underline{\tau}_{k-1})\end{pmatrix},\end{aligned} \quad (13)$$

де Δ_k^2 знайдено через розкладання функції cos у ряд Тейлора:

$$\cos\Delta_k \approx 1 - \frac{\Delta_k^2}{2!}, \quad \left|\Delta_k\right| < 1, \quad (14)$$

де найбільша відносна помилка складає 8% при куті згину $|\Delta_k| = 1$ рад.

Узагальнені сили потенційного походження $\frac{\partial P_{def}}{\partial q_k^i}$ матимуть вигляд (використовуємо скорочення для похідної по *i*-й узагальненій координаті *k*-го стрижня q_k^i):

$$...' = \frac{\partial ...}{\partial q_k^i},$$

$$\begin{aligned}
P'_{def} = & -\kappa_k\left(\underline{\tau}'_k \cdot \underline{\tau}_{k-1} + \underline{\tau}_k \cdot \underline{\tau}'_{k-1}\right) \\
& -\kappa_{k+1}\left(\underline{\tau}'_k \cdot \underline{\tau}_{k+1} + \underline{\tau}_k \cdot \underline{\tau}'_{k+1}\right) \\
& -\chi_k\left(\underline{n}'_k \cdot \underline{n}_{k-1} + \underline{n}_k \cdot \underline{n}'_{k-1}\right) \\
& +\frac{\chi_k}{4}\begin{bmatrix} (\underline{\tau}'_k \cdot \underline{n}_{k-1} + \underline{\tau}_k \cdot \underline{n}'_{k-1}) \\ +(\underline{n}'_k \cdot \underline{\tau}_{k-1} + \underline{n}_k \cdot \underline{\tau}'_{k-1}) \end{bmatrix} \\
& -\frac{\chi_k}{4}\times \begin{pmatrix} (\underline{\tau}'_k \cdot \underline{\tau}_{k-1} + \underline{\tau}_k \cdot \underline{\tau}'_{k-1})(\underline{\tau}_k \cdot \underline{n}_{k-1})(\underline{n}_k \cdot \underline{\tau}_{k-1}) \\ +(\underline{\tau}_k \cdot \underline{\tau}_{k-1})(\underline{\tau}'_k \cdot \underline{n}_{k-1} + \underline{\tau}_k \cdot \underline{n}'_{k-1})(\underline{n}_k \cdot \underline{\tau}_{k-1}) \\ +(\underline{\tau}_k \cdot \underline{\tau}_{k-1})(\underline{\tau}_k \cdot \underline{n}_{k-1})(\underline{n}'_k \cdot \underline{\tau}_{k-1} + \underline{n}_k \cdot \underline{\tau}'_{k-1}) \end{pmatrix} \\
& -\chi_{k+1}\left(\underline{n}'_k \cdot \underline{n}_{k+1} + \underline{n}_k \cdot \underline{n}'_{k+1}\right) \\
& +\frac{\chi_{k+1}}{4}\begin{bmatrix} (\underline{\tau}'_k \cdot \underline{n}_{k+1} + \underline{\tau}_k \cdot \underline{n}'_{k+1}) \\ +(\underline{n}'_k \cdot \underline{\tau}_{k+1} + \underline{n}_k \cdot \underline{\tau}'_{k+1}) \end{bmatrix} \\
& -\frac{\chi_{k+1}}{4}\times \begin{pmatrix} (\underline{\tau}'_k \cdot \underline{\tau}_{k+1} + \underline{\tau}_k \cdot \underline{\tau}'_{k+1})(\underline{\tau}_k \cdot \underline{n}_{k+1})(\underline{n}_k \cdot \underline{\tau}_{k+1}) \\ +(\underline{\tau}_k \cdot \underline{\tau}_{k+1})(\underline{\tau}'_k \cdot \underline{n}_{k+1} + \underline{\tau}_k \cdot \underline{n}'_{k+1})(\underline{n}_k \cdot \underline{\tau}_{k+1}) \\ +(\underline{\tau}_k \cdot \underline{\tau}_{k+1})(\underline{\tau}_k \cdot \underline{n}_{k+1})(\underline{n}'_k \cdot \underline{\tau}_{k+1} + \underline{n}_k \cdot \underline{\tau}'_{k+1}) \end{pmatrix}
\end{aligned} \quad (15)$$

Використовуючи сферичну систему координат (як у роботі [3]), визначаємо компоненти векторів $\underline{n}_k$ і $\underline{\tau}_k$ через кути θ^n_k, φ^n_k і θ_k, φ_k відповідно:

$$\underline{\tau}_k^x = \sin\theta_k \cos\varphi_k, \quad (16)$$

$$\underline{\tau}_k^y = \sin\theta_k \sin\varphi_k, \quad (17)$$

$$\underline{\tau}_k^z = \cos\theta_k, \quad (18)$$

$$\underline{n}_k^x = \sin\theta_k^n \cos\varphi_k^n, \quad (19)$$

$$\underline{n}_k^y = \sin\theta_k^n \sin\varphi_k^n, \quad (20)$$

$$\underline{n}_k^z = \cos\theta_k^n, \quad (21)$$

При умові ортогональності векторів $\underline{\tau}_k$ і $\underline{n}_k$ кут θ^n_k можна визначити через θ_k, φ_k, φ^n_k:

$$\underline{\tau}_k \cdot \underline{n}_k = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\tau}_k^x \underline{n}_k^x + \underline{\tau}_k^y \underline{n}_k^y + \underline{\tau}_k^z \underline{n}_k^z = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sin\theta_k \cos\varphi_k \sin\theta_k^n \cos\varphi_k^n + \\
&+\sin\theta_k \sin\varphi_k \sin\theta_k^n \sin\varphi_k^n + \\
&+\cos\theta_k \cos\theta_k^n = 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sin\theta_k \sin\theta_k^n \cos(\varphi_k - \varphi_k^n) = -\cos\theta_k \cos\theta_k^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_k^n = \cot^{-1}\left(-\cos(\varphi_k - \varphi_k^n)\tan\theta_k\right), \quad (22)$$

Тоді узагальненими координатами *k*-го стрижня будуть три кути: θ_k, φ_k, ψ_k (ψ_k – подальше позначення кута φ^n_k, який пов'язаний із власним обертанням стрижня через проекцію нормалі $\underline{n}_k$ на площину *z*=0). Перед визначенням моментів сил запишемо (12) (потенційну енергію деформації системи стрижня) у сферичних координатах:

$$\begin{aligned}
P_{def} = & -\sum_k \kappa_k \begin{pmatrix} \sin\theta_k \sin\theta_{k-1} \cos\left(\varphi_k - \varphi_{k-1}\right) \\ +\cos\theta_k \cos\theta_{k-1} - 1 \end{pmatrix} \\
& -\sum_k \chi_k \begin{pmatrix} \sin\theta_k^n \sin\theta_{k-1}^n \cos\left(\psi_k - \psi_{k-1}\right) \\ +\cos\theta_k^n \cos\theta_{k-1}^n - 1 \end{pmatrix} \\
& +\sum_k \frac{\chi_k}{8} \begin{bmatrix} \left(\sin\theta_{k-1}^n \sin\theta_k \cos\left(\psi_{k-1} - \varphi_k\right) + \cos\theta_{k-1}^n \cos\theta_k\right)^2 \\ +\left(\sin\theta_k^n \sin\theta_{k-1} \cos\left(\psi_k - \varphi_{k-1}\right) + \cos\theta_k^n \cos\theta_{k-1}\right)^2 \end{bmatrix} \\
& -\sum_k \frac{\chi_k}{4} \begin{bmatrix} \left(\sin\theta_{k-1} \sin\theta_k \cos\left(\varphi_{k-1} - \varphi_k\right) + \cos\theta_{k-1} \cos\theta_k\right) \\ \times\left(\sin\theta_{k-1}^n \sin\theta_k \cos\left(\psi_{k-1} - \varphi_k\right) + \cos\theta_{k-1}^n \cos\theta_k\right) \\ \times\left(\sin\theta_k^n \sin\theta_{k-1} \cos\left(\psi_k - \varphi_{k-1}\right) + \cos\theta_k^n \cos\theta_{k-1}\right) \end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (23)$$

Під час диференціювання P_{def} (11) по кутам θ_k, φ_k, ψ_k отримаємо вирази узагальнених сил:

$$\begin{aligned}
Q_k^\theta = & Q1_k^\theta(\theta_{k-1}, \theta_k, \varphi_{k-1}, \varphi_k, \psi_{k-1}, \psi_k) + \\
& Q2_k^\theta(\theta_k, \theta_{k+1}, \varphi_k, \varphi_{k+1}, \psi_k, \psi_{k+1})
\end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
\frac{P_{def}}{\partial\varphi_k} = Q_k^\varphi = & Q1_k^\varphi(\theta_{k-1}, \theta_k, \varphi_{k-1}, \varphi_k, \psi_{k-1}, \psi_k) + \\
& Q2_k^\varphi(\theta_k, \theta_{k+1}, \varphi_k, \varphi_{k+1}, \psi_k, \psi_{k+1})
\end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
\frac{P_{def}}{\partial\psi_k} = Q_k^\psi = & Q1_k^\psi(\theta_{k-1}, \theta_k, \varphi_{k-1}, \varphi_k, \psi_{k-1}, \psi_k) + \\
& Q2_k^\psi(\theta_k, \theta_{k+1}, \varphi_k, \varphi_{k+1}, \psi_k, \psi_{k+1})
\end{aligned} \quad (26)$$

де доданки $Q1_k$ і $Q2_{k+1}$ відповідають зв'язкам *k*-го стрижня із двома сусідніми (моменти сил залежать тільки від просторової орієнтації стрижня і його сусідів). Із використанням тригонометричних тотожностей ці доданки мають вигляд (додатково введемо скорочення):

$$c(...) = \cos(...),\ s(...) = \sin(...),$$
$$t_k = \tan(\theta_k), c_k = \cos(\theta_k), s_k = \sin(\theta_k), \qquad (27)$$
$$a_k = \sqrt{1 + c^2(\varphi_k - \psi_k) t_k^2},$$
$$b_k = \left(1 + c^2(\varphi_k - \psi_k) t_k^2\right)^{1.5}, \qquad (28)$$

$$Q1_k^{\theta} = \kappa_k\left(-c_k s_{k-1} c(\varphi_k - \varphi_{k-1}) + s_k c_{k-1}\right) +$$
$$+\chi_k \times \frac{\left(t_{k-1}\left(1 + t_{k-1}^2\right) c^2(\varphi_{k-1} - \psi_{k-1})\right)}{a_k b_{k-1}}$$
$$\times \frac{\left(c(\psi_k - \psi_{k-1}) + c(\varphi_k - \psi_k) t_k c(\varphi_{k-1} - \psi_{k-1}) t_{k-1}\right)}{a_k b_{k-1}}$$

$$+\frac{\chi_k}{4} \times \left(\frac{s_k c(\psi_{k-1} - \varphi_k) - c(\varphi_{k-1} - \psi_{k-1}) t_{k-1} c_k}{a_{k-1}}\right)$$
$$\times \left[-\frac{c_k c(\varphi_{k-1} - \psi_{k-1})(1 + t^2\theta_{k-1})}{a_{k-1}} - \frac{s_k c(\psi_{k-1} - \varphi_k) c^2(\varphi_{k-1} - \psi_{k-1}) t_{k-1}(1 + t_{k-1}^2)}{b_{k-1}} + \frac{c_k c^3(\varphi_{k-1} - \psi_{k-1}) t_{k-1}^2 (1 + t_{k-1}^2)}{b_{k-1}} \right]$$
$$+\frac{\chi_k}{4} \times \left(\frac{s_{k-1} c(\psi_k - \varphi_{k-1}) - c(\varphi_k - \psi_{k-1}) t_k c_{k-1}}{a_k}\right)$$
$$\times \left(\frac{c_{k-1} c(\psi_k - \varphi_{k-1}) + c(\varphi_k - \psi_{k-1}) t_k s_{k-1}}{a_k}\right)$$
$$-\frac{\chi_k}{2}\left(s_{k-1} s_k c(\varphi_{k-1} - \varphi_k) + c_{k-1} c_k\right)$$
$$\times \left(-\frac{s_k c(\psi_{k-1} - \varphi_k) c^2(\varphi_{k-1} - \psi_{k-1}) t_{k-1}(1 + t_{k-1}^2)}{b_{k-1}} + \frac{c_k c(\varphi_{k-1} - \psi_{k-1})(1 + t_{k-1}^2)}{a_{k-1}} + \frac{c_k c^3(\varphi_{k-1} - \psi_{k-1}) t_{k-1}^2 (1 + t_{k-1}^2)}{b_{k-1}} \right)$$
$$\times \left[\frac{s_{k-1} c(\psi_k - \varphi_{k-1}) - c(\varphi_k - \psi_{k-1}) t_k c_{k-1}}{a_k}\right] -$$
$$-\frac{\chi_k}{2}\left(s_{k-1} s_k c(\varphi_{k-1} - \varphi_k) + c_{k-1} c_k\right)$$
$$\times \left(\frac{s_k c(\psi_{k-1} - \varphi_k) - c(\varphi_{k-1} - \psi_{k-1}) t_{k-1} c_k}{a_{k-1}}\right) \qquad (29)$$
$$\times \left(\frac{c_{k-1} c(\psi_k - \varphi_{k-1}) + c(\varphi_k - \psi_k) t_k s_{k-1}}{a_k}\right)$$

$$Q2_k^{\theta} = \kappa_{k+1}\left(\begin{matrix}-s_{k+1} c_k c(\varphi_{k+1} - \varphi_k) + \\ c_{k+1} s_k\end{matrix}\right) +$$
$$+\chi_{k+1} \frac{\left(t_k\left(1 + t_k^2\right) c^2(\varphi_k - \psi_k)\right)}{a_{k+1} b_k}$$
$$\times \frac{\left(c(\psi_{k+1} - \psi_k) + c(\varphi_{k+1} - \psi_{k+1}) t_{k+1} c(\varphi_k - \psi_k) t_k\right)}{a_{k+1} b_k}$$
$$-\chi_{k+1} \frac{c(\varphi_{k+1} - \psi_{k+1}) t_{k+1} c(\varphi_k - \psi_k)\left(1 + t_k^2\right)}{a_{k+1} a_k}$$
$$+\frac{\chi_{k+1}}{4}\left(\frac{s_{k+1} c(\psi_k - \varphi_{k+1}) - c(\varphi_k - \psi_k) t_k c_{k+1}}{a_k}\right)$$
$$\times \left[-\frac{c_{k+1} c(\varphi_k - \psi_k)(1 + t_k^2)}{a_k} - \frac{s_{k+1} c(\psi_k - \varphi_{k+1}) c^2(\varphi_k - \psi_k) t_k (1 + t_k^2)}{b_k} + \frac{c_{k+1} c^3(\varphi_k - \psi_k) t_k^2 (1 + t_k^2)}{b_k} \right]$$
$$+\frac{\chi_{k+1}}{4}\left(\frac{s_k c(\psi_{k+1} - \varphi_k) - c(\varphi_{k+1} - \psi_{k+1}) t_{k+1} c_k}{a_{k+1}}\right)$$
$$\times \left(\frac{c_k c(\psi_{k+1} - \varphi_k) + c(\varphi_{k+1} - \psi_{k+1}) t_{k+1} s_k}{a_{k+1}}\right)$$
$$-\frac{\chi_{k+1}}{4}\left(c_k s_{k+1} c(\varphi_k - \varphi_{k+1}) - s_k c_{k+1}\right)$$
$$\times \left(\frac{s_{k+1} c(\psi_k - \varphi_{k+1}) - c(\varphi_k - \psi_k) t_k c_{k+1}}{a_k}\right)$$
$$\times \left(\frac{s_k c(\psi_{k+1} - \varphi_k) + c(\varphi_{k+1} - \psi_{k+1}) t_{k+1} c_k}{a_{k+1}}\right)$$
$$-\frac{\chi_{k+1}}{4}\left(s_k s_{k+1} c(\varphi_k - \varphi_{k+1}) + c_k c_{k+1}\right)$$
$$\times \left(-\frac{s_{k+1} c(\psi_k - \varphi_{k+1}) c^2(\varphi_k - \psi_k) t_k (1 + t_k^2)}{b_k} + \frac{c_{k+1} c(\varphi_k - \psi_k)(1 + t_k^2)}{a_k} + \frac{c_{k+1} c^3(\varphi_k - \psi_k) t_k^2 (1 + t_k^2)}{b_k} \right)$$
$$\times \left[\frac{s_k c(\psi_{k+1} - \varphi_k) - c(\varphi_{k+1} - \psi_k) t_{k+1} c_k}{a_{k+1}}\right]$$
$$-\frac{\chi_{k+1}}{4}\left(s_k s_{k+1} c(\varphi_k - \varphi_{k+1}) + c_k c_{k+1}\right) \times$$

$$\times\left(\frac{s_{k+1}c(\psi_k-\varphi_{k+1})-c(\varphi_k-\psi_k)t_k c_{k+1}}{a_k}\right)$$

$$\times\left(\frac{c_k c(\psi_{k+1}-\varphi_k)+c(\varphi_{k+1}-\psi_{k+1})t_{k+1}s_k}{a_{k+1}}\right) \qquad (30)$$

$$Q1_k^{\varphi}=\kappa_k\left(s_k s_{k-1}s(\varphi_k-\varphi_{k-1})\right)$$

$$-\chi_k$$

$$\times\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\frac{c(\psi_k-\psi_{k-1})s(2\varphi_k-2\psi_k)t_k^2(1+t_{k-1}^2)}{b_k a_{k-1}} \\ -\frac{s(\varphi_k-\psi_k)t_k c(\varphi_{k-1}-\psi_{k-1})t_{k-1}}{a_k a_{k-1}} \\ +\frac{c^2(\varphi_k-\psi_k)t_k^3 c(\varphi_{k-1}-\psi_{k-1})t_{k-1}s(\varphi_k-\psi_k)}{b_k a_{k-1}}\end{array}\right]$$

$$-\frac{\chi_k}{4}$$

$$\times\left[\begin{array}{l}\frac{s_k c(\psi_{k-1}-\varphi_k)-c(\varphi_{k-1}-\psi_{k-1})t_{k-1}c_k}{a_{k-1}}\\ \times\frac{s_k s(-\psi_{k-1}+\varphi_k)}{a_{k-1}}\end{array}\right]$$

$$+\frac{\chi_k}{4}\left(\frac{s_{k-1}c(\psi_k-\varphi_{k-1})-c(\varphi_k-\psi_k)t_k c_{k-1}}{a_k}\right)$$

$$\times\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\frac{s_{k-1}c(\psi_k-\varphi_{k-1})s(2\varphi_k-2\psi_k)t_k^2}{b_k}\\ +\frac{s(\varphi_k-\psi_k)t_k c_{k-1}}{a_k}\\ -\frac{c^2(\varphi_k-\psi_k)t_k^3 c_{k-1}s(\varphi_k-\psi_k)}{b_k}\end{array}\right]$$

$$+\frac{\chi_k}{4}s_{k-1}s_k s(\varphi_k-\varphi_{k-1})$$

$$\times\left(\frac{s_k c(\psi_{k-1}-\varphi_k)-c(\varphi_{k-1}-\psi_{k-1})t_{k-1}c_k}{a_{k-1}}\right)$$

$$\times\left(\frac{s_{k-1}c(\psi_k-\varphi_{k-1})+c(\varphi_k-\psi_k)t_k c_{k-1}}{a_k}\right)$$

$$+\frac{\chi_k}{4}\frac{1}{a_{k-1}}\left(s_{k-1}s_k c(\varphi_k-\varphi_{k-1})+c_k c_{k-1}\right)$$

$$\times s_k s(\varphi_k-\psi_{k-1})$$

$$\times\left(\frac{s_{k-1}c(\psi_k-\varphi_{k-1})-c(\varphi_k-\psi_k)t_k c_{k-1}}{a_k}\right)$$

$$-\frac{\chi_k}{4}\left(s_{k-1}s_k c(\varphi_k-\varphi_{k-1})+c_k c_{k-1}\right)$$

$$\times\left(\frac{s_k c(\psi_{k-1}-\varphi_k)-c(\varphi_{k-1}-\psi_{k-1})t_{k-1}c_k}{a_k}\right)$$

$$\times\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\frac{s_{k-1}c(\psi_k-\varphi_{k-1})s(2\varphi_k-2\psi_k)t_k^2}{b_k}\\ +\frac{s(\varphi_k-\psi_k)t_k c_{k-1}}{a_k}\\ -\frac{c^2(\varphi_k-\psi_k)t_k^3 c_{k-1}s(\varphi_k-\psi_k)}{b_k}\end{array}\right] \qquad (31)$$

$$Q2_k^{\varphi}=\kappa_{k+1}\left(s_{k+1}s_k s(\varphi_{k+1}-\varphi_k)\right)$$

$$-\chi_{k+1}\times$$

$$\times\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\frac{c(\psi_{k+1}-\psi_k)s(2\varphi_k-2\psi_k)t_k^2}{b_k a_{k+1}} \\ +\frac{c(\varphi_{k+1}-\psi_{k+1})t_{k+1}c(\varphi_k-\psi_k)t_k}{a_{k+1}a_k} \\ -\frac{c^2(\varphi_k-\psi_k)t_k^3 c(\varphi_{k+1}-\psi_{k+1})t_{k+1}s(\varphi_k-\psi_k)}{b_k a_{k+1}}\end{array}\right]$$

$$+\frac{\chi_{k+1}}{4}\left(\frac{s_{k+1}c(\psi_k-\varphi_{k+1})-c(\varphi_k-\psi_k)t_k c_{k+1}}{a_k}\right)$$

$$\times\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\frac{s_{k+1}c(\psi_k-\varphi_{k+1})s(2\varphi_k-2\psi_k)t_k^2}{b_k}\\ +\frac{s(\varphi_k-\psi_k)t_k c_{k+1}}{a_k}\\ -\frac{c^2(\varphi_k-\psi_k)t_k^3 c_{k+1}s(\varphi_k-\psi_k)}{b_k}\end{array}\right]$$

$$-\frac{\chi_{k+1}}{4}$$

$$\times\left[\begin{array}{l}\frac{s_k c(\psi_{k+1}-\varphi_k)-c(\varphi_{k+1}-\psi_{k+1})t_{k+1}c_k}{a_{k+1}}\\ \times\frac{s_k s(-\psi_{k+1}+\varphi_k)}{a_{k+1}}\end{array}\right]$$

$$-\frac{\chi_{k+1}}{4}s_{k+1}s_k s(\varphi_k-\varphi_{k+1})$$

$$\times\left(\frac{s_k c(\psi_{k+1}-\varphi_k)-c(\varphi_{k+1}-\psi_{k+1})t_{k+1}c_k}{a_k}\right)$$

$$\times\left(\frac{s_k c(\varphi_{k+1}-\psi_k)-c(\varphi_{k+1}-\psi_{k+1})t_{k+1}c_k}{a_{k+1}}\right)$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{\chi_{k+1}}{4}\left(s_{k+1}s_k c(\varphi_k-\varphi_{k+1})+c_k c_{k+1}\right)\\
&\times\left(\frac{s_k c(\psi_{k+1}-\varphi_k)-c(\varphi_{k+1}-\psi_{k+1})t_{k+1}c_k}{a_k}\right)\\
&\times\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}\dfrac{s_{k+1}c(\psi_k-\varphi_{k+1})s(2\varphi_k-2\psi_k)t_k^2}{b_k}\\ +\dfrac{s(\varphi_k-\psi_k)t_k c_{k+1}}{a_k}\\ -\dfrac{c^2(\varphi_k-\psi_k)t_k^3 c_{k+1}s(\varphi_k-\psi_k)}{b_k}\end{array}\right]\\
&+\frac{\chi_{k+1}}{4}\frac{1}{a_{k+1}}\left(s_{k+1}s_k c(\varphi_k-\varphi_{k+1})+c_k c_{k+1}\right)\\
&\times s_k s(\varphi_k-\psi_{k+1})\\
&\times\frac{s_{k+1}c(\psi_k-\varphi_{k+1})-c(\varphi_k-\psi_k)t_k c_{k+1}}{a_k}
\end{aligned}\tag{32}$$

$$\begin{aligned}
&Q1_k^{\psi}=\frac{\chi_k}{2}\\
&\times\left[\begin{array}{l}\dfrac{c(\psi_k-\psi_{k-1})t_k^2 s(2\varphi_k-2\psi_k)}{b_k a_{k-1}}+\dfrac{2s(\psi_k-\psi_{k-1})}{a_k a_{k-1}}\\ -\dfrac{2s(\varphi_k-\psi_k)t_k c(\varphi_{k-1}-\psi_{k-1})t_{k-1}}{a_k a_{k-1}}\\ +\dfrac{2c^2(\varphi_k-\psi_k)t_k^3 s(\varphi_k-\psi_k)c(\varphi_{k-1}-\psi_{k-1})t_{k-1}}{b_k a_{k-1}}\end{array}\right]\\
&+\frac{\chi_k}{4}\left(\frac{s_{k-1}c(\psi_k-\varphi_{k-1})-c(\varphi_k-\psi_k)t_k c_{k-1}}{a_k}\right)\\
&\times\left(\begin{array}{l}-\dfrac{s_{k-1}c(\psi_k-\varphi_{k-1})t_k^2 s(2\varphi_k-2\psi_k)}{2a_k}\\ -\dfrac{s_{k-1}s(\psi_k-\varphi_{k-1})s(\varphi_k-\psi_k)t_k c_{k-1}}{a_k}\\ +\dfrac{s(\varphi_k-\psi_k)t_k^2 c(\varphi_k-\psi_k)}{b_k}\\ \times(c(\varphi_k-\psi_k)t_k c_{k-1}-s(\psi_k)s_{k-1}s(\varphi_{k-1}))\end{array}\right)\\
&-\frac{\chi_k}{4}\left(s_{k-1}s_k c(\varphi_{k-1}-\varphi_k)+c_{k-1}c_k\right)\\
&\times\left(\frac{s_k c(\varphi_{k-1}^n-\varphi_k)-c(\varphi_{k-1}-\varphi_{k-1}^n)t_{k-1}c_k}{a_{k-1}}\right)\\
&\times\left[\begin{array}{l}-\dfrac{s_{k-1}s(\varphi_k^n-\varphi_{k-1})+s(\varphi_k-\varphi_k^n)t_k c_{k-1}}{a_k}\\ +\dfrac{c(\varphi_k-\varphi_k^n)t_k^2 s(\varphi_k-\varphi_k^n)}{b_k}\\ \times(c(\varphi_k-\varphi_k^n)t_k c_{k-1}-s_{k-1}c(\varphi_k^n-\varphi_{k-1}))\end{array}\right]
\end{aligned}\tag{33}$$

$$\begin{aligned}
&Q2_k^{\psi}=\chi_{k+1}\\
&\times\left[\begin{array}{l}\dfrac{c(\psi_k-\psi_{k+1})t_k^2 s(2\varphi_k-2\psi_k)}{b_k a_{k+1}}-\dfrac{2s(\psi_{k+1}-\psi_k)}{a_k a_{k+1}}\\ -\dfrac{s(\varphi_k-\psi_k)t_k c(\varphi_{k+1}-\psi_{k+1})t_{k+1}}{a_k a_{k+1}}\\ +\dfrac{c^2(\varphi_k-\psi_k)t_k^3 s(\varphi_k-\psi_k)c(\varphi_{k+1}-\psi_{k+1})t_{k+1}}{b_k a_{k+1}}\end{array}\right]\\
&+\frac{\chi_{k+1}}{4}\left(\frac{s_{k+1}c(\psi_k-\varphi_{k+1})-c(\varphi_k-\psi_k)t_k c_{k+1}}{a_k}\right)\\
&\times\left(\begin{array}{l}-\dfrac{s_{k+1}c(\psi_k-\varphi_{k+1})t_k^2 s(2\varphi_k-2\psi_k)}{2b_k}\\ +\dfrac{s_{k+1}s(-\psi_k+\varphi_{k+1})-s(\varphi_k-\psi_k)t_k c_{k+1}}{a_k}\\ +\dfrac{c^2(\psi_k-\varphi_k)t_k^3 c_{k+1}s(\varphi_k-\psi_k)}{b_k}\end{array}\right)\\
&-\frac{\chi_{k+1}}{4}\left(s_{k+1}s_k c(\varphi_{k+1}-\varphi_k)+c_{k+1}c_k\right)\\
&\times\left(\frac{s_k c(\psi_{k+1}-\varphi_k)-c(\varphi_{k+1}-\psi_{k+1})t_{k+1}c_k}{a_{k+1}}\right)\\
&\times\left[\begin{array}{l}-\dfrac{s_{k+1}c(\psi_k-\varphi_{k+1})t_k^2 s(2\varphi_k-2\psi_k)}{2b_k}\\ +\dfrac{s_{k+1}s(-\psi_k+\varphi_{k+1})-s(\varphi_k-\psi_k)t_k c_{k+1}}{a_k}\\ +\dfrac{c^2(\psi_k-\varphi_k)t_k^3 c_{k+1}s(\varphi_k-\psi_k)}{b_k}\end{array}\right]
\end{aligned}\tag{34}$$

Визначені моменти сил додамо у рівняння Лагранжа другого роду в роботі [3]. Звернемо увагу на рівняння для кута ψ_k, які (на відміну від рівнянь для кутів θ_k, φ_k) не містять доданків кінетичного походження і мають вигляд третього закону Ньютона:

$$\begin{aligned}&Q_k^{\psi}=0\Rightarrow\\ &\Rightarrow\chi_k Q1_k^{\psi}=-\chi_{k+1}Q2_k^{\psi},\end{aligned}\tag{35}$$

де коефіцієнти пружності на кручення χ_k можна видалити, якщо вони однакові для всіх ланок системи. Отримано систему нелінійних рівнянь (35), для розв’язку якої спочатку використовувався спрощений метод Ньютона:

$$\underline{\psi}^{(i+1)} = \underline{\psi}^{(i)} - J^{-1}(\underline{\psi}^{(0)}) \cdot \underline{Q}^{\psi}(\underline{\psi}^{(i)}), \quad i = 0,1,2,... \quad (36)$$

де $\underline{\psi}$ – вектор невідомих кутів ψ, J – матриця Якобі, $\underline{Q}^{\psi}$ – вектор узагальнених сил, i – номер ітерації. Цей метод має перевагу швидкої збіжності, але при умові достатньо близького до розв'язку вектора $\underline{\psi}$ і для отриманої системи (35) розбігається при недостатньо малому кроці за часом.

Остаточно система (35) розв'язується методом простих ітерацій:

$$\underline{\psi}^{(i+1)} = \underline{\psi}^{(i)} - u\underline{Q}^{\psi}(\underline{\psi}^{(i)}), \quad i = 0,1,2,... \quad (37)$$

де u – коефіцієнт, отриманий у пошуках найменшої помилки $|\psi^{(i+1)} - \psi^{(i)}|$ при сталій кількості ітерацій. Ідея методу Зейделя спрацювала і тут – число ітерацій, необхідних для отримання розв'язку, інколи зменшується у декілька раз.

Висновки. Отримано моменти сил для доповнення математичної моделі у роботі [3], які відповідають напруженням згинання і кручення дроту. Потенційна енергія (11) не залежить від вибору системи координат і тому не має помилкового відхилення при перестановці кутів (1) – компоненти векторів залишаються незмінними. З метою прискорення розрахунку узагальнених сил по отриманим у статті формулам треба одноразово отримати значення тригонометричних (27) і степеневих (28) функцій для усіх стрижней на початку кроку за часом.

ЛІТЕРАТУРА

1. Исаев О.Б., Чичкарев Е.А., Кислица В.В., Лившиц Д.А., Носоченко О.В., Матросов Ю.И. Моделирование современных процессов внепечной обработки и непрерывной разливки стали. // – М.: Металлургиздат, 2008. – С. 73. ISBN 978-5-902194-32-3.
2. Піптюк В.П., Самохвалов С.Є., Гнип Р.Р., Павлов С.М., Овчаренко Т.М. Вивчення траєкторії руху дроту при введені в металеву ванну під час продувки аргоном на установці ківш-піч. // Математичне моделювання. Дніпродзержинськ – 2010. – № 1 (22). – С. 21–24;
3. Красніков К.С. Комп'ютерне моделювання тривимірного руху сталевого дроту в розплаві на установці ківш-піч / К.С. Красніков, С.Є. Самохвалов, В.П. Піптюк // Математичне моделювання, – №2(29), 2013. – С. 95–98.
4. Болотов В. Ю. Розробка раціональної теплотехнології обробки розплавів дротом в сталерозливному ковші: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.14.06 "Технічна теплофізика та промислова теплоенергетика" / Болотов Вадим Юрійович – Дніпродзержинськ, 2001. – 20 с.

пост. 02.03.2016

Аналитическое исследование нагрева твердых тел радиацией. Сообщение 3

А.Д. ГОРБУНОВ, С.В. УКЛЕИНА

Днепродзержинский государственный технический университет

Предложена упрощенная математическая постановка задачи радиационного нагрева тел. На основе линеаризующей подстановки и решения интегрального уравнения разработано две инженерные методики расчета температур при нагреве излучением тел простой геометрической формы в виде пластины, цилиндра и шара в квазистационарной стадии.

Запропоновано спрощену математичну постановку задачі радіаційного нагріву тіл. На основі лінеарізующей підстановки і рішення інтегрального рівняння розроблено дві інженерні методики розрахунку температур при нагріву випромінюванням тіл простої геометричної форми у вигляді пластини, циліндра і кулі в квазістаціонарній стадії.

A simplified mathematical problem radiant heating bodies. On the basis of linearizing substitution and solutions of integral equations developed by two engineering method for calculating the temperature during the heating radiation of bodies of simple geometric shapes in the form of a plate, cylinder and a ball in the quasi-stationary stage.

Анализ публикаций. В предыдущих работах авторов были усовершенствованы инженерные методики линеаризующих преобразований [1] и через решение интегрального уравнения [2], однако полученные зависимости являются достаточно громоздкими.

Цель данной работы — упрощение модели, которая впоследствии понадобится при реализации более сложной задачи нагрева тел одновременно радиацией и конвекцией.

Постановка задачи. Математическая постановка задачи симметричного радиационного нагрева тел простой геометрической формы от начальной температуры T_0 до T_c имеет вид

$$\frac{\partial\theta(X,\text{Fo})}{\partial\text{Fo}} = \frac{\partial^2\theta}{\partial X^2} + \frac{k-1}{X}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial X}, \quad (1)$$

$$\theta(X,0) = \theta_0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial\theta(0,\text{Fo})}{\partial X} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial\theta(1,\text{Fo})}{\partial X} = \text{Sk}\left(1-\theta_{\text{п}}^4\right), \quad (4)$$