

Напряжения изгиба в проволоках кабеля управления с учетом изгибной жесткости арматуры

Л.М. МАМАЕВ, Д.А.ШИТИКОВ

Днепродзержинский государственный технический университет

Получены теоретические зависимости по расчету кабелей повышенного удлинения с учетом изгибной жесткости арматуры.

Одержані теоретичні залежності з розрахунку кабелів з підвищеним подовженням з врахуванням згинальної жорсткості арматури.

The theoretical dependences for calculation of the heightened lengthening cables with regard for the flexural stiffness of cable fittings.

Для определения изгибных напряжений в элементах арматуры кабеля управления с учетом изгибной жесткости, необходимо определить величину деформации кручения $\tilde{\tau}$, которой мы пренебрегали в предыдущем расчете. С этой целью рассмотрим условие статического равновесия проволоки арматуры кабеля с учетом его взаимодействия с соседними элементами.

Если рассмотреть винтовой элемент кабеля в виде тонкого естественно изогнутого стержня, то все внутренние силы, действующие в поперечном сечении этого элемента, можно свести к главному вектору \bar{P} и главному моменту \bar{L} , приложенных в центре тяжести сечения. Кроме того на элемент кабеля (проволока или жила) по ее длине действует распределенная нагрузка, которую можно свести к векторам интенсивности силовой \bar{f} и моментной \bar{m} нагрузок, отнесенных к упругой линии элемента длины кабеля.

Дифференциальные уравнения равновесия элемента кабеля в векторной форме можно представить в виде:

$$\frac{d\bar{P}}{dS} = -\bar{f}; \quad \frac{d\bar{L}}{dS} = -[\bar{f} \times \bar{P}] - \bar{m}, \quad (1)$$

где \bar{P} , \bar{L} - векторы упругих сил и моментов.

Если спроектировать уравнения (1) на оси подвижного триэдра $\bar{b}, \bar{p}, \bar{\tau}$ (рис.), то получится 6 скалярных уравнений.

Проекция сил:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_n}{dS} + \omega_\tau P_b - \omega_b P_\tau &= -f_n; \\ \frac{dP_b}{dS} + \omega_n P_\tau - \omega_\tau P_n &= -f_b; \\ \frac{dP_\tau}{dS} + \omega_b P_n - \omega_n P_b &= -f_\tau. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Проекция моментов:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL_n}{dS} + \omega_\tau L_b - \omega_b L_\tau &= P_b - m_n; \\ \frac{dL_b}{dS} + \omega_n L_\tau - \omega_\tau L_n &= P_n - m_b; \\ \frac{dL_\tau}{dS} + \omega_b L_n - \omega_n L_b &= -m_\tau. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Две системы уравнений (2) и (3), устанавливающие взаимосвязь внутренних нагрузок в несущей арматуре кабеля, являются дифференциальными уравнениями Кирхгофа, записанные для тонких стержней. Для определения деформации кручения τ необходимо и достаточно использовать 3-е уравнение (3).

Здесь использованы обозначения, принятые в [4], $(E_e)_{\alpha, \beta, n}$ - проекции фурье-амплитуд напряженности поля β -частицы на орты соответственно α, β, n (см. рис. 1).

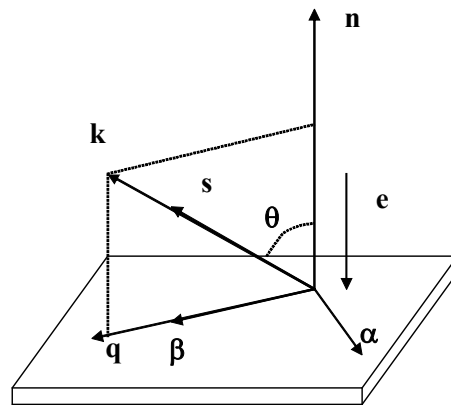


Рис. 1. Геометрия рассеяния света (с волновым вектором \mathbf{k} , $\bar{s} = \bar{k} / k$) кристаллической пластинкой. Для описания электромагнитных возбуждений в пленке использован натуральный базис $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{n})$, связанный с s- и р-поляризациями световой волны, $\bar{\beta} = \bar{q} / q, \bar{\alpha} = \bar{n} \times \bar{\beta}$.

В вакууме система силовых линий отображающих электрическое поле неподвижного положительного заряда сферически симметрична (рис. 2, случай 1). Изображение поля, полученное в работах [5, 6], для равномерно движущегося в вакууме заряда (рис. 2, случай 2) свидетельствует о неизотропном его характере.

Рассмотрим частный случай – электрон движется в кристаллическом слое со скоростью v вдоль нормали, то есть $e \parallel n$. Обозначив (как и ранее в [7]) $\beta \equiv v/c$, имеем: $\vec{v} = (v_\alpha, v_\beta, v_n) = (0, 0, -c\beta)$. На рис. 1 k – волновой вектор электромагнитной волны, генерируемой β -частицей в слое, следовательно, пла-

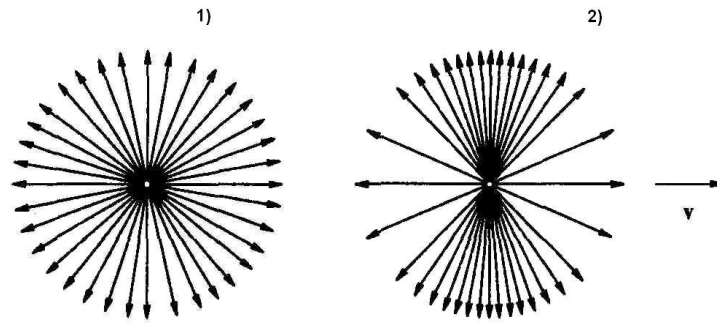


Рис. 2. Электрическое поле положительного заряда в вакууме: 1 – неподвижного, 2 – равномерно движущегося со скоростью $v=0,87c$ ($\beta=0,87$).

$$\begin{aligned} E_\alpha(q) &= 0, \\ E_\beta(q) &= -4\pi e \frac{\sin^2 \theta}{q(1-\beta^2 \cos^2 \theta)}, \\ E_n(q) &= -4\pi e \frac{\sin \theta \cos \theta (1-\beta^2)}{q(1-\beta^2 \cos^2 \theta)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Аппроксимируя квазидвумерный слой тонкой пластинкой, толщина которой d много меньше длины электромагнитной волны (то есть $qd \ll 1$), получаем следующие выражения для поляризуемостей:

$$\chi_{t(\beta\beta)} = d \frac{\varepsilon-1}{4\pi}, \quad \chi_{n(nn)} = d \frac{\varepsilon-1}{4\pi\varepsilon} \quad (3)$$

Вдали от резонансов воспользуемся приближенным значением диэлектрической проницаемости, найденной

нарная компонента волнового вектора $q = k \sin \theta$, причем :

$$\vec{e} \cdot \vec{s} = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta, \quad s_n = \cos \theta, \quad s_\beta = \sin \theta.$$

Таким образом, соответствующие фурье-компоненты

$$[E_e(\omega, \vec{q})]_i = E_i(\vec{q}) \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) = E_i(q) \delta(\omega + \beta c q \cos \theta),$$

($i = \alpha, \beta, n$) поля заряженной частицы с учетом [7] принимают вид:

для соединений типа YBaCuO авторами [8] методом Монте-Карло: $\varepsilon_\infty \approx 4$.

Таким образом, фурье-образы соответствующих функций Грина принимают вид:

$$G_{\beta\beta}(\omega, q) = \frac{1}{2\pi} \left(\sqrt{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{2}{3d}} \right)^{-1}, \quad (4)$$

$$G_{nn}(\omega, q) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{q^2}{\sqrt{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}} - \frac{8}{3d} \right)^{-1}.$$

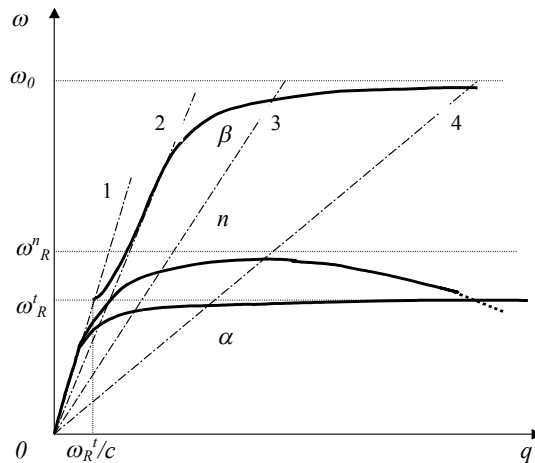


Рис. 3. Точки пересечения прямых $\omega = \beta cqctg\theta$ с поляритонными кривыми отражают резонанс по частоте и волновому вектору (возможность передачи энергии) и определяют рождение локализованного в слое светоэкситона соответствующей поляризации.

2. Интенсивность излучения, генерируемого полем β - частицы в квазидвумерном кристаллическом слое

Аналогично случаю, рассмотренному в [4, 7], генерация в YBaCuO-слое поверхностных поляритонов соответствующей поляризации полем движущейся β-частицы возможна лишь при условии двойного резонанса (по частоте ω и волновому вектору q). Высвечиваются сразу лишь локализованные в слое поляритоны, генерируемые β-частицей (движущейся со скоростью v , причем $v_2 < v < v_1$), которые соответствуют пересечению линейных участков дисперсионных кривых с прямыми (законами дисперсии сопровождающего β-частицы поля), лежащими между линиями 1 и 2 на рис.3. Поляритоны, порожденные частицей, имеющей скорость $v < v_2$ (отображенные на рис. 3 точками пересечения, например, прямых 3 и 4 с кривыми дисперсии), могут высветиться после рассеяния в приповерхностном слое кристалла (в результате которого волновой вектор поляритона уменьшается до диапазона значений, характерных для линейного участка дисперсионной кривой).

Интенсивность излучения возбужденных полем β - частицы структурных единиц (СЕ) слоя получим в результате вычисления суммарной работы $\sum_l \vec{E}_{e\perp}(\vec{r}^l, t) \cdot \frac{d\vec{P}_\perp^l}{dt}$, совершаемой электромагнитным полем β - частицы в единицу времени над диполями

\vec{P}_\perp^l СЕ квазидвумерного кристалла. Суммирование по l в данном случае можно заменить интегрированием по поверхности S квазидвумерного кристалла:

$$I(t) = \int_S d^2r \vec{E}_e(\vec{r}, t) \cdot \frac{d\vec{P}_\perp(\vec{r}, t)}{dt} \quad (5)$$

Следовательно, выражение для усредненной интенсивности излучения

$$\langle I \rangle = I_\alpha(\theta, \beta, d) + I_\beta(\theta, \beta, d) + I_n(\theta, \beta, d)$$

(в общем случае возможна генерации планарных α-, β- и n-светоэкситонов) принимает вид:

$$I_i(\theta, \beta, d) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_S d^2r \int I_i(q, \{\theta, \beta, d\}) \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) d^2q, \quad (6)$$

$i = \beta, n$. Поскольку мы рассматриваем движение электрона вдоль нормали к поверхности, то $I_\alpha = 0$. Спектральная плотность $I_i(q, \{\theta, \beta, d\})$, параметрически зависящая от угла θ (отражающего геометрию задачи), а также от толщины пластинки d и параметра скорости частицы $\beta \equiv v/c$, для светоэкситонов β- и n-поляризации соответственно равна:

$$I_\beta(q, \{\theta, \beta, d\}) = 8\pi \frac{e^2 c}{a^3} \frac{\beta \sin^3 \theta \cos \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^q \frac{dq'}{|\vec{q} - \vec{q}'| \sqrt{1 - \beta^2 ctg^2 \theta} + \frac{2}{3d}} \quad (7)$$

$$I_n(q, \{\theta, \beta, d\}) = 8\pi \frac{e^2 c}{a^3} \frac{\beta \sin \theta \cos^3 \theta (1 - \beta^2)^2 \sqrt{1 - \beta^2 ctg^2 \theta}}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^q \frac{dq'}{|\vec{q} - \vec{q}'| - \frac{8}{3d} \sqrt{1 - \beta^2 ctg^2 \theta}} \quad (8)$$

φ - угол между векторами \vec{q} и \vec{q}' . Для получения физически значимого результата диапазон значений параметра θ в формулах (7) и (8) определяется, с одной стороны, условием

$$1 - \beta^2 \operatorname{ctg}^2 \theta \geq 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{ctg} \theta \leq 1/\beta, \quad (10)$$

а с другой, помимо предыдущего условия, - формула (8) требует выполнения неравенства:

$$|\vec{q} - \vec{q}'| > \frac{8}{3d} \sqrt{1 - \beta^2 \operatorname{ctg}^2 \theta} \quad (11)$$

или $[1 - o(qd)]/\beta < \operatorname{ctg} \theta \leq 1/\beta$. Здесь $o(qd)$ - малая (порядка $qd \ll 1$) величина

$$o(q, q', \varphi) = qd \frac{3}{16} \sqrt{1 + \left(\frac{q'}{q}\right)^2 - 2\left(\frac{q'}{q}\right) \cos \varphi} \quad (12)$$

Соотношение (11) позволяет приближенно представить функцию $f(\theta) \equiv 1 - \beta^2 \operatorname{ctg}^2 \theta$ в виде разложения вблизи точки $\theta_0 = \operatorname{arctg}(1/\beta)$:

$$f(\theta) \approx 2(\beta + 1/\beta) \delta_\theta, \quad \text{где} \quad \delta_\theta \equiv \theta - \theta_0 \quad (12)$$

Таким образом, если ввести новую переменную интегрирования: $x = q'/q$ (отметим, что рассматривается диапазон лишь малых значений волнового вектора) и обозначить:

$$\frac{8}{3qd} \sqrt{1 - \beta^2 \operatorname{ctg}^2 \theta} \equiv a(\theta),$$

то интеграл в (8) принимает следующий вид:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{d\varphi} \frac{a(\theta) dx}{\sqrt{x^2 - 2x \cos \varphi + 1} - a(\theta)} \approx \int_0^{2\pi} \frac{1}{d\varphi} \frac{a(\theta) dx}{\sqrt{x^2 - 2x \cos \varphi + 1}} \left(1 + \frac{a(\theta)}{\sqrt{x^2 - 2x \cos \varphi + 1}} \right) \quad (13)$$

После замены переменных $\varphi \rightarrow \varphi - \pi$, $z = x + \cos \varphi$, получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{\cos \varphi}^{1 + \cos \varphi} \frac{a(\theta) dz}{\sqrt{z^2 + \sin^2 \varphi}} = \lim_{\delta_\varphi \rightarrow 0} 2 \int_0^{\pi - \delta_\varphi} a(\theta) \ln \left(1 + \cos^{-1} \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi \quad (14)$$

Интегрирование (14) приводит к соотношению:

$$\lim_{\delta_\varphi \rightarrow 0} (-\pi a(\theta) \ln \delta_\varphi) = \lim_{\delta_\varphi \rightarrow 0, \delta_\theta \rightarrow 0} \frac{2\pi(\beta + 1/\beta) \delta_\theta \left(\frac{8}{3qd}\right)^2}{\delta_\varphi} \quad (15)$$

Следовательно, предполагая одинаковый характер предельного поведения угловых величин δ_φ и δ_θ , приходим к следующему выражению для спектральной плотности $I_n(q, \{\theta, \beta, d\})$:

Следовательно, предполагая одинаковый характер предельного поведения угловых величин δ_φ и δ_θ , приходим к следующему выражению для спектральной плотности $I_n(q, \{\theta, \beta, d\})$:

$$I_n(q, \{\theta, \beta, d\}) = (4\pi)^2 \frac{e^2 c}{a^3} \frac{\beta(\beta + 1/\beta)(1 - \beta^2)^2 \sin \theta \cos^3 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} \frac{8}{3qd} \quad (16)$$

Подстановка выражения для спектральной плотности $I_n(q, \{\theta, \beta, d\})$ в (6) позволяет вычислить плотность интенсивности излучения, соответствующего высвечиванию n -светозэкситона:

Подстановка выражения для спектральной плотности $I_n(q, \{\theta, \beta, d\})$ в (6) позволяет вычислить плотность интенсивности излучения, соответствующего высвечиванию n -светозэкситона:

$$I_n(\theta, \beta, d) = 32\pi \frac{e^2 c}{a^3} \frac{8\beta(\beta + 1/\beta)(1 - \beta^2)^2 \sin \theta \cos^3 \theta}{3d(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} \frac{1}{r}, \quad (17)$$

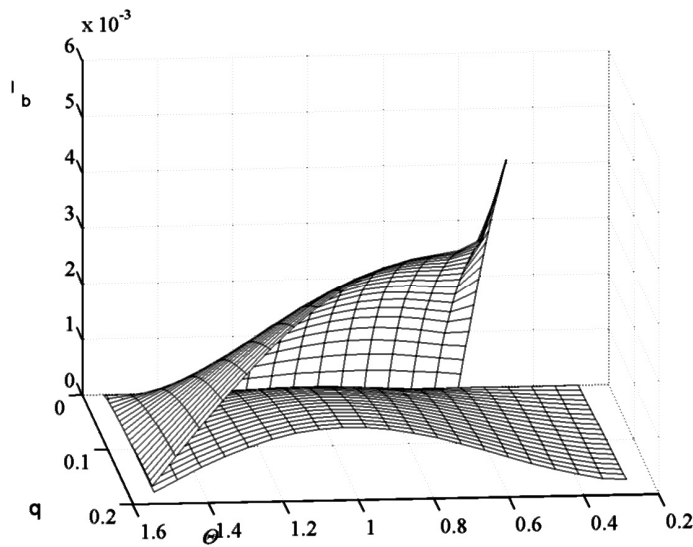


Рис. 4. Спектральная плотность $I_{\beta}(q, \{\theta, \beta, d\})$ излучения в ед. измерения $(4\pi)^2 e^2 c/a^3$ (q - в ед. a^{-1} , θ - в радианах), генерируемого в квазидвумерном слое: первый лист (снизу) – $\beta = 0,3$, второй – $\beta = 0,7$, $d = 5$ (в ед. постоянной решетки a)

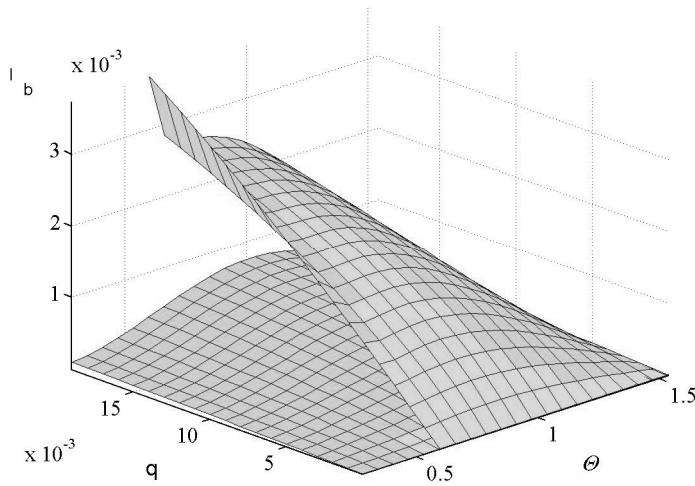


Рис. 5. Спектральная плотность $I_{\beta}(q, \{\theta, \beta, d\})$ излучения в ед. измерения $(4\pi)^2 e^2 c/a^3$ (q - в ед. a^{-1} , θ - в радианах), генерируемого в квазидвумерном слое: первый лист (снизу) – $\beta = 0,3$, второй – $\beta = 0,7$, $d = 50$ (в ед. постоянной решетки a)

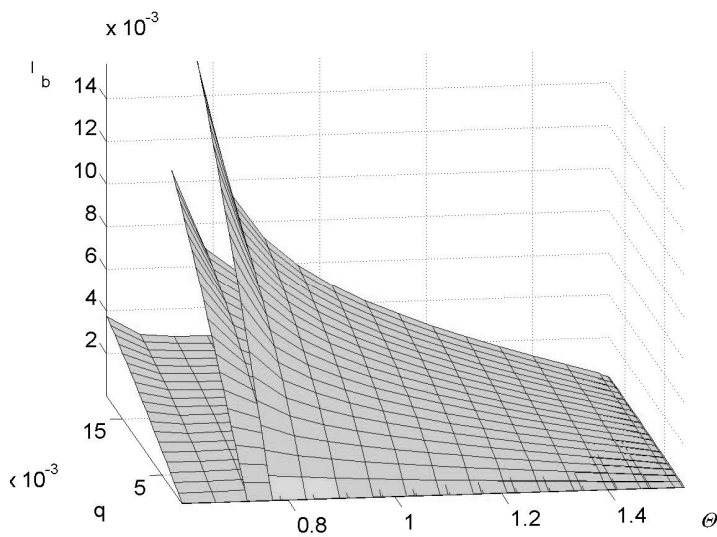


Рис. 6. Спектральная плотность $I_{\beta}(q, \{\theta, \beta, d\})$ излучения в ед. измерения $(4\pi)^2 e^2 c/a^3$ (q - в ед. a^{-1} , θ - в радианах), генерируемого в квазидвумерном слое: первый лист (снизу) – $\beta = 0,7$, второй – $\beta = 0,9$, третий – $\beta = 0,99$, $d = 50$ (в ед. постоянной решетки a)

Из формулы (17) следует, что плотность интенсивности излучения СЕ квазидвумерного кристалла убывает с расстоянием (в плоскости слоя), как $1/r$. Результаты численного интегрирования (7) представлены на рис. 4, 5 и 6.

Легко видеть, что зависимость I от θ для заряженных

$$\beta$$

частиц, движущихся с малыми скоростями (на рис.4 для $\beta = 0,3$) – не монотонна, она имеет максимум при значении $\theta = 1,035$. Причем сравнение рис.4 и рис. 5 (в отличие от предыдущего, толщина слоя здесь составляет

$d = 50a$) указывает на слабую зависимость I от

$$\beta$$

толщины слоя. С ростом β (см. рис.6), благодаря условию (11), происходит смещение левого края графика, кривая зависимости $I(\theta)$ приобретает монотонный

$$\beta$$

характер - спектральная плотность интенсивности излучения резко возрастает при $\theta \rightarrow \arccos 1/\beta$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. – М.: Наука. – 1978, 791 с.

2. Лейман К. Взаимодействие излучения с твердым телом и образование элементарных дефектов. – М.: Атомиздат. – 1979, 296 с.
3. Пустовойт А.К., Коноплева Р.Ф. О возможностях модификации свойств высокотемпературных сверхпроводников воздействием ядерных облучений // Препринт № 1385. – Л.: ЛИЯФ. – 1988, 10 с.
4. Rumyantsev V.V. Study of YBaCuO quasi-two-dimensional crystalline structure by light scattering // Physica E – 2004. – V. 23, N 3-4, P. 487-490.
5. Парселл Э. Электричество и магнетизм. – М.: Наука. – 1983, 448 с.
6. Болотовский Б.М., Серов А.В. Об изображении поля излучения с помощью силовых линий // УФН. – 1997. – Т.167, №10, С. 1107-1111.
7. Румянцев В.В. Генерация поляритонов в алмазоподобном полупроводнике движущейся β -частицей // Вісник Донецького університету. – 2002. - № 2, С. 295-298.
8. Гасумянц В.Э., Казьмин С.А., Кайданов В.И., Чугреев А.В. Исследование спектров оптического отражения YBa₂Cu₃O_y с различным содержанием кислорода // XXIX совещание по ФНТ. Тезисы докладов. Ч. 1. – Казань: КФТИ РАН. – 1992, С. 7.

пост. 15.03.05

Математическое моделирование динамики пространственных движений напольного робота-манипулятора.

Т.В. ЗАВРАЖИНА, Н.М. ЗАВРАЖИНА*

*Киевский национальный университет строительства и архитектуры

Рассматривается математическая модель динамики управляемого напольного робота-манипулятора. Кинематическая схема робота-манипулятора включает абсолютно твердые платформу и два исполнительных звена манипулятора, соединенные между собой вращательным и поступательным сочленениями. Математическая модель сводится на основе формализма Лагранжа к системе нелинейных взаимосвязанных дифференциальных уравнений. Поставлены задачи динамического и кинематического управления динамикой пространственных движений робота-манипулятора. Рассмотрен численный пример кинематического управления роботом. Найдены функции внешних управляющих сил и моментов, действующих в сочленениях манипулятора.

Розглянуто математичну модель динаміки керованого підлогового робота-маніпулятора. Кінематична схема робота-маніпулятора включає абсолютно тверді платформу і дві виконавчі ланки маніпулятора, з'єднані між собою обертовим та поступальним зчленуваннями. Математична модель зводиться на основі формалізму Лагранжа до системи нелінійних взаємопов'язаних диференціальних рівнянь. Поставлено задачі динамічного і кінематичного керування динамікою просторових рухів робота-маніпулятора. Розглянуто чисельний приклад кінематичного керування роботом. Знайдено функції зовнішніх керуючих сил та моментів, що діють у зчленуваннях маніпулятора.

The mathematical model of a dynamics of the controlled floor robot-manipulator is considered. Kinematical schema of robot-manipulator is included absolutely solid platform and two executive links, connected among themselves by rotary and translational joints. The mathematical model on a basis of the Lagrange formalism is reduced to system of nonlinear interconnected differential equations. Tasks of dynamic and kinematical control the dynamics of the spatial motions by the robot-manipulator are put. A numerical example of kinematical control the robot is considered. Functions of external controlling forces and moments, acting in joints of the manipulator are found.

