

В настоящее время известно большое количество математических моделей коррозионного износа, полученных различными исследователями по результатам проведенных экспериментов. Ниже приводятся лишь наиболее распространенные из них.

Как отмечено в [1], впервые влияние напряжений на скорость коррозии было учтено в работах В.М. Долинского [2], которым была предложена модель коррозионного износа вида:

$$\frac{d\delta}{dt} = v_0 + m\sigma \quad (1)$$

где δ – глубина коррозионного поражения; t – время; v_0 – скорость коррозии при отсутствии напряжений; m – коэффициент; σ – напряжений.

Проблема расчета корродирующих конструкций получила развитие в работе [3], в которой предложена уточненная модель коррозии в виде:

$$\frac{d\delta}{dt} = \alpha \psi(t) \times (1 + k\sigma) \quad (2)$$

Здесь α, k – коэффициенты; $\psi(t)$ – некоторая функция времени.

Большое внимание расчету конструкций в условиях электрохимической коррозии было уделено в работах [4, 5], в которых рекомендованы для расчетов модели:

$$\frac{d\delta}{dt} = v_0 \exp\left(\frac{V\sigma}{RT}\right) \quad (3)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = v_0(1 + k\varepsilon) \exp\left(\frac{V\sigma}{RT}\right) \quad (4)$$

В (3) – (4) приняты следующие обозначения: V – мольный объем корродирующего металла; T – температура; R – универсальная газовая постоянная; ε – деформация.

Значительный вклад в исследования корродирующих конструкций был внесен И.Г. Овчинниковым. В его работах [6, 7] были использованы модели:

$$\frac{d\delta}{dt} = v_0 + \alpha\varepsilon(\sigma - \sigma^*) \quad (5)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = v_0(1 + k\varepsilon) \quad (6)$$

где ε – удельная энергия деформирования; σ^* – предельное напряжение.

Большое количество известных моделей делает проблематичной построение единого подхода к решению задач деформирования конструкций, подверженных воздействию агрессивных сред.

Выбор и обоснование конкретной математической модели представляет собой самостоятельную достаточно сложную задачу. Процедура определения коэффициентов выбранной модели представляет собой трудоемкий процесс, предполагающий обработку большого количества экспериментальных данных, как это описано, например, в [8]. Для получения этих данных необходимы наличие специального оборудования и, что не менее важно, значительные временные затраты. При этом коэффициенты, определенные для данной математической модели коррозионного износа, в общем случае не подходят для других моделей.

Применяемые до настоящего времени подходы к исследованию процесса деформирования конструкций в

агрессивных средах, основанные на традиционных численных методах решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений вида (1) – (6), инвариантны по отношению к конкретному виду их правых частей. Использование же аналитических методов оказывается невозможным для большинства известных моделей, что существенно снижает границы их применимости. С другой стороны, в ряде случаев именно аналитические зависимости позволяют повысить эффективность вычислительных процедур и снизить или, по крайней мере, оценить погрешность решения задачи.

Рассмотрим возможность сведения моделей вида (1) – (6) к одной или двум, которые могут рассматриваться как их обобщение и будут достаточно удобны для получения аналитических решений. При этом примем следующие ограничения на рассматриваемый коррозионный процесс:

1. Коррозия происходит по электрохимическому механизму, то есть является следствием термодинамической неустойчивости металла и заключается в самопроизвольном разрушении металла в электролите; для нее характерно возникновение электрического тока в системе металл – электролит.

2. Коррозионный процесс является стационарным и вариациями параметров процесса во времени можно пренебречь.

3. Имеет место случай сплошной коррозии, протекающей по всей поверхности металла; неравномерность коррозии определяет степень неоднородности поля напряжений по области конструкции.

Как показано в [4], правые части дифференциальных уравнений (1) – (6) могут быть представлены в виде произведения двух сомножителей, которые определяют химическую и энергетическую составляющие скорости коррозионного процесса. При этом в качестве показателя, характеризующего внутреннюю потенциальную энергию, удобно принять механическое напряжение. Пусть σ_{eq} – некоторое эквивалентное напряжение, выбранное таким образом, чтобы коррозионный процесс в условиях сложного напряженного состояния протекал с той же скоростью, что и при одноосном растяжении или сжатии. Тогда, с учетом принятых допущений, модели (1) – (6) могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{d\delta}{dt} = v_0 \Psi\{\sigma_{eq}(\delta)\}, \quad (7)$$

где σ_{eq} – абсолютное значение эквивалентного напряжения; $\Psi\{\sigma_{eq}(\delta)\}$ – некоторая функция (энергетическая составляющая). Очевидно, эта функция должна удовлетворять следующему условию: $\Psi\{0\} = 1$.

Предполагая, что $\Psi\{\sigma_{eq}(\delta)\}$ n раз дифференцируема по напряжению, разложим ее в ряд по степеням σ_{eq} . Получим:

$$\frac{d\delta}{dt} = v_0 \left[1 + k_1 \sigma_{eq} + k_2 \sigma_{eq}^2 + \dots + k_n \sigma_{eq}^n \right] \quad (8)$$

Здесь k_1, k_2, \dots, k_n – некоторые коэффициенты, учитывающие влияние напряжения на скорость коррозии.

Пренебрегая слагаемыми, содержащими σ_{eq} в степени 2 и выше, получим модель вида

$$\frac{d\delta}{dt} = v_0 \left[1 + k \sigma_{eq} \right], \quad (9)$$

аналогичную модели (1). Остальные модели могут быть получены путем удержания более высоких степеней σ_{eq} :

$$\frac{d\delta}{dt} = v_0 [1 + k_1 \sigma_{eq} + k_2 \sigma_{eq}^2] \quad (10)$$

Учитывая все вышеизложенное, авторы считают целесообразным ограничить число рассматриваемых моделей коррозионного износа. Без потери общности основная часть известных математических моделей, описывающих процесс электрохимической сплошной коррозии может быть представлена в виде (9) или (10).

Покажем, что модели (9) - (10) могут быть использованы для описания тех же видов коррозионного износа, которые описываются моделями (1) - (6). При этом в качестве модели, адекватно описывающей коррозионный процесс, примем модель вида (3). Вывод этой модели достаточно полно приведен в монографии [4]. Выбор именно этой модели обоснован тем, что она лучше других описывает коррозионный процесс [9].

Уравнение (10) имеет два неизвестных коэффициента: k_1 и k_2 . Для их определения необходимо составить систему двух уравнений. Очевидно, в этом случае должны выполняться следующие начальные условия для модели (4):

$$\left. \frac{d\delta}{dt} \right|_{\sigma=0} = v_0; \quad \left. \frac{d\delta}{dt} \right|_{\sigma=[\sigma]} = v_0 \exp\left(\frac{V[\sigma]}{RT}\right) \quad (11)$$

Первое из них определяет значение неизменного коэффициента в модели (10). Для выполнения второго условия выберем на интервале $(0; [\sigma])$ некоторое значение σ . Система уравнений для определения коэффициентов k_1 и k_2 имеет вид:

$$\begin{cases} \exp\left(\frac{V\sigma}{TR}\right) = 1 + k_1 \sigma + k_2 \sigma^2 \\ \exp\left(\frac{V[\sigma]}{TR}\right) = 1 + k_1 [\sigma] + k_2 [\sigma]^2 \end{cases} \quad (12)$$

Решая систему получим значения коэффициентов k_1 и k_2 модели. Очевидно, значения k_1 и k_2 будут зависеть от выбора промежуточной точки σ на заданном интервале.

Сформулируем задачу выбора точки σ в виде задачи нелинейного математического программирования. Рассмотрим в качестве оценки приближения среднеквадратичное отклонение модели (10) от (4):

$$\varphi(\sigma) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{d\delta_1}{dt} - \frac{d\delta_2}{dt} \right)^2 \rightarrow \min, \quad (13)$$

где n - количество точек на интервале $(0; [\sigma])$;

$\frac{d\delta_1}{dt}$ и $\frac{d\delta_2}{dt}$ - значения скоростей коррозионного процесса, которые определяются моделями (4) и (10) соответственно. Минимизируя функцию (13), найдем значение аргумента σ , подставляя которое вместе с $[\sigma]$ в (12) и решая ее, определим значения коэффициентов k_1 и k_2 . Для параметров модели (4) получим, что $\sigma^* = \arg \min(\varphi) = 116$ МПа. В этом случае значения $k_1 = 2,675 \times 10^{-2}$ МПа⁻¹ и $k_2 = 5,49 \times 10^{-6}$ МПа⁻². Для по-

лученных коэффициентов значения функции (13) равно $\varphi(\sigma^*) = 2,94 \times 10^{-6}$.

Некоторые результаты, полученные при вычислении коэффициентов k_1 и k_2 в зависимости от выбора промежуточной точки на интервале $(\sigma_0; [\sigma])$, а также значения функции погрешности (10) в процентном выражении, приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Значения коэффициентов модели при различных значениях промежуточной точки

| σ , МПа | $k_1 \times 10^{-2}$, МПа ⁻¹ | $k_2 \times 10^{-6}$, МПа ⁻² | ϵ , % |
|----------------|--|--|----------------|
| 80,0 | 2,711 | 5,34 | 0,0041839 |
| 90,0 | 2,699 | 5,39 | 0,0035001 |
| 100,0 | 2,687 | 5,44 | 0,0030817 |
| 110,0 | 2,675 | 5,49 | 0,0029402 |
| 120,0 | 2,663 | 5,54 | 0,0030874 |
| 130,0 | 2,651 | 5,59 | 0,0035356 |
| 140,0 | 2,638 | 5,64 | 0,0042976 |
| 150,0 | 2,625 | 5,69 | 0,0053866 |

Оценим для найденных значений коэффициентов k_1 и k_2 приближение модели (10) к модели (4) при решении задачи долговечности растягиваемого стержня при коррозионном износе.

В качестве объекта исследования рассмотрим стержень кольцевого сечения с площадью сечения F и периметром P . Величина растягивающей силы Q .

Для случая растяжения стержня формула для вычисления напряжений в поперечных сечениях при использовании моделей (4) и (10) имеет вид:

$$\sigma_1(t) = \frac{Q}{F_1(t)}; \quad \sigma_2(t) = \frac{Q}{F_2(t)} \quad (14)$$

Площадь поперечного сечения кольцевого стержня с внешним радиусом $R_1(t)$ и $R_2(t)$ ($R_1(0) = R_2(0)$) соответственно для моделей (4) и (10) и внутренним радиусом r можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \pi(R_1^2(t) - r^2) \\ F_2(t) &= \pi(R_2^2(t) - r^2) \end{aligned} \quad (15)$$

С течением времени материал корродирует, и происходит изменение площади сечения:

$$\begin{aligned} R_1^{i+1} &= R_1^i - \Delta t v_0 \exp(k\sigma_1^i) \\ R_2^{i+1} &= R_2^i - \Delta t v_0 \left(1 + k_1 \sigma_2^i + (k_2^i)^2 \right) \end{aligned} \quad (16)$$

где Δt - величина шага по времени при численном решении задачи Коши для соответствующих дифференциальных уравнений.

Стержневой элемент сохраняет несущую способность в течение промежутка времени, когда $\sigma(t) \leq [\sigma]$. На временном интервале $t \in [0; t^*]$, где t^* - долговечность стержня, будем оценивать параметр

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|\sigma_1^i - \sigma_2^i|}{\sigma_1^i}, \quad (17)$$

где n - число шагов при численном решении задачи Коши для дифференциального уравнения (7). Этот параметр представляет собой среднее отклонение приближенного значения σ_1^i от точного σ_2^i .

Как показали результаты численного эксперимента для $Q = 5000$ кг; $F = 10$ см²; $\frac{R}{r} = 2$, значение параметра S равно 0,00247. Расхождение между значениями напряжений, определяемыми моделями (4) и (10) на всем временном интервале достаточно мало для того, чтобы им можно было пренебречь.

Рассмотрим далее математическую модель вида (9). Здесь присутствует только один неизвестный коэффициент k . Значение параметра v_0 , как и ранее, определится из условия равенства скоростей коррозии при отсутствии механических напряжений (11).

Приравняв левые части уравнений (9) и (4), получим уравнение для определения коэффициента k модели (9):

$$k = \frac{\exp\left(\frac{V\sigma}{RT}\right) - 1}{\sigma} \quad (18)$$

В этом случае значение k будет зависеть от выбора конкретного значения σ на интервале $(\sigma_0; [\sigma])$, то есть $k = k(\sigma)$. При численном решении задачи Коши для дифференциального уравнения (9) возможен пересчет значения коэффициента по формуле (18). В случае, когда возможно аналитическое решение задачи долговечности для некоторых отдельных конструктивных элементов, удобнее считать значение этого коэффициента постоянным. Тогда возникает проблема выбора такого значения $\sigma \in (\sigma_0; [\sigma])$, при котором модель (9) имеет лучшее приближение к (4). Ее решение возможно при определении критерия приближения. Так как основной оценкой расчета служит долговечность, то значение σ будем определять из условия максимального приближения расчетных значений долговечности нагруженного элемента, определенных для различных моделей коррозионного износа.

Для растянутого стержня кольцевого сечения лучшее совпадение значений долговечности имело место при $\sigma = \frac{\sigma_0 + [\sigma]}{2}$. В этом случае значение коэффициента $k = 3,101 \times 10^{-2}$ МПа⁻¹. Долговечность стержня с теми же характеристиками, что и ранее, определенная для модели (4) составила $t_1 = 2,8531$ года, для модели (9) – $t_2 = 2,8654$ года. Относительная погрешность решения $\sim 0,4$ %.

На рисунке 1 сплошная линия представляет собой зависимость напряжений от времени для растянутого стержня с теми же геометрическими параметрами, что и ранее, и для модели коррозионного износа вида (4). Здесь же показаны зависимости напряжения от времени, полученные при использовании моделей (9) и (10).

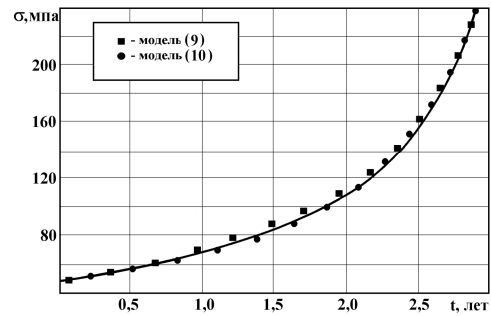


Рис. 1 Зависимости “напряжение – время” для различных моделей коррозионного износа

В таблице 2 представлены результаты устойчивости по входным данным модели (9). Значения параметров v_0 и k варьировались в пределах 10 % от номинальных.

Таблица 2.

Устойчивость модели по входным данным

| k | v_0 | | | | |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0,09 | 0,095 | 0,1 | 0,105 | 0,11 |
| 0,00027 | 2,9161 | 2,7626 | 2,6245 | 2,4995 | 2,3859 |
| 0,000285 | 2,8842 | 2,7324 | 2,5958 | 2,4722 | 2,3598 |
| 0,0003 | 2,8531 | 2,7030 | 2,5678 | 2,4455 | 2,3344 |
| 0,000315 | 2,8228 | 2,6742 | 2,5405 | 2,4195 | 2,3096 |
| 0,00033 | 2,7932 | 2,6462 | 2,5139 | 2,3941 | 2,2853 |

В таблице 3 приведены результаты проверки предложенных обобщенных моделей коррозионного износа на адекватность.

Таблица 3.

Адекватность обобщенных моделей

| Модель | t | | |
|--|----------------------|----------------------|---------------------|
| | $\eta = 2,0$ | $\eta = 2,5$ | $\eta = 3,0$ |
| $\frac{d\delta}{dt} = v_0 \exp(k\sigma)$ | 3,2422 | 2,5313 | 2,0835 |
| $\frac{d\delta}{dt} = v_0(1 + k\sigma)$ $k = 3,123 \cdot 10^{-4}$ | 3,2646 (0,0069) | 2,54796 (0,00658) | 2,0968 (0,00638) |
| $\frac{d\delta}{dt} = v_0(1 + k_1\sigma + k_2\sigma^2)$ $k_1 = 2,675 \cdot 10^{-4}$ $k_2 = 5,49 \cdot 10^{-7}$ | 3,2303 (-0,00367) | 2,5222 (-0,00359) | 2,0762 (-0,0035) |

Таким образом, математические модели вида (9) и (10) можно считать вполне удовлетворительным приближением моделей (1) – (6). Их преимущество определяется удобством при решении конкретных практических задач, в том числе – при получении аналитических формул долговечности нагруженных конструктивных элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпунин В.Г. К расчету гибких физических нелинейных пластин с учетом сплошной коррозии // Исследования по теории оболочек. – Казань, 1976. – Вып.7. С. 37–42.
2. Долинский В.М. Расчет элементов конструкций, подверженных равномерной коррозии. // Исследования по теории оболочек. – Казань, 1976. – Вып. 7. С. 37–42.
3. Карпунин В.Г., Клещев С.И., Корнишин М.С. К расчету пластин и оболочек с учетом общей коррозии // Труды X Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. – Тбилиси: Мецниереба, 1975. – т. 1. С. 166–174
4. Гутман Э.М. Механохимия металлов и защита от коррозии. – М.: Металлургия. – 1981, 281 с.
5. Гутман Э.М., Зайнуллин Р.С., Зарипов Р.А. Кинетика механохимического разрушения и долговечность растянутых конструктивных элементов при упругопластических деформациях // Физико-химическая механика материалов. – 1984. – № 2. – С. 14–17. Скорчеллетти В.В. Теоретические основы коррозии металлов. – Л.: Химия, 1973, 264 с.
6. Петров В.В., Овчинников И.Г., Шихов Ю.М. Расчет элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой. – Саратов: СГУ, 1987, 288 с.
7. Овчинников И.Г., Кудайбергенов Н.Б., Шеин А.А. Эксплуатационная надежность и оценка состояния резервуарных конструкций. – Саратов: СГТУ, 1999, 316 с.
8. Овчинников И.Г., Почтман Ю.М. Тонкостенные конструкции у условиях коррозионного износа. Расчет и оптимизация. - Днепропетровск: ДГУ, 1995., 192 с.

пост. 25.05.05

Методы математического моделирования стохастических дифференциальных систем как основа построения аппаратуры передачи данных

С.б. Приходько

Национальный университет кораблестроения имени адмирала Макарова

Рассмотрено применение методов математического моделирования стохастических дифференциальных систем (СДС) – численного решения стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) и параметрической идентификации СДС – для создания аппаратуры передачи данных, которая базируется на использовании случайных сигналов. Для примера приведено использование случайных сигналов, полученных на основе нелинейного СДУ второго порядка.

Розглянуто застосування методів математичного моделювання стохастичних диференціальних систем (СДС) – чисельного рішення стохастичних диференціальних рівнянь (СДУ) і параметричної ідентифікації СДС – для створення апаратури передачі даних, яка базується на використанні випадкових сигналів. Для прикладу наведено використання випадкових сигналів, які отримані на основі нелінійного СДУ другого порядку.

The application of methods of mathematical simulation of stochastic differential systems (SDS's) – numeric solution of stochastic differential equations (SDE's) and parameter identification of SDS's – for the construction of data circuit terminating equipment based on the uses of random signals are considered. For an example the using of the random signals that are obtained by the second order nonlinear SDE is given.

В последнее время в связи с недостаточной скрытностью передачи данных, в том числе и с помощью шумоподобных сигналов, делаются попытки применения хаотических сигналов в качестве носителей информации [1,2]. Однако нелинейные детерминированные динамические системы с хаотическим поведением или динамические хаотические системы (ДХС), на основе которых получают хаотические сигналы, имеют ряд отрицательных свойств (например, существование непредсказуемо коротких длин орбит, значительную чувствительность хаотического поведения ДХС от небольших изменений параметров или начальных условий). Все это приводит к необходимости поиска других сигналов и систем их генерации, которые можно было бы положить в основу построения аппаратуры передачи данных (АПД). В качестве таковых в [3] предложено применять случайные сигналы и стохастические диф-

ференциальные системы (СДС). Отметим, что систему с конечномерным вектором состояния и значениями входного и выходного сигналов, описываемую стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ), называют СДС [4]. С помощью нелинейных СДС, как отмечено в [3], также как и ДХС, можно вести скрытую передачу данных. Однако поведение СДС по сравнению с ДХС в меньшей степени зависит от небольших изменений параметров или начальных условий, а изменение структуры и параметров СДС позволяет формировать случайный сигнал с заданной спектральной плотностью, в том числе и с широкой полосой.

В [3] для передачи информации предложен следующий подход. С помощью нелинейной СДС передатчика генерируется случайный сигнал, в который нелинейно подмешан информационный сигнал. Извлечение информации в приемнике осуществляется по принятому

