

## ЛИНЕАРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ГРУЗОПОДЪЕМНОГО МЕХАНИЗМА

**Введение.** Подъемные машины являются типовым оборудованием производственных цехов. При эксплуатации подъемно-транспортных механизмов возникает проблема раскачивания груза, поскольку крановые механизмы работают в повторно-кратковременном режиме, следовательно, относительно длительные переходные процессы ухудшают производительность разгрузочно-погрузочных работ.

Для большинства кранов характерна одновременная работа нескольких механизмов. В этом случае система дифференциальных уравнений является сложной и нелинейной. Поэтому актуальным является вопрос моделирования и дальнейшей линеаризации системы уравнений.

**Постановка задач исследования.** Целью данной работы является:

- моделирование процесса перемещения тележки крана с подъемом или спуском груза;
- линеаризация полученной системы дифференциальных уравнений.

**Материалы исследования.** Рассмотрим простейший вариант подъема груза, когда тележка совершает одномерное движение при отсутствии перемещения самого крана [1]. Расчетная схема такого процесса показана на рис. 1.

В данном случае вектор обобщенных координат равен  $q = (\varphi_1, \varphi_2, \alpha)$ . Тогда кинетическая энергия всей системы примет вид:

$$T = \frac{1}{2} \cdot J_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot J_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot (r_1 \cdot \dot{\varphi}_1)^2 + \frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot \left( (r_1 \cdot \dot{\varphi}_1 + r_2 \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \sin(\alpha) + r_2 \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos(\alpha))^2 + (r_2 \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \cos(\alpha) - r_2 \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin(\alpha))^2 \right) \quad (1)$$

Первое слагаемое уравнения (1) соответствует кинетической энергии привода перемещения; второе слагаемое – кинетической энергии привода подъема; третье слагаемое – кинетической энергии тележки; четвертое – кинетической энергии груза.

На рис. 1 обозначено:

- $\alpha$  – угол отклонения груза от отвесного положения;
- $X_1 = \varphi_1 \cdot r_1$  – текущее положение тележки;
- $X_2 = X_1 - L \cdot \sin(\alpha)$  – текущее положение груза;
- $L = \varphi_2 \cdot r_2$  – длина каната,  $r_1$  и  $r_2$  – радиус колеса тележки и радиус барабана соответственно.

Потенциальная энергия системы может быть записана:

$$P = -M_2 \cdot r_2 \cdot \varphi_2 \cdot \cos(\alpha).$$

$T_1$  – момент, развиваемый приводом перемещения тележки;

$T_2$  – момент, развиваемый приводом подъема.

Решая уравнение Лагранжа второго рода, получим систему дифференциальных уравнений, описывающую движение груза, механизма перемещения и подъема:

$$\begin{cases} (J_1 + (M_1 + M_2) \cdot r_1^2) \cdot \ddot{\varphi}_1 + M_2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot (\ddot{\varphi}_2 \cdot \sin(\alpha) + \dot{\varphi}_2 \cdot \ddot{\alpha} \cdot \cos(\alpha) + 2 \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos(\alpha) - \varphi_2 \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \sin(\alpha)) + k_1 \cdot \dot{\varphi}_1 = T_1, \\ M_2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \ddot{\varphi}_1 \cdot \sin(\alpha) + (J_2 + M_2 \cdot r_2^2) \cdot \ddot{\varphi}_2 - M_2 \cdot r_2^2 \cdot \varphi_2 \cdot \dot{\alpha}^2 - M_2 \cdot g \cdot r_2 \cdot \cos(\alpha) + k_2 \cdot \dot{\varphi}_2 = T_2, \\ M_2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \varphi_2 \cdot \ddot{\alpha} \cdot \cos(\alpha) + M_2 \cdot r_2^2 \cdot \varphi_2^2 \cdot \ddot{\alpha} + 2 \cdot M_2 \cdot r_2^2 \cdot \varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \dot{\alpha} + M_2 \cdot g \cdot r_2 \cdot \varphi_2 \cdot \sin(\alpha) + k_3 \cdot \dot{\alpha} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $k_1, k_2, k_3$  – коэффициенты вязкого трения.

Вектор переменных нелинейной системы (2) имеет вид:

$$X = (\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \alpha \quad \dot{\varphi}_1 \quad \dot{\varphi}_2 \quad \dot{\alpha})^T. \quad (3)$$

Вектор начальных значений

$$X = (\varphi_{1(0)} \quad \varphi_{2(0)} \quad \alpha_{(0)} = 0 \quad \dot{\varphi}_{1(0)} = 0 \quad \dot{\varphi}_{2(0)} = 0 \quad \dot{\alpha}_{(0)})^T. \quad (4)$$

Вектор переменных линеаризованной системы с учетом (3) и (4) примет вид:

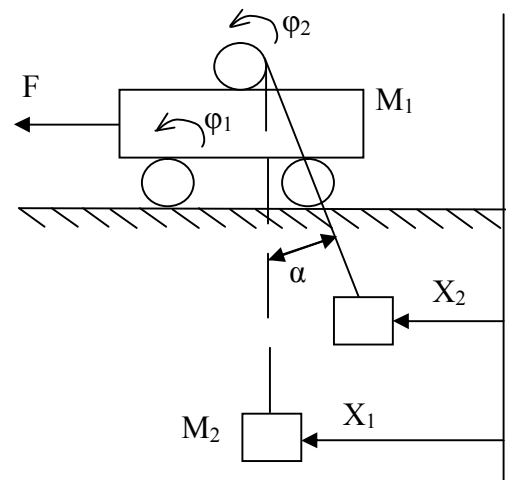


Рис. 1. Расчетная схема механизма перемещения и подъема

$$X = (X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4 \ X_5 \ X_6)^T. \quad (5)$$

Вектор входа и выхода равен:  $U = (T_1 \ T_2 - M_2 \cdot g \cdot r_2)^T = (U_1 \ U_2)^T$ ;  $Y = (X_1 \ X_2 \ X_3)^T$ .

Обозначим  $\varphi_{2(0)} \cdot r_2 = L_{(0)}$ ,  $\cos(\alpha) = 0$ ,  $\sin(\alpha) = \alpha$

Применим разложение Тейлора для сокращения второй и более высокой степени [2]:

$$\begin{cases} (J_1 + (M_1 + M_2) \cdot r_1^2) \cdot \dot{X}_4 + M_2 \cdot r_1 \cdot L_0 \cdot \dot{X}_6 + k_1 \cdot X_4 = U_1, \\ (J_2 + M_2 \cdot r_2^2) \cdot \dot{X}_5 + k_2 \cdot X_5 = U_2, \\ M_2 \cdot r_1 \cdot L_0 \cdot \dot{X}_4 + M_2 \cdot L_0^2 \cdot \dot{X}_6 + M_2 \cdot L_0 \cdot g \cdot X_3 + k_3 \cdot X_6 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Построим графики переходных процессов для двух систем дифференциальных уравнений (2) и (6), где  $\alpha$  можно определить как  $\alpha = \arcsin\left(\frac{X_1 - X_2}{L}\right)$ :

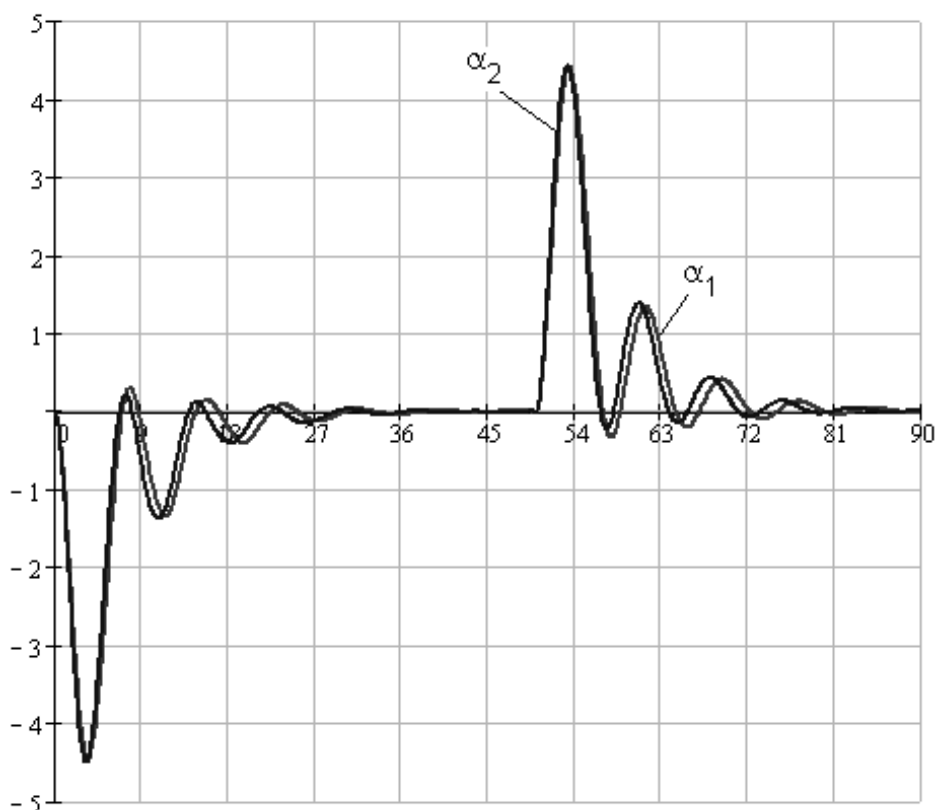


Рис.2. Графики изменения угла отвесного положения груза нелинейной системы ( $\alpha_1$ ) и линеаризованной системы ( $\alpha_2$ )

#### Вывод:

- из полученных графиков видно, что переходные процессы нелинейной системы уравнений и линеаризованной системы уравнений существенно не отличаются;
- полученная система дифференциальных уравнений (6) может быть использована для моделирования работы крана при одновременном перемещении тележки и привода подъема.

#### Литература.

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика- М.: Наука, 1973 г.
2. Дорф.Р., Бишоп Р. Системы автоматического управления. Москва, 2002 г.