Бойчук Б.Г. ***Україна***
Паранчук Я.С. ***Львів***

Національний університет "Львівська політехніка"

АНАЛІЗ ДИНАМІКИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ 4-ГО ПОРЯДКУ ЗА КОЕФІЦІЄНТАМИ ЇХ СТРУКТУРОВАНИХ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ ПОЛІНОМІВ

Вступ. При дослідженнях систем автоматичного керування (САК) важливо, щоб кількість досліджуваних варійованих параметрів була мінімальною, а результати досліджень мали узагальнювальний характер, тобто щоб вони могли використовуватися для широкого ряду часткових варіантів. Прикладом цього є представлення передатних функцій в формі Вишнеградського, в якому проводиться масштабування передатних функцій за амплітудою та за частотою (часом). При цьому, якщо отримані у певних відносних одиницях найстарший і наймолодший коефіцієнти характеристичного полінома мають якесь фізичне трактування, то про проміжні коефіцієнти сказати щось конкретного не можна. Ця обставина обмежує можливості аналізу і синтезу. Отримання рішень, в яких цей недолік був би зменшений або ліквідований, дозволило б розширити можливості узагальнення результатів аналізу і синтезу САК. Варіант представлення всіх коефіцієнтів характеристичних поліномів через сукупність певних відносних параметрів наводиться в роботах [1,2], де пропонується процедура певного структурування передатних функцій, на підставі якої отримуються ці відносні параметри.

Постановка задач дослідження.

Метою дослідження є застосування структурованих передатних функцій та їх узагальнених первісних коефіцієнтів для аналізу САК 4-го порядку. В процесі дослідження необхідно:

- представити ряд стандартних характеристичних поліномів 4-го порядку через первісні коефіцієнти та провести аналіз отриманих результатів;
- за отриманими величинами первісних коефіцієнтів аналізованих поліномів виділити ті з них, в яких порядок може бути знижений, розрахувати перехідні функції повного та апроксимованого варіантів та проаналізувати отримані результати, тобто отримати інтегральну оцінку відхилення перехідної функції системи повного і пониженого порядків;
- розрахувати границі областей стійкості САК 4-го порядку для всіх реально можливих варіантів числових значень первісних коефіцієнтів.

Матеріали дослідження. Пропонована в роботах [1,2] процедура структурування характеристичного полінома використовує те, що поліном $N(s) = A_n s^n + A_{n-1}s^{n-1} + ... + A_1 s + 1$ можна записати в наступній формі:

$$N(s) = A_1 s\left(\frac{A_2}{A_1}s...\left(\frac{A_{n-1}}{A_{n-2}}s\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}s+1\right)+1\right)...+1\right)+1.$$

Далі, позначивши $\frac{A_n}{A_{n-1}} = T_0$, $\frac{A_{n-1}}{A_{n-2}} = T_1$, …, $A_1 = T_{n-1}$, а потім $\frac{T_i}{T_{i-1}} = a_i$, де i =1, 2, 3, …, n-1, досліджуваний характеристичний поліном можна звести до вигляду:

$$N(s) = a_{n-1}a_{n-2}...a_1T_0 s(a_{n-2}...a_1T_0 s...(a_1T_0 s(T_0 s+1)+1)...+1)+1 . \quad (1)$$

Після розкриття дужок в (1) ми отримаємо вираз, коефіцієнти якого є добутками різних степенів параметрів a_i. Зрозуміло, що передатна функція з характеристичним поліномом (1) може відповідати різним варіантам структурних схем систем автоматичного кнрування. Як окремий випадок, такою структурою може бути відома структурна схема систем підпорядкованого регулювання (СПР), для якої параметри отриманого виразу мають конкретний сенс. Величини T_i – це сталі часу інтегрування контурів системи підпорядкованого регулювання, а коефіцієнти a_i – відношення цих сталих часу (тобто сталих часу сусідніх контурів). Якщо ж структурна схема САК відрізняється від структури СПР, то ці параметри такого конкретного змісту можуть не мати.

В роботі [1] на основі порівняння широкого ряду стандартних характеристичних поліномів зроблено висновок, що значення коефіцієнтів a_i, які суттєво впливають на показники динаміки, належать обмеженому діапазону. Для систем 3-го порядку без нулів показано, що вони лежать в межах 0.25...4.0, і при великих їх значеннях порядок системи може бути знижений шляхом виключення (усунення) контуру (реального чи віртуального) з меншою інерційністю зі структури системи. Ця обставина дозволяє зробити висновок про універсальність коефіцієнтів a_i, тому пропонується називати їх первісними або елементарними. Для систем n-го порядку їх кількість становить n-1. Масштабування за амплітудою та часом (частотою), яке робиться при представленні характеристичного рівняння в формі Вишнеградського для зменшення кількості досліджуваних коефіцієнтів, також дає змогу отримати n-1 незалежних відносних коефіцієнтів замість n+1 коефіцієнтів початкового рівняння (від A_0 до A_n), але, крім нульового та останнього, ці відносні коефіцієнти не мають жодного фізичного трактування, і чи є котрийсь з них надто великим, чи надто малим, судити неможливо. У нашому ж випадку ці первісні коефіцієнти мають конкретний сенс – це відношення сталих часу сусідніх контурів (хоча, можливо, віртуальних), і діапазон їх числових значень, які визначально впливають на динамічні показники системи, є досить вузьким. Завдяки цьому можна для ряду випадків прорахувати потрібні показники всіх реально можливих варіантів, представивши результати в формі узагальнених таблиць або графіків. Таким чином, описана процедура структурування дає змогу розкласти коефіцієнти характеристичних поліномів на певні елементарні множники. Описаний підхід дозволяє проводити дослідження систем з різною структурою, використовуючи універсальні параметри однієї регулярної структури - структури системи підпорядкованого регулювання.

Як зазначалося, за значеннями первісних коефіцієнтів структурованих характеристичних поліномів можна робити висновок про коректність виконання процедури пониження порядку системи. Виконаємо такі дослідження для приведеного в [3] ряду стандартних характеристичних поліномів 4-го порядку, отриманих різними авторами з умов забезпечення тих чи інших критеріїв якості чи динамічних властивостей системи автоматичного керування. Привівши коефіцієнти цих поліномів до єдиної форми (1), обчислимо для кожного з них значення первісних коефіцієнтів. Результати обчислень наведені в таблиці 1.

Таблиця 1 - Стандартні характеристичні поліноми 4-го порядку та відповідні їм значення первісних коефіцієнтів

Вид характеристичного полінома (критерій, характер розподілу коренів)		Значення первісних коефіцієнтів		
№п.п.	Назва	a_1	a_2	a_3
1	Біноміальний ряд	2.67	2.25	2.67
2	Форма Батерворта (модульний оптимум)	2.00	1.70	2.00
3	Бесселя - Томсона	2.222	1.928	2.333
4	Комбінований Батерворта - Бесселя	1.667	1.5	2.0
5	Мінімум часу перехідного процесу	0.813	2.531	1.906
6	З кратними коренями	2.118	2.007	2.118
7	Найбільша швидкодія	1.779	1.984	2.063
8	ІТО (ІТАЕ, Грехема – Летропа)	1.297	2.039	2.144
9	Мінімум середньоквадратичної похибки (за Петровим)	0.333	**4.5**	1.333
10	Однакова відстань коренів від уявн. осі	1.754	2.031	2.024
11	Рівні проекції коренів на уявну вісь	2.331	1.957	2.331
12	З оптимальною імпульсною характеристикою	1.480	2.025	2.016
13	Батерворта - Томсона	2.077	1.782	2.118
14а	За Яворським №8 (всі корені комплексні)	2.015	**2.650**	2.015
14б	За Яворським №9 (всі корені комплексні)	2.003	**4.070**	2.003
14в	За Яворським №25 (старші корені комплексні)	**3.678**	**2.591**	2.122
14г	За Яворським №27 (старші корені комплексні)	1.522	2.056	2.807
14д	За Яворським №37 (молодший і старший корені дійсні)	2.294	2.031	2.589
15	Оптимальні за швидкодією	1.96	2.041	1.96
16а	Чебишева. Нерівномірність АЧХ в смузі пропускання (0.5 дБ)	0.837	2.394	1.623
16б	Чебишева (1 дБ)	0.622	**2.991**	1.453
16в	Чебишева (3 дБ)	0.288	**5.757**	0.798
17а	Оптимальний за АЧХ з лін. фазою, відхилення фази від лін. закону 1^o	0.985	2.261	1.954
17б	Оптимальний за АЧХ з лін. фазою, відхилення фази від лін. закону 5^o	0.593	**3.226**	1.466
17в	Оптимальний за АЧХ з лін. фазою, відхилення фази від лін. закону 3^o	0.647	**2.988**	1.596
18а	Поліном Лежандра. Нерівномірність АЧХ у смузі пропускання 0.5 дБ	1.603	1.703	2.002
18б	Поліном Лежандра. Нерівномірність АЧХ у смузі пропускання 1 дБ	1.511	1.735	2.003
18в	Поліном Лежандра. Нерівномірність АЧХ у смузі пропускання 3 дБ	1.288	1.847	1.984
19а	Параболічний. Абсциса фокуса 0	1.732	1.778	2.275
19б	Параболічний. Абсциса фокуса 3	1.494	1.988	2.499
19в	Параболічний. Абсциса фокуса 8	1.412	2.101	2.585
20	Апроксимація за Чебишевим. Осциляції фази 5^o	0.665	**3.456**	1.417

Як видно з отриманих результатів, для досить великої кількості стандартних характеристичних поліномів, які виведені різними авторами з умов забезпечення найрізноманітніших показників якості, числові значення їх первісних коефіцієнтів лежать в досить вузьких межах. Очевидно, що на якість САК впливають всі коефіцієнти разом, але не в однаковій мірі, тобто їх вплив на перехідну функцію не є однаковим для різних номерів контурів, тому порівнювати їх будемо для кожного контуру окремо. Найменше значення має a_1 = 0.288 для варіанту п.16в таблиці, найбільше - a_2 = 5.757 цього ж варіанту, але такі крайні значення є поодинокими. В цілому величини коефіцієнтів a_i таблиці лежать в таких межах: коефіцієнт a_1 – від 0.288 (п.16в) до 3.678 (п.14в), коефіцієнт a_2 – від 1.5 (п.4)до 5.757 (п.16в), коефіцієнт a_3 – від 1.333 (п.9) до 2.807 (п.14г). Аналізуючи наведені в таблиці 1 дані, можна також відзначити те, що великі і малі значення первісних коефіцієнтів присутні, як правило, разом, в тому самому характеристичному поліномі, причому малі – в попередньому (внутрішньому), великі – в наступному (зовнішньому) контурах. Пояснити це можна тим, що слабке демпфування в одному контурі (малий коефіцієнт a_i) повинне компенсуватися великим демпфуванням (значним значенням коефіцієнта a_i) наступного контуру. Це виразно простежується на прикладах варіантів 9, 16б, 16в, 17в.

Як зазначалося вище, великі значення первісних коефіцієнтів вказують на можливість пониження порядку характеристичного полінома. Це припущення підтвердилось при дослідженнях ряду стандартних характеристичних поліномів 3-го порядку, їх результати наводяться в [1].

Застосуємо запропонований підхід для систем 4-го порядку, дані яких наведені в таблиці 1. Тут великі значення коефіцієнтів a_i мають місце у варіантах 9, 14а, 14б, 14в, 16б, 16в, 17б, 17в, 20, в яких вони виділені потовщеним шрифтом. Досліджувалися основний варіант перехідної функції, яка відповідає даному характеристичному поліному 4-го порядку, і варіант системи 3-го порядку, у якій нехтувалася інерційність контуру, попереднього до даного великого коефіцієнта. Результати цих досліджень показані на рис.1а – рис.1м. Особливим є варіант 14в, який має два великих первісних коефіцієнти - a_1 і a_2. Тому для нього розглядалися 4 випадки: основний – система 4-го порядку, два випадки її апроксимації системою 3-го порядку - випадок, коли великим вважався a_2, і випадок, коли великим приймався коефіцієнт a_1, а також система 2-го порядку, коли великими вважаються обидва згадані коефіцієнти, що дає підставу знехтувати інерційностями відразу двох контурів. Результати для варіанту 14в наведені на рис.1г. На цьому рисунку попарно зливаються криві першого і третього, а також другого і четвертого випадків.

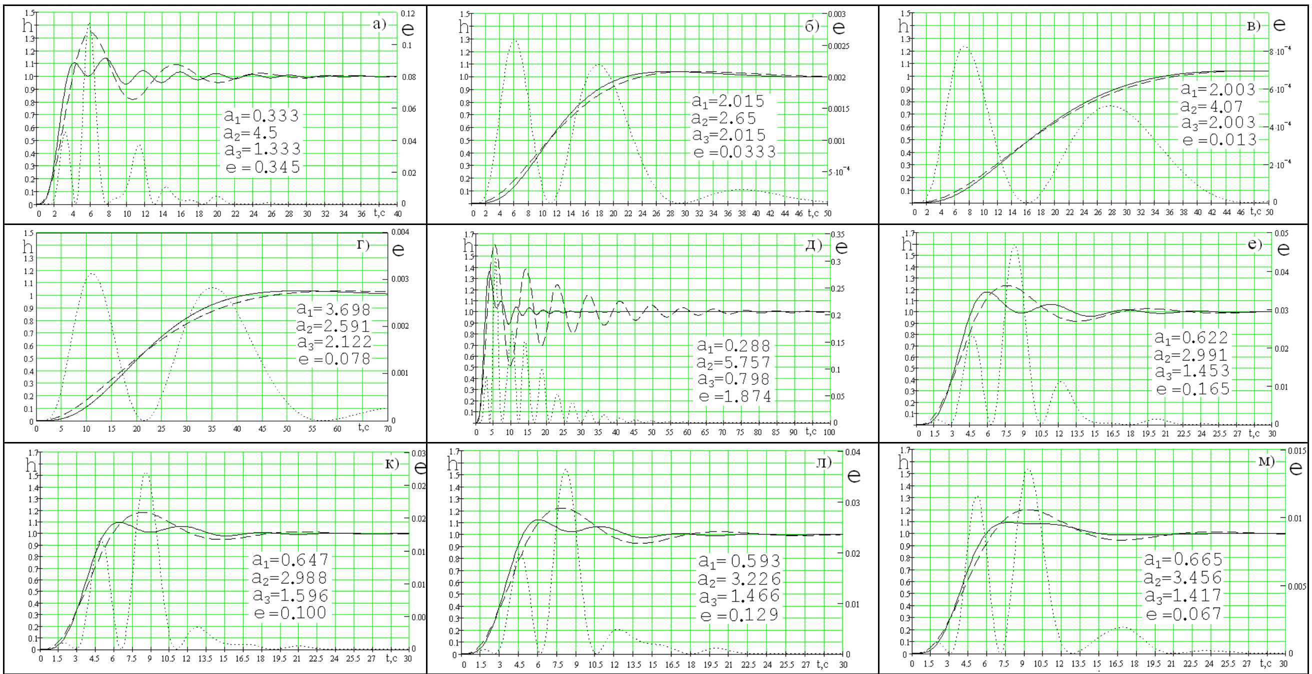

Рис.1.Перехідні функції вибраних варіантів для систем 4-го порядку (——), при зведенні їх до 3-го порядку (----), а також залежність квадрату похибки при такому наближенні систем (…..)

Основні перехідні функції (4-й порядок) на всіх рисунках показані суцільними лініями, наближені – штриховими. Координата часу прийнята у відносних одиницях t/T_0, де стала часу T_0 визначається як відношення A_n/A_{n-1}. Для всіх варіантів були також розраховані залежності квадрату похибки наближення $\mathbf{e(t)}^2$, що показані на рис.1 пунктирною лінією (масштаб похибки показаний на другій (правій) осі ординат). На кожній графічній області рис.1 показано значення первісних коефіцієнтів характеристичного полінома a_1, a_2 і a_3 даного варіанту, а також значення інтегральної середньоквадратичної похибки за перехідною функцією, що отримується при виконанні запропонованої процедури пониження порядку системи.

Аналіз отриманих результатів показує, що максимальна та мінімальна інтегральна середньоквадратична похибка наближення (апроксимації) серед розглянутих варіантів складає відповідно 1.874 (вар.16в), а мінімальна – 0.013 (варіант 14б). Найбільша амплітудна похибка складає 0.35 – 0.40 для варіантів 9 і 16 відповідно. Найкраще наближення мають варіанти 14а, 14б і 14в, середня точність наближення – у варіантах

16б, 17б, 17в і 20, і досить грубе наближення отримане для варіантів 9, 16в. Можна стверджувати, що в поліномах, які мають поряд з великими (більшими, ніж 2.0) також малі коефіцієнти (менші від 0.5), точність апроксимації є гіршою. Але в цілому можна сказати, що структурування характеристичних поліномів і використання їх первісних коефіцієнтів для оцінки можливості зниження порядку САК є досить ефективним підходом при аналізі динамічних властивостей систем автоматичного керування.

Переходячи до питань синтезу, слід згадати відоме положення акад. А.Є. Ішлінського про те, що правильно організована САК поводить себе як система третього або навіть другого порядку. З урахуванням всього сказаного вище можна стверджувати, що використання первісних коефіцієнтів, на наш погляд, може виявитися ефективним засобом для такої "правильної організації" систем автоматичного керування, а саме – в формуванні таких значень первісних коефіцієнтів, при яких порядок системи можна знизити до потрібного при одночасному забезпеченні потрібних показників якості. Зрозуміло, що прийнятність чи неприйнятність результатів зниження порядку системи залежать від конкретних вимог щодо точності такого наближення.

Універсальність первісних коефіцієнтів може дозволити прорахувати всі реально можливі варіанти і узагальнити їх у вигляді таблиць, графіків і т.п. Покажемо це на прикладі ідентифікації меж областей стійкості систем автоматичного керування 4-го порядку для реально можливих значень первісних коефіцієнтів a_i.

Умови стійкості за критерієм Гурвіца, представлені через первісні коефіцієнти, згідно з [1,2] мають вигляд: $a_1a_2 - 1 > 0$; $a_3(a_1a_2 - 1) - a_1 > 0$. З останньої умови витікає також, що $a_2a_3 - 1 > 0$. Тоді рівняння границь областей стійкості для різних коефіцієнтів a_i відповідно будуть: $a_1a_2 - 1 = 0$; $a_3(a_1a_2 - 1) - a_1 = 0$; $a_2a_3 - 1 = 0$. Графіки границь цих областей для різних поєднань величин коефіцієнтів a_1, a_2, a_3 в координатах (a_1, a_2) при різних сталих значеннях a_3, в координатах (a_1, a_3)при різних сталих значеннях a_2 і в координатах (a_2, a_3)при різних сталих значеннях a_1 ілюструються на рис.2.

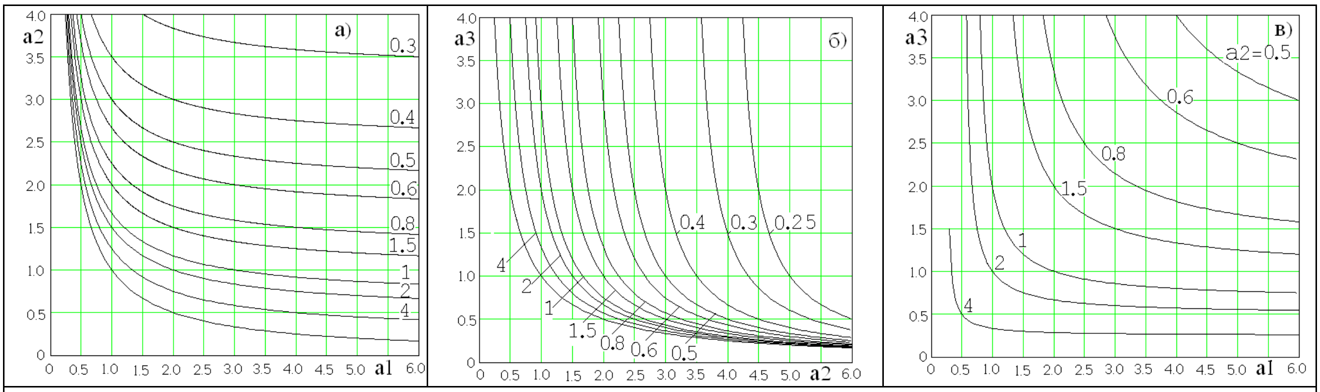

Рис.2. Лінії границь областей стійкості систем 4-го порядку для реально можливих значень первісних коефіцієнтів їх характеристичного полінома

Зона вправо-вгору від кожної кривої є областю параметрів, при яких досліджувана система стійка, вліво-вниз – область нестійкої роботи САК.

Висновки. Структурування характеристичних поліномів дає можливість розкласти їх коефіцієнти на елементарні (первісні) параметри, числові значення яких лежать в дуже вузькому діапазоні, завдяки чому з'являється можливість охопити розрахунками практично всі можливі варіанти. Така їх універсальність проілюстрована розрахунком ліній границь областей стійкості практично для всіх варіантів систем 4-го порядку, які реально можуть заслуговувати на увагу. Отримати подібний узагальнювальний результат за традиційного підходу було б неможливо. В статті також показано, що використання первісних коефіцієнтів може бути застосоване при вирішенні задач зниження порядку систем автоматичного керування. Отже, застосування процедури структурування характеристичних поліномів, а також використання первісних (елементарних) коефіцієнтів цих поліномів дозволить значно розширити можливості узагальнення результатів аналізу і синтезу систем автоматичного керування.

Література.

1. Бойчук Б.Г., Білозор І.М. Дослідження динамічних властивостей систем автоматичного керування за співвідношеннями коефіцієнтів їх характеристичних рівнянь // Електроінформ. - №2. - 2005. - С. 13-15.
2. Бойчук Б.Г., Лозинський О.Ю. Дослідження поведінки систем автоматичного керування за співвідношеннями коефіцієнтів їх характеристичних поліномів //Вісник Національного технічного "Харківський політехнічний інститут": Зб. наук. праць. Тематичний випуск. - 2006. – С.137-139.
3. Осичев А.В., Котляров В.О., Марков В.С. Стандартные распределения корней в задачах синтеза в электроприводе // Вісник ДТУ "ХПУ". "Проблеми автоматизованого електроприводу. Теорія і практика". – Харків: Основа. - 1997. - С.104-109.

Бойчук Б.Г., Паранчук Я.С. "Аналіз динаміки систем автоматичного керування 4-го порядку за коефіцієнтами їх структурованих характеристичних поліномів"

Досліджено динаміку систем автоматичного керування 4-го порядку шляхом представлення коефіцієнтів їх передатних функцій добутком певних узагальнених параметрів. На прикладі ряду стандартних характеристичних поліномів показана універсальність цих параметрів та можливість їх застосування для виконання процедури пониження порядку системи автоматичного керування. Розраховано границі областей стійкості систем 4-го порядку для всіх реально можливих їх значень.

B.Boychuk, Y.Paranchuk. "Analysis of the 4th order automatic control systems dynamics using the coefficients of their structured characteristic polynomials"

The dynamics of the 4th order automatic control systems by presentation of their transfer functions coefficients by product of certain generalized parameters is explored. On the example of standard characteristic polynomials row universality of these parameters and possibility of their application for implementation of automatic control system lowering order procedure are shown. Borders of stability regions of the 4th order systems for all their really possible values are calculated.