Мокин Б.И.
Мокин А.Б.

Украина
Винница

Винницкий национальный технический университет

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КВАЗИОПТИМАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОПРИВОДА ТРАМВАЯ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ НА СКОРОСТЬ, УСКОРЕНИЕ И РЫВОК

Введение. В работах [1, 2] авторов данной статьи решена вариационная задача оптимизации электропривода трамвая по критерию минимума потерь электроэнергии в якорных цепях и получены математические модели процессов изменения угловой скорости вращения роторов приводных двигателей и процессов изменения тока в их якорных цепях в оптимальном режиме. В работе [3] эта же задача решена с учетом ограничений по угловой скорости вращения роторов приводных двигателей и получены математические модели их квазиоптимального движения.

Постановка задачи исследования.

Целью настоящей работы является получение математических моделей для угловой скорости вращения роторов приводных двигателей трамвая в задаче оптимизации по тому же критерию, но с учетом не только ограничений по скорости, но и ограничений по ускорению и рывку, которые накладываются на параметры движения транспортных средств, перевозящих людей.

Решение задачи. Будем исходить из того, что задача оптимизации электропривода трамвая по критерию минимума потерь электроэнергии в якорных цепях с учетом ограничений по угловой скорости уже решена и получена математическая модель квазиоптимального движения в виде, представленном в работе [3], т.е. в виде:

$$\nu_{\text{ко}}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{a_1^2}{4\lambda_0^{\text{ПР}}\cdot b_1}\cdot\left(\dfrac{1}{b_1\cdot\left(1-b_1\cdot\left(C^{\text{ПР}}+\lambda_0^{\text{ПР}}\cdot\tau\right)\right)}-\dfrac{1}{b_1}-\left(C^{\text{ПР}}+\lambda_0^{\text{ПР}}\cdot\tau\right)\right)-\\ -\mu_0\cdot\tau+C_1,\quad \text{для}\quad \tau\in[0,\tau_1],\\ 1,\quad \text{для}\quad \tau\in(\tau_1,\tau_2),\\ \dfrac{4}{27a_2^2\cdot\lambda_0^{\text{УГ}}}\cdot\left(b_2^3\cdot\left(C^{\text{УГ}}+\lambda_0^{\text{УГ}}\cdot\tau\right)+\dfrac{3b_2}{C^{\text{УГ}}+\lambda_0^{\text{УГ}}\cdot\tau}-\dfrac{1}{\left(C^{\text{УГ}}+\lambda_0^{\text{УГ}}\cdot\tau\right)^2}\right)-\\ -\mu_0\cdot\tau+C_2,\quad \text{для}\quad \tau\in[\tau_2,\tau_k],\end{cases}\qquad (1)$$

где $\nu_{\text{ко}}(\tau)$ – угловая скорость вращения роторов приводных двигателей трамвая в квазиоптимальном режиме (КО), выраженная в относительных единицах; μ_0 – относительный момент нагрузки на валу ротора приводного двигателя; a_1, a_2, b_1, b_2 – коэффициенты математической модели кривой намагничивания двигателя постоянного тока с последовательным возбуждением, представленной совокупностью отрезков прямой и параболы [4]; λ_0 – неопределенный множитель Лагранжа; C, C_1, C_2 – постоянные интегрирования, определяемые из начальных и граничных условий, а также условия прохождения трамваем заданного пути между остановками; τ – безразмерное время; ПР – верхний индекс, относящийся к параметрам движения на участке «пуск – разгон»; УТ – верхний индекс, относящийся к параметрам движения на участке «установившийся режим – торможение».

График движения, заданного моделью (1), представлен на рисунке 1 (верхняя кривая).

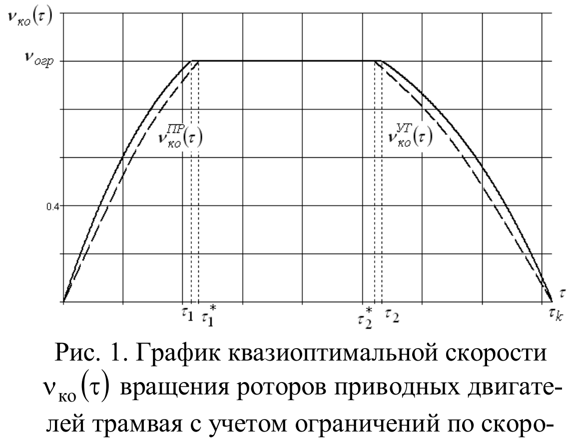

Рис. 1. График квазиоптимальной скорости $\nu_{\text{ко}}(\tau)$ вращения роторов приводных двигателей трамвая с учетом ограничений по скорости (для номинальной скорости $\nu_{\text{огр}}=1$).

Пусть заданы ограничения на ускорение —

$$\dot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{ПР}}(0)\le\dot{\nu}_0,\qquad (2)$$

$$\dot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{УТ}}(\tau_k)\le\dot{\nu}_k,\qquad (3)$$

а также на рывок

$$\ddot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{ПР}}(0)\le\ddot{\nu}_0,\qquad (4)$$

$$\ddot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{УТ}}(\tau_k)\le\ddot{\nu}_k\qquad (5)$$

при трогании ($\tau=0$) и торможении трамвая ($\tau=\tau_k$).

Установим, как изменится математическая модель (1), если после ее дифференцирования дважды и подстановки в результаты дифференцирования значений

$\tau = 0$ и $\tau = \tau_k$ окажется, что все неравенства (2) – (5) или хотя бы одно из них не будут выполняться.

Для удобства дифференцирования подставим в модель (1) численные значения всех ее параметров $\{a_1, a_2, b_1, b_2, \lambda_0, C, C_1, C_2, \mu\}$ и приведем ее к виду:

$$\nu_{\text{ко}}(\tau) = \begin{cases} \dfrac{k_1^{\text{ПР}}}{a_1^{\text{ПР}} + a_2^{\text{ПР}} \cdot \tau} + k_2^{\text{ПР}} + k_3^{\text{ПР}} \cdot \tau, \quad \tau \in [0, \tau_1], \\ 1, \quad \tau \in (\tau_1, \tau_2), \\ k_1^{\text{УТ}} + k_2^{\text{УТ}} \cdot \tau + \dfrac{k_3^{\text{УТ}}}{a_1^{\text{УТ}} + a_2^{\text{УТ}} \cdot \tau} + \dfrac{k_4^{\text{УТ}}}{\left(a_1^{\text{УТ}} + a_2^{\text{УТ}} \cdot \tau\right)^2}, \quad \tau \in [\tau_2, \tau_k], \end{cases} \tag{6}$$

где k_1, k_2, k_3, k_4 и a_1, a_2 с индексами «ПР» и «УТ» – это числа.

Представим верхнее и нижнее соотношения в модели (6) разложениями в ряды Тейлора в окрестности точек $\tau = 0$ и $\tau = \tau_k$, оставив в этих разложениях только первых три члена, т.е.

$$\nu_{\text{ко}}^{\text{ПР}}(\tau) \approx \nu_{\text{ко}}^{\text{ПР}}(0) + \dot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{ПР}}(0) \cdot \tau + \frac{\ddot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{ПР}}(0)}{2} \cdot \tau^2, \tag{7}$$

$$\nu_{\text{ко}}^{\text{УТ}}(\tau) \approx \nu_{\text{ко}}^{\text{УТ}}(\tau_k) + \dot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{УТ}}(\tau_k) \cdot (\tau - \tau_k) + \frac{\ddot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{УТ}}(\tau_k)}{2} \cdot (\tau - \tau_k)^2. \tag{8}$$

Из уравнений (7), (8) следует, что

$$\dot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{ПР}}(\tau) \approx \dot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{ПР}}(0) + \ddot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{ПР}}(0) \cdot \tau, \tag{9}$$

$$\ddot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{ПР}}(\tau) \approx \ddot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{ПР}}(0), \tag{10}$$

$$\dot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{УТ}}(\tau) \approx \dot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{УТ}}(\tau_k) + \ddot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{УТ}}(\tau_k) \cdot (\tau - \tau_k), \tag{11}$$

$$\ddot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{УТ}}(\tau) \approx \ddot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{УТ}}(\tau_k), \tag{12}$$

где (в обозначениях модели (6)):

$$\nu_{\text{ко}}^{\text{ПР}}(0) = \frac{1}{a_1^{\text{ПР}}} \cdot k_1^{\text{ПР}} + k_2^{\text{ПР}} = 0, \tag{13}$$

$$\nu_{\text{ко}}^{\text{УТ}}(\tau_k) = k_1^{\text{УТ}} + k_2^{\text{УТ}} \cdot \tau_k + \frac{k_3^{\text{УТ}}}{a_1^{\text{УТ}} + a_2^{\text{УТ}} \cdot \tau_k} + \frac{k_4^{\text{УТ}}}{\left(a_1^{\text{УТ}} + a_2^{\text{УТ}} \cdot \tau_k\right)^2} = 0, \tag{14}$$

$$\dot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{ПР}}(0) = -\frac{a_2^{\text{ПР}}}{\left(a_1^{\text{ПР}}\right)^2} \cdot k_1^{\text{ПР}} + k_3^{\text{ПР}}, \tag{15}$$

$$\ddot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{ПР}}(0) = \frac{2 \cdot \left(a_2^{\text{ПР}}\right)^2 \cdot k_1^{\text{ПР}}}{\left(a_1^{\text{ПР}}\right)^3}, \tag{16}$$

$$\dot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{УТ}}(\tau_k) = k_2^{\text{УТ}} - \frac{a_2^{\text{УТ}} \cdot k_3^{\text{УТ}}}{\left(a_1^{\text{УТ}} + a_2^{\text{УТ}} \cdot \tau_k\right)^2} - \frac{2 \cdot k_4^{\text{УТ}} \cdot a_2^{\text{УТ}}}{\left(a_1^{\text{УТ}} + a_2^{\text{УТ}} \cdot \tau_k\right)^3}, \tag{17}$$

$$\ddot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{УТ}}(\tau_k) = \frac{2 \cdot \left(a_2^{\text{УТ}}\right)^2 \cdot k_3^{\text{УТ}}}{\left(a_1^{\text{УТ}} + a_2^{\text{УТ}} \cdot \tau_k\right)^3} + \frac{8 \cdot \left(a_2^{\text{УТ}}\right)^2 \cdot k_4^{\text{УТ}}}{\left(a_1^{\text{УТ}} + a_2^{\text{УТ}} \cdot \tau_k\right)^4}. \tag{18}$$

А теперь предположим, что для модели (6) ограничения по ускорению (2), (3) выполняются, а по рывку (4), (5) не выполняются, т.е. имеет место

$$\ddot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{ПР}}(0) > \ddot{\nu}_0, \tag{19}$$

$$\ddot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{УТ}}(\tau_k) > \ddot{\nu}_k. \tag{20}$$

Потребуем ограничить рывок значениями $\ddot{\nu}_0$, $\ddot{\nu}_k$, что математически отразится равенствами

$$\ddot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{ПР}}(0) = \ddot{\nu}_0, \tag{21}$$

$$\ddot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{УТ}}(\tau_k) = \ddot{\nu}_k. \tag{22}$$

Подставив значения $\ddot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{ПР}}(0)$ и $\ddot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{УТ}}(\tau_k)$ из (21), (22) в уравнения (7), (8) с учетом соотношений (13), (14), получим:

$$\nu_{\text{ко}}^{\text{ПР}}(\tau) \approx \dot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{ПР}}(0)\cdot\tau + \frac{\ddot{\nu}_0}{2}\cdot\tau^2, \tag{23}$$

$$\nu_{\text{ко}}^{\text{УТ}}(\tau) \approx \dot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{УТ}}(\tau_k)\cdot(\tau-\tau_k) + \frac{\ddot{\nu}_k}{2}\cdot(\tau-\tau_k)^2. \tag{24}$$

Очевидно, что если начальная и конечная ветви графика кривой $\nu_{\text{ко}}(\tau)$ будут иметь вид (23), (24) (рис. 1), то ограничения по рывку (4), (5) уже будут выполняться, но вследствие того, что в соотношениях (23), (24) коэффициенты при τ^2 и $(\tau-\tau_k)^2$ будут меньшими, чем в соотношениях (7), (8), эти ветви пройдут ниже соответствующих ветвей модели (6), а точки τ_1 и τ_2 их встречи с ограничением по скорости

$$\nu_{\text{ко}}(\tau) = \nu_{\text{огр}} \tag{25}$$

сместятся в положения τ_1^*, τ_2^* (рис. 1), которые легко найти из уравнений

$$\nu_{\text{огр}} = \dot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{ПР}}(0)\cdot\tau_1^* + \frac{\ddot{\nu}}{2}\cdot\left(\tau_1^*\right)^2, \tag{26}$$

$$\nu_{\text{огр}} = \dot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{УТ}}(\tau_k)\cdot\left(\tau_1^*-\tau_k\right) + \frac{\ddot{\nu}_k}{2}\cdot\left(\tau_1^*-\tau_k\right)^2, \tag{27}$$

получаемых подстановкой условия (25) в соотношения (23), (24). Напомним, что для ограничения скорости на номинальном уровне $\nu_{\text{огр}} = 1$.

Из приведенных выкладок следует, что в рассмотренном случае для формирования квазиоптимального движения электропривода вместо модели (6) следует использовать модель

$$\nu_{\text{ко}}(\tau) = \begin{cases} \dot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{ПР}}(0)\cdot\tau + \dfrac{\ddot{\nu}_0}{2}\cdot\tau^2, & \tau\in\left[0,\tau_1^*\right], \\ 1, & \tau\in\left(\tau_1^*,\tau_2^*\right), \\ \dot{\nu}_{\text{ко}}^{\text{УТ}}(\tau_k)\cdot(\tau-\tau_k) + \dfrac{\ddot{\nu}_k}{2}\cdot(\tau-\tau_k)^2, & \tau\in\left[\tau_2^*,\tau_k\right] \end{cases}. \tag{28}$$

Аналогичным образом строится и алгоритм учета ограничений по ускорению, а также алгоритм учета ограничений одновременно и по ускорению, и по рывку.

Естественно, что при переходе от оптимальной модели к квазиоптимальной нам потребуется большее значение времени τ_k, за которое трамвай реализует перемещение от одной остановки до следующей. Но получение алгоритма его расчета — это уже другая задача, решение которой будет представлено в последующих публикациях.

Выводы. Предложен метод, с помощью которого получены математические модели квазиоптимального движения роторов приводных двигателей трамвая, учитывающие ограничения по скорости, ускорению и рывку.

Литература.

1. Мокін Б.І., Мокін О.Б. Математичні моделі в задачі оптимізації електропривода трамвая при його сталому навантаженні // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2004. – № 2. – С. 57–61.
2. Мокін Б.І., Мокін О.Б. Друга ітерація алгоритму побудови математичних моделей в задачі оптимізації електропривода трамвая при його сталому навантаженні // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2004. – № 5. – С. 43–49.
3. Мокін Б.І., Мокін О.Б. Квазіоптимальний закон зміни кутової швидкості обертання вала ротора електродвигуна постійного струму послідовного збудження системи електропривода трамвая в режимі сталого навантаження // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2007. – № 2. – С. 29–33.
4. Мокін Б.І., Мокін О.Б. Математична модель кривої намагнічування електричного двигуна постійного струму з послідовним збудженням для задач оптимізації // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2004. – № 1. – С. 45–47.