

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИНАМИЧЕСКИХ ЗВЕНЬЕВ С ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНЫХ ПОРЯДКОВ

Введение. В настоящее время в иностранных научных изданиях наблюдается повышенный интерес к дробному исчислению вообще [1-2] и применению производных и интегралов дробных порядков в различных областях науки и техники [3-5], в том числе и в теории управления [6-9]. Применение в системах управления электроприводами ПИД регуляторов, реализующих дробномерные законы управления, позволяет снизить перерегулирование, увеличить быстродействие и повысить запас устойчивости по сравнению с аналогичными системами, реализующими классические законы управления. Техническая реализация таких производных и интегралов может осуществляться несколькими способами: на основании аппроксимационных зависимостей Грюнвальда [2], с использованием цепных дробей [7] и путем применения преобразования Фурье [5].

Постановка задач исследования. Задачей настоящего исследования является анализ частотных свойств динамических звеньев с дробномерными операторами дифференцирования.

Результаты исследования. Первые два способа являются приближенными, более того, возникает сомнение в корректности использования аппроксимационных зависимостей для реализации законов управления, вызванное зависимостью аппроксимационных коэффициентов [2] от времени работы системы. В то же время применение цепных дробей в системах управления требует дополнительных исследований, связанных с определением их количества, достаточного для точной реализации заданного закона изменения сигнала.

Из выполненного анализа следует, что наиболее перспективным при реализации нецелочисленных производных является использование преобразований Фурье.

Для определения дробной производной необходимо выполнить следующие действия:

1. Для известного сигнала осуществить прямое преобразование Фурье

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \tag{1}$$

2. Определить Фурье-изображение производной $\frac{d^\lambda}{dt^\lambda} f(t)$

$$F_D(j\omega) = (j\omega)^\lambda F(j\omega), \text{ где } \lambda - \text{порядок производной.} \tag{2}$$

В случае интегрирования сигнала выражение (2) должно быть представлено следующим образом

$$F_D(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^\lambda} F(j\omega) \tag{3}$$

3. Для изображений (2) или (3) выполнить обратное преобразование Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \tag{4}$$

Таким образом возникает следующий алгоритм реализации системы управления, в которой используются нецелочисленные интегралы и производные: для сигналов задания и обратных связей находят Фурье-изображения, регуляторы осуществляют с ними все необходимые преобразования и определяют изображение управляющего воздействия, а затем происходит переход к его оригиналу. Предложенный алгоритм достаточно просто технически реализуется в соответствии с алгоритмами быстрого преобразования Фурье на современных DSP контроллерах.

Для определения частотных свойств динамических звеньев с дробно-мерными оператором дифференцирования введем обобщенную частотную передаточную функцию вида

$$W(j\omega) = \frac{K_{10}(j\omega)^\lambda + K_{00}}{K_{31}(j\omega) + K_{21}(j\omega)^{2\lambda} + K_{11}(j\omega)^\lambda + K_{01}}, \lambda \in Z \tag{5}$$

Из выражения (5) в зависимости от коэффициентов K_{ij} может быть получен ряд передаточных функций, приведенных в табл. 1.

Таблица 1. Частотные передаточные функции

№	Значения коэффициентов	Частотная передаточная функция	№	Значения коэффициентов	Частотная передаточная функция
1	$K_{10} = K_{01} = 1$	$W_1(j\omega) = (j\omega)^\lambda$	2	$K_{11} = K_{00} = 1$	$W_2(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^\lambda}$

3	$K_{11} = K_{00} = K_{01} = 1$	$W_3(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^\lambda + 1}$	4	$K_{21} = K_{11} = K_{00} = K_{01} = 1$	$W_4(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^{2\lambda} + (j\omega)^\lambda + 1}$
5	$K_{31} = K_{11} = K_{00} = K_{01} = 1$	$W_5(j\omega) = \frac{1}{(j\omega) + (j\omega)^\lambda + 1}$	6	$K_{31} = K_{11} = K_{10} = K_{01} = 1$	$W_6(j\omega) = \frac{(j\omega)^\lambda}{(j\omega) + (j\omega)^\lambda + 1}$

Логарифмические частотные характеристики динамических звеньев с передаточными функциями $W_1(j\omega) \dots W_6(j\omega)$ для значений степеней $\lambda = 1/5, 1/3, 1/2, 2/3, 1$ показаны на рис. 1-6.

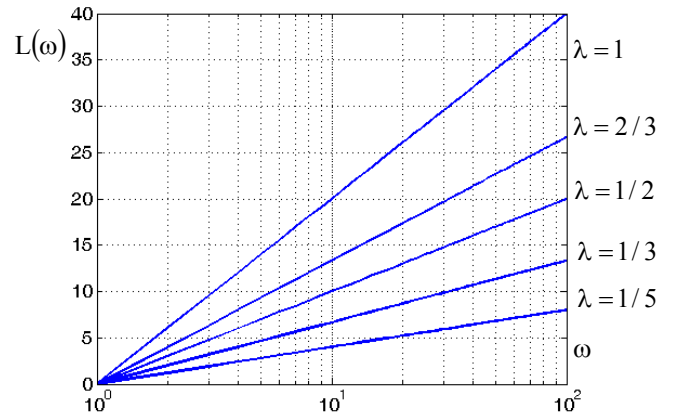
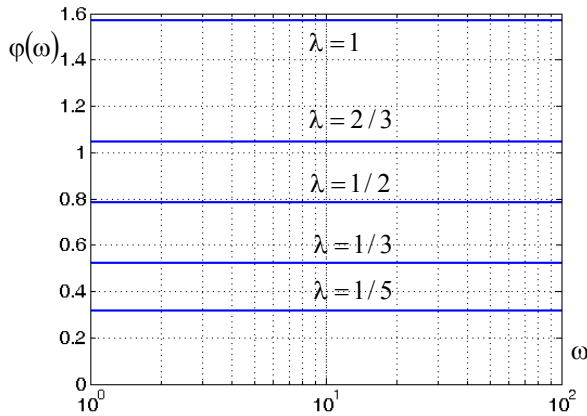


Рис. 1. Частотные характеристики динамического звена $W_1(j\omega)$

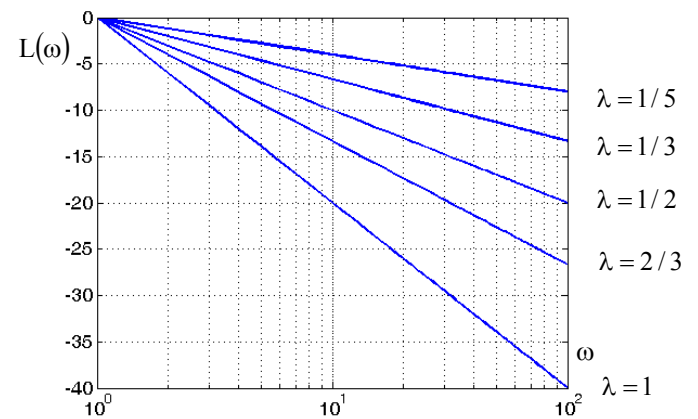
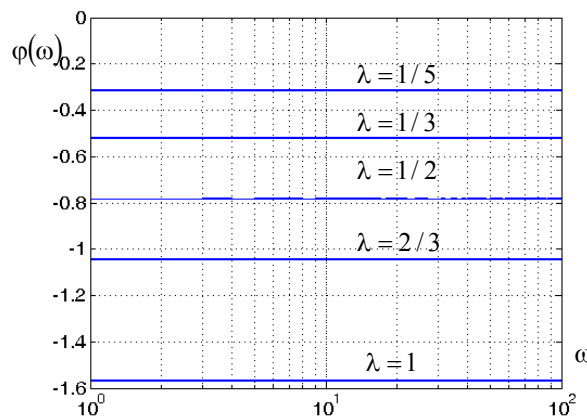


Рис. 2. Частотные характеристики динамического звена $W_2(j\omega)$

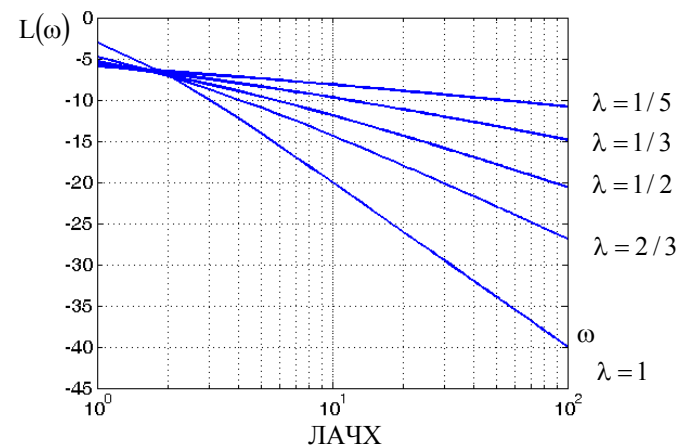
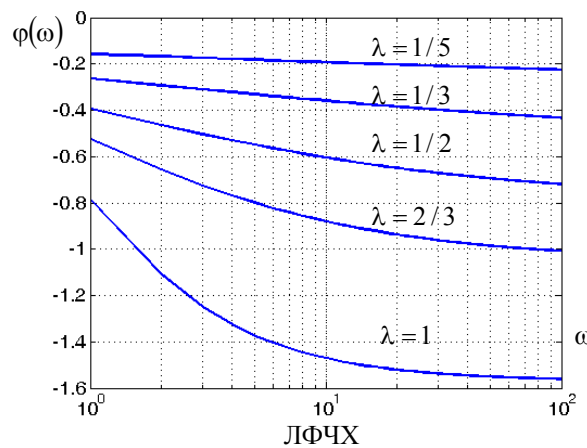


Рис. 3. Частотные характеристики динамического звена $W_3(j\omega)$

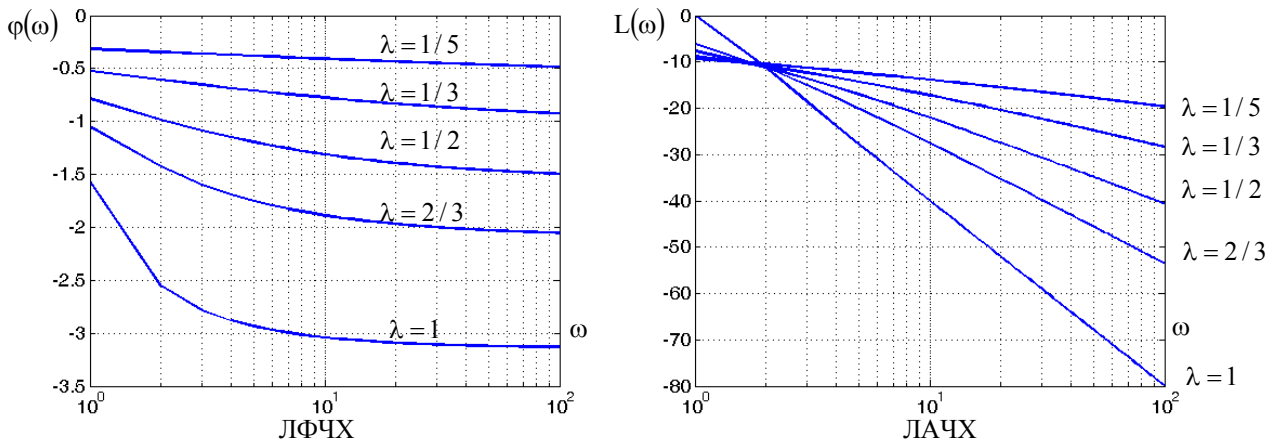


Рис.4. Частотные характеристики динамического звена $W_4(j\omega)$

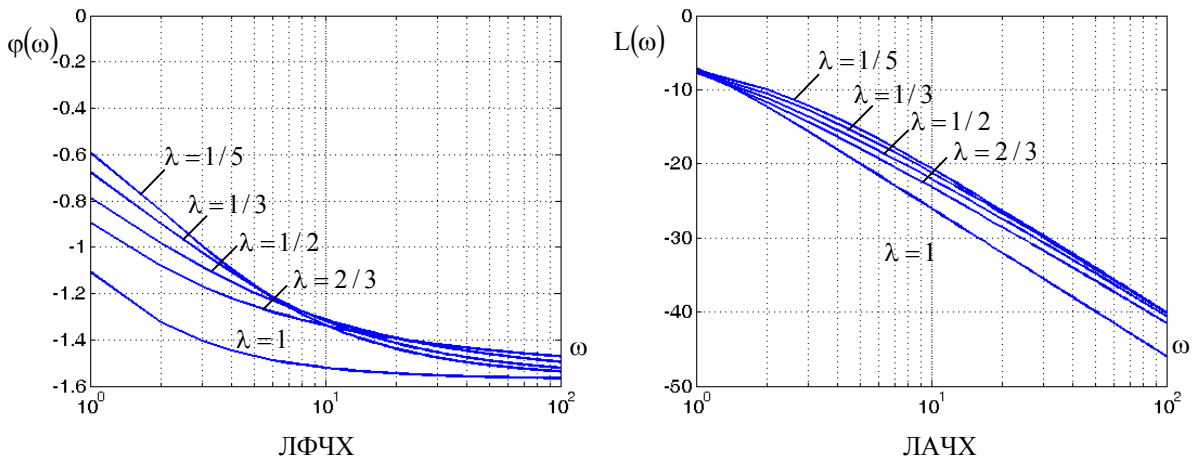


Рис.5. Частотные характеристики динамического звена $W_5(j\omega)$

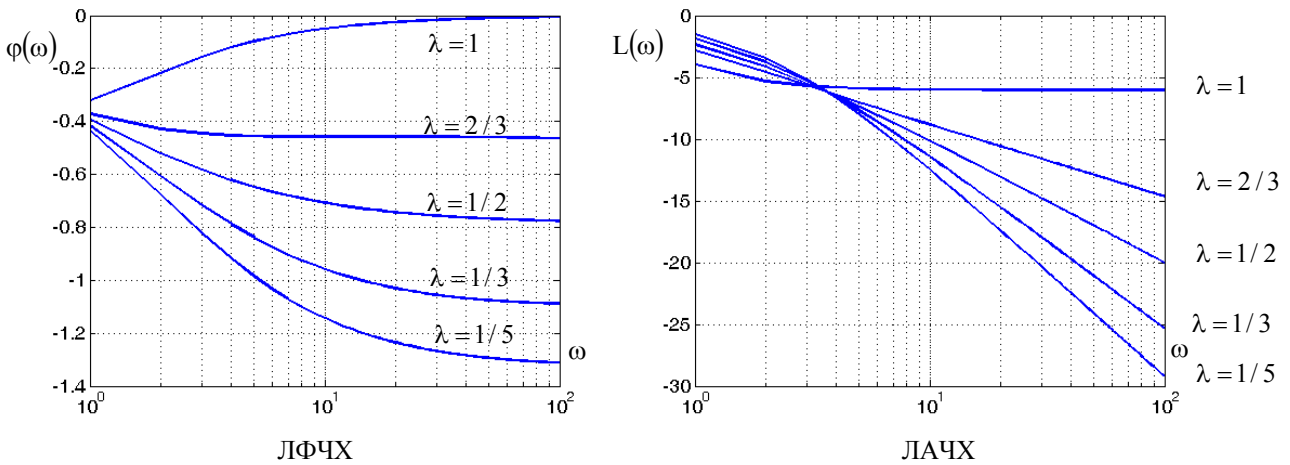


Рис.6. Частотные характеристики динамического звена $W_6(j\omega)$

Если показатель степени λ будет не вещественным, а комплексным, то графики частотных характеристик будут существенно отличаться от известных (рис.7)

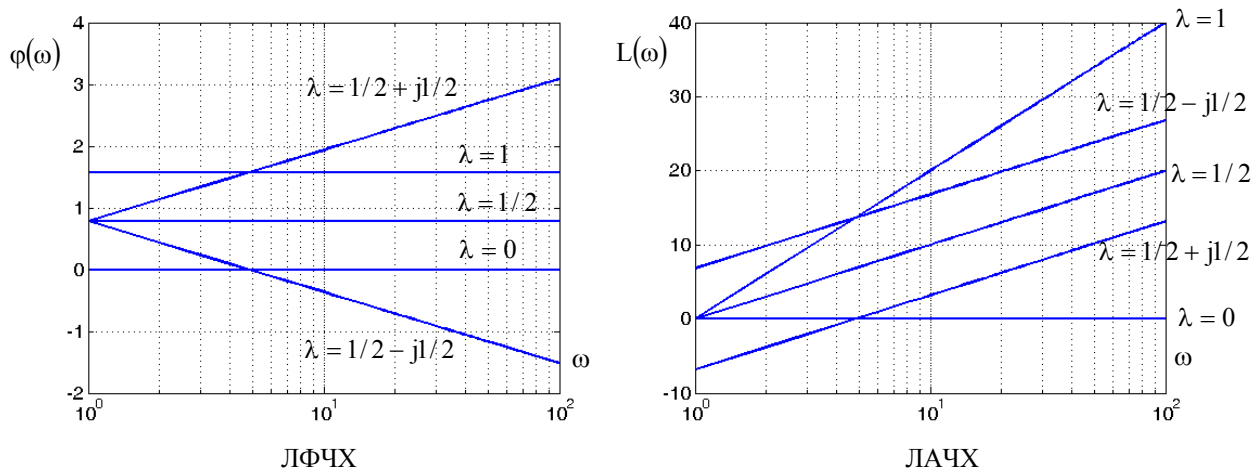


Рис.7. Частотные характеристики динамического звена $W_1(j\omega)$ с комплексным показателем степени λ

Выводы. Как следует из анализа полученных зависимостей, использование оператора дифференцирования в дробной степени позволяет существенно изменить вид частотной характеристики. При этом появляется возможность путем применения полуинтегрирующих и полудифференцирующих звеньев получать фазовые сдвиги, отличные от $\frac{\pi}{2}$ и наклоны асимптот, не кратные 20 дБ/дек. Очевидно, что и фазовый сдвиг и наклон асимптоты зависит от показателя степени производной и может быть определен на основании следующих зависимостей

$$\varphi_{\max} = \lambda \frac{\pi}{2}, \quad \left| \frac{\Delta L}{\Delta \omega} \right|_{\max} = 20|\lambda|. \quad (6)$$

Как следует из анализа рис. 3 и 4, с уменьшением числа λ уменьшается не только величина фазового сдвига при бесконечно большой частоте, но и скорость его нарастания. Одновременное уменьшение наклона асимптот ЛАЧХ создает предпосылки к построению фильтрующих устройств, свойства которых отличаются от известных.

Наиболее примечательной является комбинация в передаточной функции дробных и целочисленных степеней оператора дифференцирования и использование операторов дифференцирования, порядок которых является комплексным. В этом случае удастся получить нелинейные асимптоты ЛАЧХ и при заранее заданном желаемом максимальном фазовом сдвиге изменять темп его нарастания на постоянные времени (рис.5). Аналогичная комбинация в интегро-дифференцирующих звеньях с частотной передаточной функцией $W_0(j\omega)$ позволяет реализовывать различные корректирующие цепи, обеспечивающие наперед заданные показатели качества регулирования.

Литература

1. R. Ayala, A. Tuesta Introduction to the Concepts and Applications of Fractional and Variable Order Differential Calculus, электронный документ, <http://arxiv.org>
2. K.Oldham, J.Spanier The fractional calculus, Academic Press Inc, San Diego, 1974, 240p
3. Xiaorang Li, Matt Davison, and Chris Essex, On the Concept of Local Fractional Differentiation, The University of Western Ontario, Canada, , электронный документ
4. Igor Podlubny, Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation, Fractional Calculus and Applied Analysis, Vol.5, №4, 2002
5. Hany Farid, Discrete-Time Fractional Differentiation from Integer Derivatives, TR2004-528, Dartmouth College, Computer Science
6. Ivo Petras, Lubomir Dorcak, Imrich Kostial, Control quality enhancement by fractional order controllers Acta Montanistica Slovaca Rocnik 3 (1998), 2, 143-148
7. Igor Podlubny1, Ivo Petras1, Blas M. Vinagre2, YangQuan Chen3, Paul O'Leary4 and Lubomir Dorcak, Realization of fractional order controllers, Acta Montanistica Slovaca Rocnik 8 (2003), cislo 4
8. Ramiro S. Barbosa, J. A. Tenreiro Machado, Implementation of Discrete-Time Fractional-Order Controllers based on LS Approximations, Acta Polytechnica Hungarica Vol. 3, No. 4, 2006
9. Jun-Yi Cao and Bing-Gang Cao, Design of Fractional Order Controller Based on Particle Swarm Optimization, Design of Fractional Order Controller Based on Particle Swarm Optimization International Journal of Control, Automation, and Systems, vol. 4, no. 6, pp. 775-781, December 2006