

РОЗДІЛ «ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА»

УДК 62-83

ВОЛЯНСКИЙ Р.С., к.т.н., доцент
САДОВОЙ А.В., д.т.н., профессор

Днепродзержинский государственный технический университет

НЕКВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА

Введение. Одним из наиболее общих подходов к исследованию динамических характеристик систем управления является второй метод Ляпунова [1], который базируется на рассмотрении функций Ляпунова, которые обладают специфическими свойствами. В настоящее время функции Ляпунова для линейных объектов ищутся в виде квадратичных форм, а для нелинейных – квадратичных форм в сумме с интегралом от нелинейности [2].

Применение квадратичных функций Ляпунова при решении оптимизационных задач позволяет синтезировать системы управления, координаты возмущенного движения которых изменяются по экспоненциальным законам. Такие траектории движения гарантируют асимптотическую устойчивость системы управления за счет сильного демпфирования протекающих в ней процессов. Следствием демпфирования является увеличенное время переходных процессов. Поэтому возникает проблема повышения быстродействия замкнутой системы управления при сохранении ее асимптотической устойчивости.

Постановка задачи исследования. Целью данной статьи является определение функции Ляпунова в виде степенной формы с дробным показателем степени.

Результаты работы. Рассмотрим обобщенный динамический объект, возмущенное движение которого описывается следующими уравнениями

$$\begin{aligned} p\eta_1 &= a_{12}\eta_2; \\ p\eta_2 &= a_{22}\eta_2 + m_2U \end{aligned} \quad (1)$$

с управлением

$$U = -\text{sqrt}[g(V_{12}\eta_1 + V_{22}\eta_2)], \quad (2)$$

где $\text{sqrt}(\dots)$ – кусочно-непрерывная функция, которая определена следующим образом:

$$\text{sqrt}(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}\text{sign}(x), & \text{при } |x| < 1 \\ \text{sign}(x), & \text{при } |x| > 1 \end{cases}. \quad (3)$$

Определим функцию Ляпунова для динамического объекта (1) с управлением (2).

С этой целью запишем основное функциональное уравнение Беллмана в виде [3]

$$\frac{\partial V}{\partial \eta_1} a_{12}\eta_2 + \frac{\partial V}{\partial \eta_2} (a_{22}\eta_2 + m_2U) + F(\eta) + cU^2 = 0. \quad (4)$$

Дифференцирование этого выражения по управляющему воздействию U независимо от вида функции Ляпунова V и нелинейного выражения $F(\eta)$ позволяет определить оптимальное управление следующим образом:

$$U = -\frac{m_2}{2c} \frac{\partial V}{\partial \eta_2}. \quad (5)$$

Интегрирование выражения (5) по переменной η_2 позволяет частично восстановить функцию V .

$$V = -\frac{2c}{m_2} \int U d\eta_2, \quad (6)$$

или с учетом (2)

$$V = -\frac{2c}{m_2} \int (-\text{sqrt}([g(V_{12}\eta_1 + V_{22}\eta_2)])) d\eta_2. \quad (7)$$

Полностью восстановить функцию Ляпунова можно, если добавить к функции (7) слагаемое $V_{11}\eta_1^2$, которое однозначно обращается в ноль при дифференцировании функции V по отклонению η_2 .

Тогда

$$V = \frac{2c}{m_2} \int \text{sqrt}[g(V_{12}\eta_1 + V_{22}\eta_2)] d\eta_2 + V_{11}\eta_1^2. \quad (8)$$

Выбор вида слагаемого $V_{11}\eta_1^2$ объясняется тем, что квадратичная функция является простейшей положительно-определенной функцией.

Выразив коэффициент усиления регулятора (2) через параметр объекта управления m_2 и вес управляющего воздействия c

$$g = \frac{m_2}{2c}, \quad (9)$$

представим функцию Ляпунова в виде

$$V = \frac{2c}{m_2} \int \text{sqrt}\left[\frac{m_2}{2c}(V_{12}\eta_1 + V_{22}\eta_2)\right] d\eta_2 + V_{11}\eta_1^2. \quad (10)$$

Интегрирование выражения (10) дает следующий результат:

$$V = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{1}{V_{22}} \sqrt{\frac{c(V_{12}\eta_1\eta_2 + V_{22}\eta_2^2)^3 \text{sign}(V_{12}\eta_1\eta_2 + V_{22}\eta_2^2)}{m_2}} + V_{11}\eta_1^2 \quad (11)$$

или

$$V = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{1}{V_{22}} \sqrt{\frac{c(V_{12}\eta_1\eta_2 + V_{22}\eta_2^2)^3}{m_2}} + V_{11}\eta_1^2, & \text{при } V_{12}\eta_1\eta_2 + V_{22}\eta_2^2 > 0; \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{1}{V_{22}} \sqrt{-\frac{c(V_{12}\eta_1\eta_2 + V_{22}\eta_2^2)^3}{m_2}} + V_{11}\eta_1^2, & \text{при } V_{12}\eta_1\eta_2 + V_{22}\eta_2^2 < 0. \end{cases} \quad (12)$$

Таким образом, в результате интегрирования уравнения (10) получены выражения (11), (12) для определения функции Ляпунова, которая описывает процессы рассеяния избыточной энергии, накопленной в замкнутой системе с алгоритмом управления (2). Анализ полученных выражений показывает их существенную нелинейность, однако, благодаря наличию функций $\text{sign}(x)$ в выражении (11), подкоренное выражение всегда остается положительным независимо от координат возмущенного движения. Таким образом, ни в одной точке координатного базиса функция Ляпунова не становится комплексной.

Как видно из выражений (11) и (12) найденная функция Ляпунова, вообще говоря, представляет собой две «сшитые» функции

$$V_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{1}{V_{22}} \sqrt{\frac{c(V_{12}\eta_1\eta_2 + V_{22}\eta_2^2)^3}{m_2}} + V_{11}\eta_1^2, \quad \text{при } V_{12}\eta_1\eta_2 + V_{22}\eta_2^2 > 0 \quad (13)$$

и

$$V_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{1}{V_{22}} \sqrt{-\frac{c(V_{12}\eta_1\eta_2 + V_{22}\eta_2^2)^3}{m_2}} + V_{11}\eta_1^2, \text{ при } V_{12}\eta_1\eta_2 + V_{22}\eta_2^2 < 0. \quad (14)$$

Таким образом, наличие в выражении для определения функции Ляпунова разрывной нелинейности приводит к необходимости исследования условий «сшивания» этих функций.

Покажем, что такое «сшивание» происходит безударно. Очевидно, что для этого необходимо, чтобы значения функции Ляпунова слева и справа от линии «сшивания» были одинаковы, т.е.

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} V_1 = \lim_{s \rightarrow 0^-} V_2. \quad (15)$$

Введем обозначение

$$s = V_{12}\eta_1 + V_{22}\eta_2, \quad (16)$$

тогда функции (13) и (14) можно представить следующим образом:

$$V_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{1}{V_{22}} \sqrt{\frac{c(s \cdot \eta_2)^3}{m_2}} + V_{11}\eta_1^2, \text{ при } s > 0 \quad (17)$$

и

$$V_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{1}{V_{22}} \sqrt{-\frac{c(s \cdot \eta_2)^3}{m_2}} + V_{11}\eta_1^2, \text{ при } s < 0, \quad (18)$$

Тогда для проверки условия (15) необходимо найти значения следующих пределов:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{1}{V_{22}} \sqrt{\frac{c(s \cdot \eta_2)^3}{m_2}} + V_{11}\eta_1^2 \right) = V_{11}\eta_1^2 \quad (19)$$

и

$$\lim_{s \rightarrow 0^-} \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{1}{V_{22}} \sqrt{-\frac{c(s \cdot \eta_2)^3}{m_2}} + V_{11}\eta_1^2 \right) = V_{11}\eta_1^2. \quad (20)$$

Равенство значений выражений (19) и (20) свидетельствует о безударном «сшивании» полуповерхностей найденной функции Ляпунова.

Кроме того, после попадания на линию смены знака управляющего воздействия, т.е. при выполнении условия

$$V_{12}\eta_1 + V_{22}\eta_2 = 0, \quad (21)$$

избыточна энергия, накопленная в системе, определяется только составляющей $V_{11}\eta_1^2$, которая однозначно равна нулю в начале координат.

На рис.1 показано графическое представление найденной функции Ляпунова при единичных параметрах объекта управления и регулятора. Для сравнения на рис.2 показана классическая квадратичная форма

$$V = V_{11}\eta_1^2 + 2V_{12}\eta_1\eta_2 + V_{22}\eta_2^2, \quad (22)$$

принимаемая в качестве функции Ляпунова при синтезе оптимального регулятора для того же объекта управления.

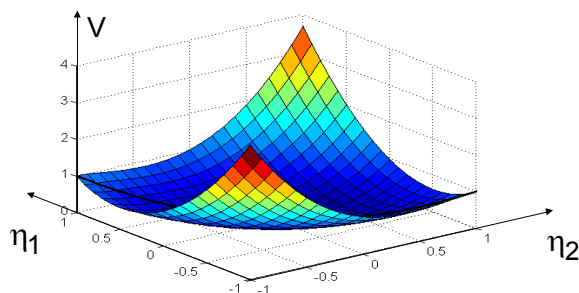


Рисунок 1 – Функция Ляпунова (12)

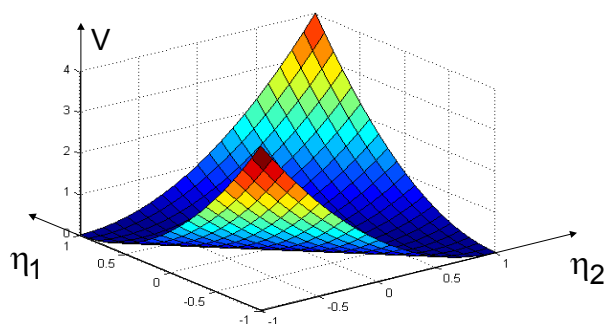


Рисунок 2 – Функция Ляпунова (22)

Теперь покажем, что линия «сшивания» не является линией излома найденной функции, т.е.

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\partial V_1}{\partial s} = \lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{\partial V_2}{\partial s}. \quad (23)$$

Частные производные $\frac{\partial V_1}{\partial s}$ и $\frac{\partial V_2}{\partial s}$ определяются путем дифференцирования зависимостей (17) и (18)

$$\frac{\partial V_1}{\partial s} = \sqrt{\frac{2m_2 s \cdot \eta_2^3}{c}} \quad \text{при } s > 0, \quad (24)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial s} = -\sqrt{-\frac{2m_2 s \cdot \eta_2^3}{c}} \quad \text{при } s < 0. \quad (25)$$

Тогда искомые пределы

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\partial V_1}{\partial s} = \lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{\partial V_2}{\partial s} = 0. \quad (26)$$

Равенство (26) позволяет сделать вывод об отсутствии излома на поверхности функции Ляпунова.

Для подробного анализа свойств поверхности, описываемой зависимостями (11) и (12), найдем частные производные $\frac{\partial V_1}{\partial \eta_1}$, $\frac{\partial V_1}{\partial \eta_2}$, $\frac{\partial V_2}{\partial \eta_1}$ и $\frac{\partial V_2}{\partial \eta_2}$:

$$\frac{\partial V_1}{\partial \eta_1} = V_{12} \eta_2 \sqrt{\frac{2c}{m_2} (V_{12} \eta_1 + V_{22} \eta_2)} + 2V_{11} \eta_1; \quad (27)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial \eta_2} = \sqrt{\frac{2c}{m_2} (V_{12} \eta_1 + V_{22} \eta_2)} \eta_2 \cdot (V_{12} \eta_1 + 2V_{22} \eta_2); \quad (28)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial \eta_1} = V_{12} \eta_2 \sqrt{-\frac{2c}{m_2} (V_{12} \eta_1 + V_{22} \eta_2)} + 2V_{11} \eta_1; \quad (29)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial \eta_2} = \sqrt{-\frac{2c}{m_2} (V_{12} \eta_1 + V_{22} \eta_2)} \eta_2 \cdot (V_{12} \eta_1 + 2V_{22} \eta_2). \quad (30)$$

На линии «сшивания» эти производные принимают следующие значения:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\partial V_1}{\partial \eta_1} = \lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{\partial V_2}{\partial \eta_1} = 2V_{11} \eta_1; \quad (31)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\partial V_1}{\partial \eta_2} = \lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{\partial V_2}{\partial \eta_2} = 0. \quad (32)$$

Таким образом, значения линии «сшивания» монотонно растут в направлении увеличения отклонения η_1 и не изменяются в направлении η_2 . Причем в силу выражения (32) на первой производной $\frac{\partial V}{\partial \eta_2}$ наблюдается перегиб (рис.3).

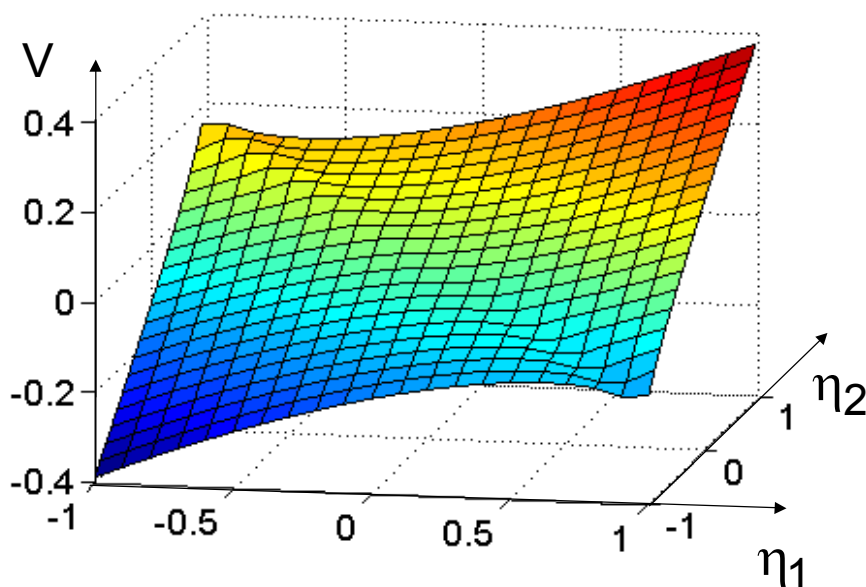


Рисунок 3 – Производная функции Ляпунова (11)

Выводы. Анализ полученных зависимостей показывает, что применение неквадратичной функции Ляпунова при одних и тех же начальных условиях и параметрах объекта управления приводит к накоплению меньшей избыточной энергии на траекториях возмущенного движения. Это обстоятельство в свою очередь характеризует систему с нелинейной активационной функцией как потребляющую меньшее количество энергии управления и соответственно являющуюся энергетически эффективной.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.М.Ляпунова. Общая задача об устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959. – 400с.
2. Е.А.Барбашин. Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970. – 240с.
3. Р.Беллман, С.Дрейфус. Прикладные задачи динамического программирования. – М.: Наука, 1965. – 460с.

Дніпродзержинський державний технічний університет

СТРУКТУРНІ РІВНЯННЯ ГРУПИ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПЕРЕНЕСЕНЬ В РІМАНОВОМУ ПРОСТОРИ

Вступ. Важливим відкриттям для науки стали тотожності Біанкі – співвідношення, які пов'язують між собою коваріантні похідні тензора кривизни ріманового простору. Вони зіграли визначальну роль при встановленні Ейнштейном рівнянь загальної теорії відносності, через те що забезпечують виконання закону збереження енергії.

Для описання багатьох геометричних структур зручно використовувати груповий підхід, який став широко застосовуватися в геометрії після виступу Фелікса Клейна з лекцією, що мала назву “Порівняльний огляд новітніх геометричних досліджень” [1]. Вона була представлена науковому світу в 1872 році в Ерлангенському університеті і зараз більш відома під назвою Ерлангенська програма Клейна.

Майже всі існуючі на той час геометрії вдалося охопити ідеєю групи. Однак, довгий час вважалося, що для ріманових викривлених просторів застосувати груповий підхід неможливо. Причиною цього було те, що пошук вівся серед скінченнопараметричних груп. Важливий внесок у теоретико-групове осмислення геометричних структур зробив Елі Картан [2].

Ерлангенська програма Клейна для ріманових просторів довільної змінної кривизни була реалізована за допомогою деформованих груп дифеоморфізмів T_M^{gH} , які діють на многовиді M і інтерпретуються як групи трансляцій в викривлених ріманових просторах [3]. Геометричні характеристики простору M містяться у законі множення деформованої групи дифеоморфізмів.

Множину паралельних перенесень векторних полів у дотичному розшаруванні простору M можна інтерпретувати як спеціальні автоморфізми деформованих груп дифеоморфізмів [4], що об'єднуються в групу DT , яка так само, як і T_M^{gH} , містить в собі повну інформацію про геометричні характеристики викривленого простору. Зокрема, серед структурних функцій групи DT є такі, що співпадають з тензором кривизни, а серед генераторів – такі, що співпадають з коваріантними похідними.

В роботі [4] наведено лише закон множення в групі DT , її дію в дотичному розшаруванні над M і виписано тільки одне із структурних рівнянь групи DT як групи перетворень, яке співпадає з структурним рівнянням ріманового простору (в термінології Е.Картана), а решту структурних рівнянь групи DT не розглянуто.

В даній роботі заповнюється ця прогалина. Зокрема, для групи перетворень DT одержано рівняння Лі, як наслідок асоціативності закону множення, а також рівняння Маурера-Картана, як умови інтегрованості знайдених рівнянь Лі. З геометричної точки зору частина з цих рівнянь є структурними рівняннями ріманового простору.

Крім того, в роботі вперше показано, що тотожності Біанкі мають теоретико-груповий смисл умов інтегрованості рівнянь Маурера-Картана.

Постановка задачі. Значним внеском у подальший розвиток геометрії стала Ерлангенська програма Фелікса Клейна, яка базується на груповому підході до опису різних геометричних структур [5].

Наступні десятиліття Ерлангенська програма розглядалася як остаточний синтез всіх геометричних теорій. Однак їй був притаманний один недолік: геометрія, створена Ріманом [6], ніяким чином не охоплювалася ідеєю групи, ідеєю, яка лежить в основі ге-

ометрії Клейна. Більш того, обидва ці підходи до геометрії, здавалося, виходять з різних точок зору. Дійсно, Клейн у досліджуваних ним геометріях зберігає лише поняття рівності, Ріман же в своїй геометрії – лише поняття відстані. Таким чином, в геометрії Клейна зникає поняття відстані, в геометрії Рімана – поняття рівності фігур. Тому довгий час розвиток ріманової геометрії йшов шляхом, відмінним від шляху, наміченого Ерлангенською програмою Клейна.

Значний внесок у поєднання цих двох точок зору вніс Елі Картан [2]. Софус Лі створив теорію операторів, вивчаючи нескінченно малі оператори, а Картан дослідив більш складну проблему, пов'язану із структурою, топологією і загальною геометрією груп Лі, вивчаючи відносні компоненти репера.

Для ріманових просторів із довільною змінною кривизною Ерлангенська програма була реалізована за допомогою деформованих груп дифеоморфізмів [3]. Їх перетворення інтерпретуються як калібрувальні трансляції в викривлених ріманових просторах. Саме через це теоретико-груповий опис ріманових просторів за допомогою деформованих груп дифеоморфізмів важливий для теорії гравітації, оскільки гравітація здобуває при цьому інтерпретацію калібрувальної теорії групи трансляцій. Ця теорія у макронаслідках еквівалентна загальній теорії відносності, має чіткий калібрувальний смисл і не має проблем величин, що зберігаються. Калібрувальна теорія групи трансляцій на основі свого підходу легко об'єднується з електродинамікою – калібрувальною теорією групи фазових перетворень шляхом об'єднання цих калібрувальних груп в одну групу [7].

Група паралельних перенесень в рімановому просторі була побудована як група автоморфізмів деформованої групи дифеоморфізмів [4].

В даній роботі проводиться подальше дослідження групи паралельних перенесень, яка також розглядається як група перетворень дотичного розшарування ріманового простору.

Результати роботи. Нехай на многовиді M діє група трансляції T_M , тоді деформованою нескінченною групою буде деформована група дифеоморфізмів T_M^{gH} , яка параметризується функціями $t^m(x)$. Геометричні характеристики простору M вона містить в своєму законі множення

$$(t_1 \cdot t_2)^k(x) = \varphi^k(x, t_1(x), t_2(x')). \quad (1)$$

Закон множення (1), записаний для інфінітезимального другого множника

$$(t \cdot \tau)^k(x) = t^k(x) + \lambda(x, t(x))_n^k \tau^n(x'), \quad (2)$$

де $\lambda(x, t_1)_n^m := \partial_{t_2} \varphi^m(x, t_1, t_2) \Big|_{t_2=0}$, $x'^\mu = f^\mu(x, t_1(x))$ задає правило додавання векторів,

заданих в різних точках x та x' , або *правило паралельного перенесення векторних полів* в дотичному розшаруванні простору M :

$$\tau_{\parallel}^k(x) = \lambda(x, t(x))_n^k \tau^n(x').$$

Паралельні перенесення можна інтерпретувати як спеціальні автоморфізми деформованої групи дифеоморфізмів. Розглянемо перетворення, отримані за допомогою функції деформації \tilde{H} ,

$$\tau_{\parallel}^m(x) = \tilde{H}^m(x, \tau_{\parallel}(x)) = \tilde{H}^m(x, (t \cdot \tau)(x) - t(x)),$$

які для інфінітезимальних параметрів $\tau(x)$ приймають вигляд

$$\tau_g^m(x) = L(x)_k^m \lambda(x, t(x))_n^k \tau^n(x'), \quad (3)$$

де $L(x)_k^m := \partial_k \tilde{H}^m(x, t) \Big|_{t=0}$.

Перетворення (3) утворюють групу DT , яка діє у дотичному розшаруванні простору M , визначається трансляційним параметром $t(x)$ та невірродженими лінійними перетвореннями $L(x)$, тобто $g^a(x) = (t(x), L(x))^a$, і має закон множення:

$$(g_1 * g_2)^m(x) = \varphi^m(x, t_1(x), t_2(x')), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (g_1 * g_2)_n^m(x) &= \varphi_n^m(x, g_1(x), g_2(x')) = \\ &= L_1(x)_k^m \lambda(x, t_1(x))_l^k L_2(x')_p^l \cdot \\ &\cdot \lambda(x', t_2(x'))_r^p \lambda^{-1}\left(x, \varphi^m(x, t_1(x), t_2(x'))\right)_n^r, \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$x'^\mu = f^\mu(x, t_1(x)). \quad (6)$$

Літери початку латинського алфавіту означають тут мультиіндекс, і надалі ми будемо вважати $g^m(x) = t^m(x)$, а $g_n^m(x) = L(x)_n^m$. Лінійні перетворення $L(x)$ забезпечують групу структуру на множині паралельних перенесень.

Формули (6) і (3) задають дію групи DT відповідно на многовиді M і у дотичному розшаруванні простору M . За означенням група $DT = \{t(x), L(x)\}$ є *групою паралельних перенесень в рімановому просторі*.

Серед структурних функцій $F(x)_{bc}^a$ групи паралельних перенесень, які визначаються як антисиметрична частина других похідних від функції закону множення по групових параметрах в нулі, є такі, що співпадають із *тензором кривизни*. Якщо $a = \frac{m}{n}$, $b = s$, $c = k$:

$$\begin{aligned} F(x)_{n, sk}^m &= -\gamma(x)_{pn}^m F(x)_{sk}^p + h(x)_s^\mu \partial_\mu \gamma(x)_{kn}^m - h(x)_k^\mu \partial_\mu \gamma(x)_{sn}^m + \\ &+ \gamma(x)_{sl}^m \gamma(x)_{kn}^l - \gamma(x)_{kl}^m \gamma(x)_{sn}^l, \end{aligned}$$

де $\gamma(x)_{mn}^k = \partial_{g_1^m, g_2^n}^2 \left(\varphi^k(x, g_1, g_2) \right) \Big|_{g_1=g_2=0}$, $h(x)_m^\mu$ – коефіцієнти деформації.

Розглянемо групу DT як групу перетворень. Її специфіка полягає в тому, що окрім дії на многовиді, вона також діє на векторні поля у дотичному розшаруванні простору M за допомогою матричних операторів, а отже лінійно.

Перепишемо рівність (3) у вигляді:

$$\tau_g^m(x) = \mathfrak{I}(x, g(x))_k^m \tau^k(x'), \quad (7)$$

де

$$\mathfrak{I}(x, g(x))_k^m = L(x)_p^m \lambda(x, t(x))_k^p. \quad (8)$$

Через лінійність матричних операторів (8) закон асоціативності множення для групи DT , отриманий із композиції перетворень, приймає вигляд:

$$\mathfrak{I}(x, g_1)_k^m \mathfrak{I}(x', g_2)_n^k = \mathfrak{I}(x, \varphi(x, g_1, g_2))_n^m. \quad (9)$$

Введемо допоміжні функції $\xi(x)_{n,a}^m := \partial_a \mathfrak{I}(x, g)_n^m \Big|_{g=0}$.

Продиференціюємо (9) за другим параметром в нулі

$$\mathfrak{I}(x, g_1)_k^m \xi(x')_{n,a}^k = \lambda(x, g_1)_a^b \partial_b \mathfrak{I}(x, g_1)_n^m. \quad (10)$$

Рівняння (10) – рівняння Лі для групи перетворень DT . Умовою його інтегрованості буде рівняння Маурера-Картана:

$$\begin{aligned} & \xi(x)_{k,b}^m \xi(x)_{n,c}^k + h(x)_b^\mu \partial_\mu \xi(x)_{n,c}^m - \\ & - \xi(x)_{k,c}^m \xi(x)_{n,b}^k - h(x)_c^\mu \partial_\mu \xi(x)_{n,b}^m = F(x)_{bc}^a \xi(x)_{n,a}^m. \end{aligned}$$

Щоб розглянути умову інтегрованості рівняння Маурера-Картана, введемо у розгляд матрично диференційні оператори $X_{c,n}^m := \delta_n^m h_c^\mu \partial_\mu + \xi_{n,c}^m$, які при $c = k$ приймають вигляд

$$X_{k,n}^m = \delta_n^m h_k^\mu \partial_\mu + \gamma_{kn}^m$$

і співпадають з коваріантними похідними векторних полів $X_c = \nabla_c$. Для $c = k$ – $X_{k,n}^p = \delta_k^m \delta_n^p$. Тоді у загальному вигляді рівняння Маурера-Картана групи DT можна представити через комутатор генераторів

$$[\nabla_b, \nabla_c]_n^m = F_{bc}^a \nabla_{an}^m.$$

Якщо $b = k, c = p$,

$$[\nabla_k, \nabla_p]_n^m = R_{nkp}^m + F_{kp}^r \nabla_{rn}^m. \quad (11)$$

Тобто серед рівнянь Маурера-Картана для групи паралельних перенесень є рівняння, які містять в собі коваріантну похідну і тензор кривизни.

Згідно з третьою теоремою Лі структурні функції групи задовольняють рівнянню, яке безпосередньо слідує з тотожностей Якобі і є умовою інтегрованості рівняння Маурера-Картана.

Двічі підставляючи в тотожності Якобі

$$[\nabla_s, [\nabla_k, \nabla_p]]_n^m + [\nabla_p, [\nabla_s, \nabla_k]]_n^m + [\nabla_k, [\nabla_p, \nabla_s]]_n^m = 0$$

замість комутаторів праву частину (11), одержуємо рівняння:

$$F_{kp}^r R_{srn}^m + h_s^\mu R_{nkp,\mu}^m + \gamma_{sl}^m R_{nkp}^l - R_{lkp}^m \gamma_{sn}^l + cycl(skp) = 0,$$

яке в координатному базисі приймає дещо спрощений вигляд:

$$R_{\nu k \pi, \sigma}^\mu + \Gamma_{\sigma \lambda}^\mu R_{\nu k \pi}^\lambda - \Gamma_{\sigma \nu}^\lambda R_{\lambda k \pi}^\mu + cycl(\sigma k \pi) = 0. \quad (12)$$

Легко перевірити, що рівняння (12), яке згідно з третьою теоремою Лі дає умову інтегрованості рівняння Маурера-Картана (11) внаслідок відсутності скруту $\Gamma_{\sigma \lambda}^\mu = \Gamma_{\lambda \sigma}^\mu$ в рімановому просторі, співпадає з тотожностями Біанкі:

$$R_{\nu k \pi, \sigma}^\mu + cycl(\sigma k \pi) = 0,$$

де $R_{\nu\kappa\pi;\sigma}^{\mu} = R_{\nu\kappa\pi,\sigma}^{\mu} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu} R_{\nu\kappa\pi}^{\lambda} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} R_{\lambda\kappa\pi}^{\mu} - \Gamma_{\sigma\kappa}^{\lambda} R_{\nu\lambda\pi}^{\mu} - \Gamma_{\sigma\pi}^{\lambda} R_{\nu\kappa\lambda}^{\mu}$ – коваріантна похідна тензора кривизни.

Отже, тотожності Біанкі дають умову інтегрованості рівнянь Маурера-Картана (11).

Висновки. В даній роботі розглянуто групу паралельних перенесень в рімановому просторі як групу перетворень дотичного розшарування ріманового простору. Виписано закон композиції перетворень групи DT , з якого одержано рівняння Лі і, як умову їх інтегрованості, рівняння Маурера-Картана, серед яких є такі, що співпадають з структурним рівнянням ріманового простору довільної змінної кривизни; згідно з концепцією Ерлангенської програми Клейна цей факт дає можливість вважати групу DT фундаментальною групою ріманового простору. Показано, що умовою інтегрованості рівнянь Маурера-Картана, а також аналогом третьої теореми Лі для групи DT є тотожності Біанкі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа») // Об основаниях геометрии. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – С.399-434.
2. Картан Э. Теория групп и геометрия // Об основаниях геометрии. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – С.483-507.
3. Самохвалов С.Е. Теоретико-групповий опис ріманових просторів // Укр. мат. журн. – 2003. – № 9 (55). – С.1238-1248.
4. Самохвалов С.Е. Група паралельних перенесень в рімановому просторі // Мат. моделювання. – 2007. – № 2. – С.50-54.
5. Георгиев Г. Геометрические группы и эволюция идеи пространства. – К.: Изд. киевского ун-та, 1968. – 64с.
6. Риман Б. О гипотезах, лежащих в основании геометрии // Об основаниях геометрии. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956.
7. Samokhvalov S.E., Vanyashin V.S. Group theory approach to unification of gravity with internal symmetry gauge interaction // Class. Quantum Grav. – 1991. – 8. – P.2277-2282.

УДК 515.174

ГОЛЕНКО Д.І., магістр
ЧЕРНОМУРОВА Л.О., к.ф.-м.н., доцент

Дніпродзержинський державний технічний університет

ЗАСТОСУВАННЯ ГЕНЕТИЧНИХ АЛГОРИТМІВ В ЗАДАЧАХ УПАКОВКИ

Вступ. В теорії складності обчислень або теорії комплексності задача про упаковку продукції в контейнери – NP-важка комбінаторна задача [1]. При виборі варіанта завантаження продукції в контейнери доводиться враховувати велику кількість факторів: габарити продукції, вагу та інші специфічні для цієї продукції параметри. До додаткових параметрів можуть відноситися, наприклад, положення в контейнері (при транспортуванні продукції, у якій упаковка може деформуватися), допустиме навантаження на упаковку з продукцією та інше.

Задача упаковки однотипної продукції не представляє особливої складності та може бути розв'язана логістом з досвідом роботи без додаткових засобів. Для ситуації з продукцією різного типу задача упаковки значно ускладнюється. У зв'язку з тим, що

габарити упаковки з продукцією мають фіксовані розміри, а сама упаковка не повинна змінювати своєї форми, рідко вдається повністю використувати об'єм контейнера на 100%. При ефективному плануванні розміщення продукції можна досягти заповнення об'єму на 90 %-95 %.

Можна виділити три основні групи методів, які дозволяють знайти розв'язок задачі упаковки:

- лінійні та нелінійні;
- евристичні методи;
- методи еволюційного пошуку.

Перша група гарантує знаходження оптимального розв'язку, але недоліком цих методів є їх висока обчислювальна складність, яка експоненціально збільшується з ростом розмірності задачі. Цей фактор обмежує область їх практичного застосування.

Евристичні методи дозволяють значно скоротити часові витрати на пошук розв'язку практично будь-якої задачі упаковки, але вони не завжди знаходять оптимальний розв'язок. Звичайно, за допомогою цих методів можна знайти розв'язок, близький до оптимального. Безперечною перевагою цих методів є можливість урахування додаткового набору технологічних обмежень, щоправда це звужує область використання подібних алгоритмів. До того ж дані методи не захищені від потрапляння у «пастки локальних оптимумів» [2].

Порівняно новими виглядають методи еволюційного пошуку: генетичні алгоритми та методи генетичного програмування. Ці методи успішно поєднують у собі переваги евристичних методів (швидкий пошук розв'язку, близького до оптимального) та мають способи виходу з локальних екстремумів [3,4].

Постановка задачі. Розглянемо задачу упаковки різноманітної продукції в палети (плоскі транспортні структури, призначені для переміщення продукції).

Однотипна продукція завантажується на палету шарами, для різних типів продукції кількість одиниць в одному шарі розрізняється. Маємо обмеження на висоту і вагу вантажу, що пакується на палету. Також існують обмеження на порядок слідування шарів (наприклад, з міркувань дотримання допустимого навантаження на окремий вид продукції).

В математичній постановці задача виглядає так: задана скінченна множина різних видів продукції з визначеними характеристиками габаритних розмірів та ваги $P = \{p_i\}$ ($i = \overline{1, m}$). Задана кількість одиниць кожного виду продукції $n_i \geq 0$ ($i = \overline{1, m}$).

Потрібно знайти таке розбиття множини P на підмножини P_1, \dots, P_k , що не перетинаються, щоб їх кількість при даних обмеженнях була мінімальною. Тобто задача полягає в упаковці всієї продукції з множини P в найменшу кількість палет k .

Результати роботи. Розглянемо процес побудови алгоритму для поставленої задачі. Спочатку опишемо принцип кодування генетичної інформації у хромосомі. Позначимо a_1, a_2, \dots, a_m кількість шарів продукції виду p_1, p_2, \dots, p_m , що необхідно розподілити по палетах. Будемо вважати хромосомою деяку перестановку множини $\{a_i\}$ ($i = \overline{1, m}$), що відповідає порядку палетування шарів продукції. Вибір палети, у яку буде проводитися завантаження шару, здійснюється за принципом First Fit. Тобто на кожному кроці поточний шар продукції розміщується у частково заповнену палету з найменшим порядковим номером із виконанням обмежень, зазначених у постановці задачі. Отже, кожна хромосома відповідає певному розподілу множини $\{a_i\}$ ($i = \overline{1, m}$) на палеті. Функцію пристосування хромосоми визначимо наступним чином:

$$F = \frac{\sum_{i=1}^k \left(\frac{h_i}{h_{\max}} + \frac{w_i}{w_{\max}} \right)}{2k}, \quad (1)$$

де k – кількість палет, використаних у розбитті, що визначене хромосомою; h_i – висота i -ої палети; h_{\max} – гранично допустима висота палети; w_i – вага i -ої палети; w_{\max} – гранично допустима вага палети.

Наведемо алгоритм розв'язку:

Крок 1. Формування початкового покоління.

Крок 2. Селекція. За допомогою методу рулетки [5] визначаємо дві хромосоми, які будуть приймати участь у кроссинговері.

Крок 3. Кроссинговер. Випадково визначаємо точку кроссинговера. Отримаємо двох нащадків. Гени першого нащадка будуть складатися з генів:

а) розташованих зліва від точки кроссинговера першої хромосоми, обраної на другому кроці алгоритму;

б) другої хромосоми, які відсутні у генетичній інформації нащадка.

Порядок занесення генів до хромосоми-нащадка зберігається відповідно до порядку генів хромосом батьків.

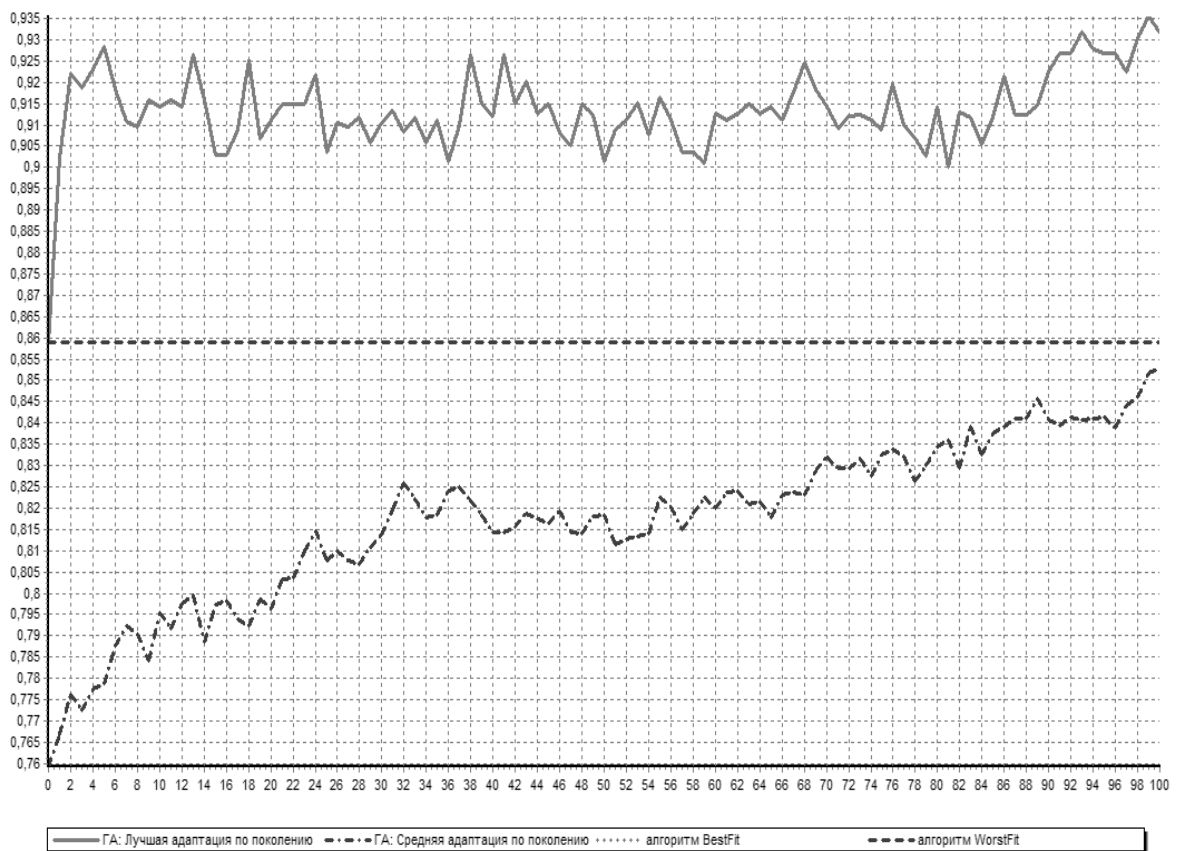


Рисунок 1 – Порівняльний аналіз генетичного та евристичних алгоритмів

Аналогічно до генетичної інформації другого нащадка увійдуть гени:

- а) розташовані зліва від точки кроссинговера другої хромосоми, обраної на другому кроці алгоритму;
- б) першої хромосоми, які відсутні у генетичній інформації нащадка.

Крок 4. Мутація. Відбувається у ново му поколінні з деякою невеликою ймовірністю (наприклад, 0,01), при цьому два визначені довільним чином гени хромосоми переставляються місцями.

Порівняльний аналіз генетичного алгоритму з евристичними алгоритмами Worst Fit та Best Fit.

В результаті чисельних досліджень було виявлено, що генетичний алгоритм в цілому дає кращі результати, ніж відомі евристичні алгоритми Worst Fit і Best Fit та дозволяє досягти високої ефективності використання палет. Проте результати генетичного алгоритму дуже чутливі до параметрів: розмірів популяції, кількості кроків, ймовірності мутацій та визначення точки кроссинговера. Приклади чисельних розрахунків зображено на рис.1, 2. По вертикальній осі відкладено ефективність упаковки, а по горизонтальній – номер покоління.

Висновки. В даній роботі було розроблено методику кодування генетичної інформації, спосіб кроссинговера побудованих хромосом та запропонована функція адаптації. Розглянутий метод кодування хромосоми є ефективним для використання в генетичному алгоритмі та дозволяє знаходити розв'язки, що близькі до оптимальних, за рахунок відсікання заздалегідь неприйнятних. На основі описаного алгоритму було розроблено програмний модуль, що використовується для розв'язку задачі палетування продукції на лакофарбовому підприємстві.

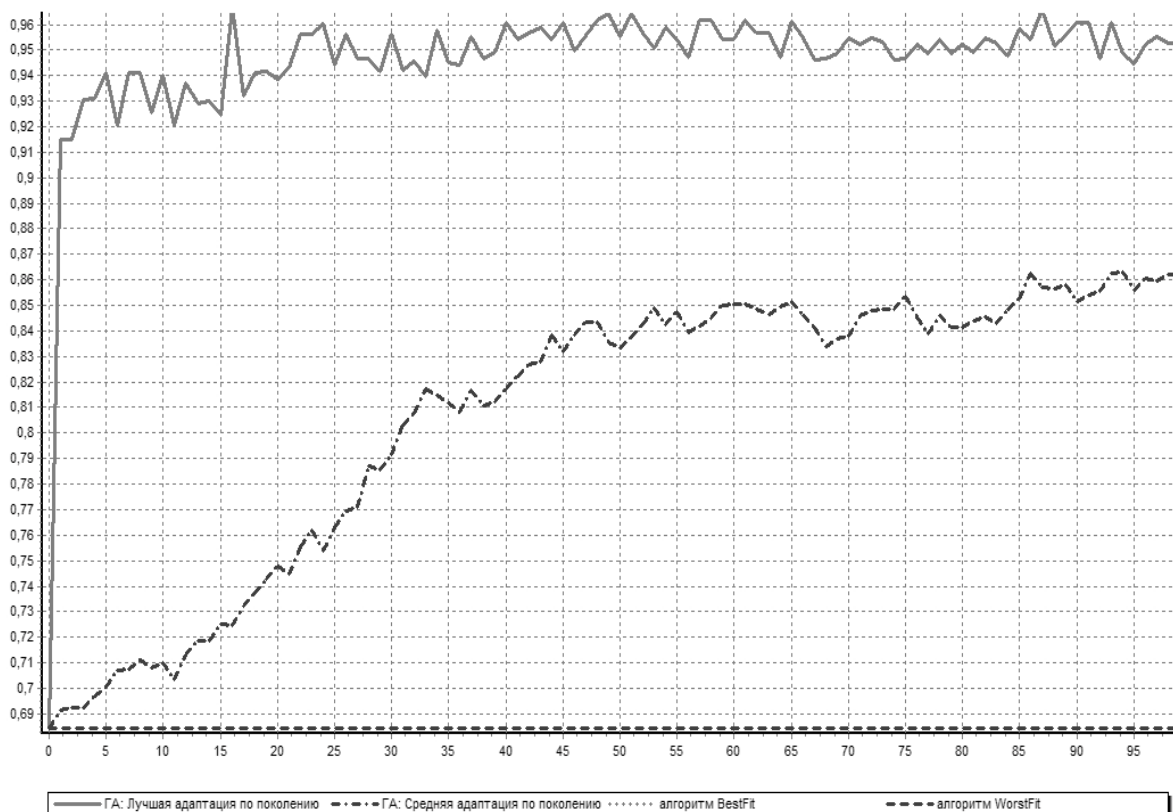


Рисунок 2 – Порівняльний аналіз генетичного та евристичних алгоритмів

ЛІТЕРАТУРА

1. Гзри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 416с.
2. Петров Ю.Ю. Сборник научных трудов СевКавГТУ. Серия «Естественнонаучная». – 2006. – № 2.
3. Booker L.B., Goldberg D.E. and Holland J.H. Classifier Systems and Genetic Algorithms, *Artificial Intelligence* 40(1-3). – 1989. – P.235-282.
4. Devis B.A., Lawrence J.K. *Handbook of Genetic Algorithms*, Van Nostrand Reinhold, New York. – 1991. – 540p.
5. Росс Клемент, журнал "Компьютерра". – 1999. – №11.