

## РОЗДІЛ «ЕЛЕКТРОМЕХАНІКА. ЕЛЕКТРОТЕХНІКА»

УДК 62-83:681.513.5

КЛЮЕВ О.В., к.т.н., доцент,  
САДОВОЙ А.В., д.т.н., професор

Днепродзержинский государственный технический университет

### ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АСИНХРОННОГО ЭЛЕКТРОПРИВОДА С ДВУХКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ УПРАВЛЕНИЯ

**Введение.** Известны системы как частотного, так и векторного управления скоростью вращения вала асинхронного двигателя (АД). Все системы частотного управления являются фактически одноканальными [1], где контур стабилизации потока через функциональный преобразователь подчинён контуру регулирования скорости. Однако при стабилизации потока на номинальном уровне и уменьшении момента нагрузки на валу АД его коэффициент мощности становится меньше номинального, и это уменьшение может быть значительным. Поэтому улучшить энергетические показатели автоматизированного электропривода можно, изменяя поток в функции момента сил сопротивления на валу АД. Для оптимизации энергетических процессов в АД необходимо построить двухканальную систему с независимым управлением скоростью и потокосцеплением асинхронной машины, что возможно реализовать в векторной полеориентированной системе управления с добавлением в её состав контура экстремального регулирования. Целью регулирования можно принять достижение экстремума некоторой целевой функции и слежение за дрейфом экстремума при изменении параметров и переменных состояния электропривода.

**Постановка задачи.** Задача настоящей статьи состоит в формировании функций качества установившихся режимов работы асинхронной машины и исследовании свойств этих функций с целью получения результатов, необходимых для синтеза систем экстремального управления асинхронными электроприводами.

**Результаты работы.** Примем за исходную следующую систему уравнений установившегося режима работы асинхронной машины, записанных в ортогональных осях  $uv$ , ориентированных по вектору потокосцепления ротора:

$$\begin{aligned} U_{su} &= I_{su} R' - \omega_k L'_s I_{sv} - \frac{K_r}{T_r} \Psi_{ru}; & \omega_k &= \omega + \frac{R_r K_r I_{sv}}{\Psi_{ru}}; \\ U_{sv} &= I_{sv} R' + \omega_k L'_s I_{su} + K_r \omega \Psi_{ru}; & & \\ \Psi_{ru} &= L_m I_{su}; & M_c &= \frac{3}{2} N K_r \Psi_{ru} I_{sv}. \end{aligned} \quad (1)$$

Из уравнений (1) следуют соотношения

$$I_{su} = \frac{\Psi_{ru}}{L_m}; \quad I_{sv} = \frac{2M_c}{3N K_r \Psi_{ru}}. \quad (2)$$

Тогда модуль вектора тока статора находится по формуле

$$|\vec{I}_s| = I_s = \sqrt{I_{su}^2 + I_{sv}^2} = \sqrt{\frac{\Psi_{ru}^2}{L_m^2} + \frac{4M_c^2}{9N^2 K_r^2 \Psi_{ru}^2}}. \quad (3)$$

Поскольку параметры ротора в уравнениях (1) приведены к статору и ротор не подключен к питающей сети, то активная мощность, потребляемая АД, равна:

$$P_{s,r} = \frac{3}{2} \operatorname{Re}[\vec{U}_s \times \vec{I}_s^*] = \frac{3}{2} [U_{su} I_{su} + U_{sv} I_{sv}]. \quad (4)$$

Составляющие вектора напряжения статора после замены токов  $I_{su}$  и  $I_{sv}$  в выражениях (1) соотношениями (2) примут вид

$$U_{su} = R' \frac{\Psi_{ru}}{L_m} - \frac{2\omega_k L_s' M_c}{3N K_r \Psi_{ru}} - \frac{K_r}{T_r} \Psi_{ru}; \quad U_{sv} = \frac{2R' M_c}{3N K_r \Psi_{ru}} + \frac{\omega_k L_s' \Psi_{ru}}{L_m} + K_r \omega \Psi_{ru}. \quad (5)$$

Подставляем соотношения (2), (5) в (4) и после преобразований получим

$$P_{s,r} = \frac{3R_s \Psi_{ru}^2}{2L_m^2} + \frac{2R' M_c^2}{3N^2 K_r^2 \Psi_{ru}^2} + \frac{\omega M_c}{N}. \quad (6)$$

В этом выражении последнее слагаемое есть мощность на валу, а первые два слагаемых представляют активные потери в обмотках статора и ротора от обеих составляющих токов. Активные потери в стали не учитываются. Тогда мощность потерь

$$\Delta P = \frac{3R_s \Psi_{ru}^2}{2L_m^2} + \frac{2R' M_c^2}{3N^2 K_r^2 \Psi_{ru}^2}. \quad (7)$$

Реактивная мощность АД определяется по формуле

$$Q_{s,r} = \frac{3}{2} \text{Im}[\vec{U}_s \times \vec{I}_s^*] = \frac{3}{2} (U_{sv} I_{su} - U_{su} I_{sv}). \quad (8)$$

Подставив соотношения (2) и (5) в (8), после преобразований получим

$$Q_{s,r} = \frac{3L_s' \omega_k \Psi_{ru}^2}{2L_m^2} + \frac{2L_s' \omega_k M_c^2}{3N^2 K_r^2 \Psi_{ru}^2} + \frac{3K_r \omega \Psi_{ru}^2}{2L_m} + \frac{M_c}{N T_r}. \quad (9)$$

Скорость вращения системы координат равна

$$\omega_k = \omega + \frac{R_r K_r I_{sv}}{\Psi_{ru}} = \omega + \frac{2R_r M_c}{3N \Psi_{ru}^2}. \quad (10)$$

Подставляем полученное выражение в (9), упростив которое будем иметь

$$Q_{s,r} = \frac{3L_s' \omega \Psi_{ru}^2}{2L_m^2} + \frac{L_s' R_r M_c}{N L_m^2} + \frac{2L_s' \omega M_c^2}{3N^2 K_r^2 \Psi_{ru}^2} + \frac{4L_s' R_r M_c^3}{9N^3 K_r^2 \Psi_{ru}^4} + \frac{3K_r \omega \Psi_{ru}^2}{2L_m} + \frac{M_c}{N T_r}. \quad (11)$$

Коэффициент мощности АД рассчитывается по формуле

$$\cos \varphi = \frac{P_{s,r}}{\sqrt{P_{s,r}^2 + Q_{s,r}^2}}. \quad (12)$$

Любое из выражений (3), (7), (11) или (12) может рассматриваться как функция качества установившихся режимов работы асинхронной машины. Указанные соотношения в общем случае являются функциями трёх переменных: момента нагрузки, скорости вращения вала и модуля потокосцепления ротора АД. Скорость вращения стабилизируется системой управления на уровне, определяемом требованиями и условиями технологического процесса. Момент на валу двигателя в установившемся режиме работы зачастую зависит от скорости вращения. Поэтому исследовать перечисленные критерии качества на экстремум имеет смысл только как функции потока  $\Psi_{ru}$ , а равенство нулю производных этих функций по потоку является условием экстремума энергетических характеристик работающего электропривода, включенного в технологический процесс.

Возьмём производную от модуля вектора тока статора (3) по потокосцеплению и приравняем её нулю. Разрешив полученное уравнение относительно потокосцепления, получим следующую формулу:

$$\Psi_{ru} = \sqrt[4]{\frac{4L_m^2 M_c^2}{9N^2 K_r^2}}. \quad (13)$$

При этих значениях  $\Psi_{\text{ст}}$  ток статора достигает наименьшей величины при заданном моменте нагрузки. Если решим уравнение  $\frac{d\Delta P}{d\Psi_{\text{ст}}} = 0$  относительно потокосцепления, то получим

$$\Psi_{\text{ст}} = \sqrt[4]{\frac{4R'_m M_c^2}{9N^2 K_f^2 R_s}} \quad (14)$$

Выполним расчёты значений потокосцеплений для двигателя 4AK160S4Y3 по формулам (13) и (14). Результаты расчётов приведены в табл.1, 2.

Таблица 1 – Результаты расчёта по формуле (13)

$M_c/M_n$	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$\Psi_{\text{ст}}/\Psi_{\text{стн}}$	0,955	1,351	1,654	1,91	2,136

Таблица 2 – Результаты расчёта по формуле (14)

$M_c/M_n$	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$\Psi_{\text{ст}}/\Psi_{\text{стн}}$	1,172	1,657	2,029	2,343	2,62

Из таблиц видно, что для наиболее вероятных нагрузок  $M_c = (0,4...1)M_n$  минимум тока статора или потерь в двигателе достигается на нелинейном участке характеристики намагничивания, где формулы, полученные для двигателя с линейной характеристикой намагничивания дают завышенные (в 1,5...3 раза больше номинального) значения потока двигателя. Такой поток не может быть достигнут вследствие насыщения стали. По этой же причине в результате резкого увеличения тока намагничивания потери при значительном росте потока превзойдут не только минимальные, но и номинальные. Из сказанного следует, что при синтезе алгоритмов экстремального управления необходимо учитывать влияние потока двигателя на его параметры.

Результаты поиска экстремума целевых функций (3) и (7) методом дихотомии с учётом влияния нелинейности кривой намагничивания на параметры АД приведены в табл.3, 4. Исследования проводились для прежнего двигателя 4AK160S4Y3. Для других АД следует ожидать аналогичных результатов.

Таблица 3 – Значения потока, обеспечивающие минимум току статора

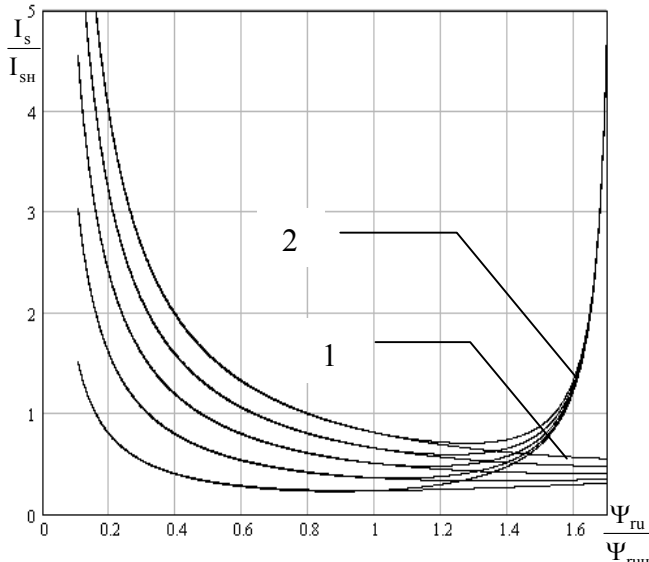
$M_c/M_n$	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$\Psi_{\text{ст}}/\Psi_{\text{стн}}$	0,88	1,064	1,165	1,234	1,278

Таблица 4 – Значения потока, при которых потери достигают минимума

$M_c/M_n$	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$\Psi_{\text{ст}}/\Psi_{\text{стн}}$	0,989	1,165	1,257	1,315	1,356

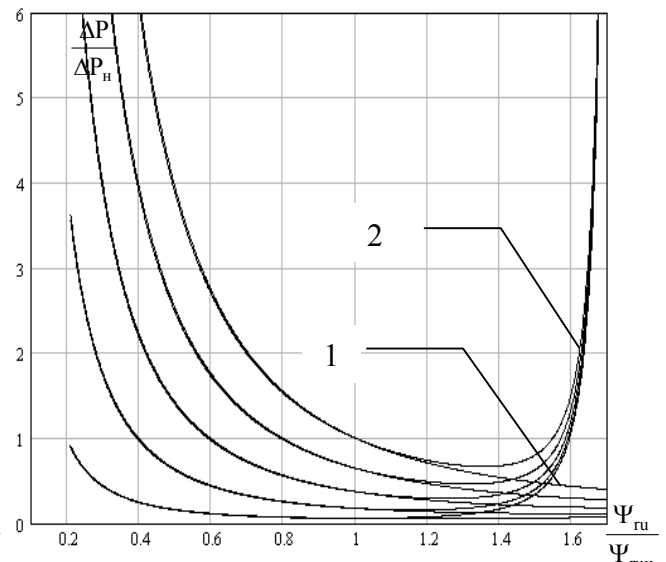
Из сравнения результатов табл.1, 2 и 3, 4 видны существенные различия в значениях потокосцеплений, что говорит о неадекватности целевых функций, полученных из статических моделей АД без учёта нелинейности характеристики намагничивания. Сказанное подтверждается графиками на рис.1, 2. Из этих рисунков хорошо видно, что

различия между характеристиками в пределах линейной зоны кривой намагничивания отсутствуют. Характеристики на обоих рисунках построены для тех же значений моментов нагрузки, что приведены в таблицах. При насыщении магнитопровода реактивный ток статора резко возрастает, что приводит к быстрому увеличению активных потерь в обмотках АД. Из рис. 1, 2 и табл. 3, 4 видно, что для обеспечения минимума тока или потерь в меди обмотки статора двигатель должен иметь потокосцепление ротора больше номинального, т.е. работать на нелинейном участке кривой намагничивания.



1 – без учёта насыщения магнитопровода;  
2 – с учётом насыщения магнитопровода

Рисунок 1 – Зависимость модуля тока статора от потокосцепления ротора



1 – без учёта насыщения магнитопровода;  
2 – с учётом насыщения магнитопровода

Рисунок 2 – Зависимость потерь в АД от потокосцепления ротора

Теперь найдём экстремум целевой функции (11). Для этого продифференцируем её по  $\Psi_{ru}$ , приравняем полученное выражение нулю и получим следующее уравнение:

$$\left( \frac{3L'_s \omega}{L_m^2} + \frac{3K_r \omega}{L_m} \right) \Psi_{ru}^6 - \frac{4L'_s \omega M_c^2}{3N^2 K_r^2} \Psi_{ru}^2 - \frac{16L'_s R_r M_c^3}{9N^3 K_r^2} = 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) можно привести к виду

$$t^3 + pt + q = 0. \quad (16)$$

Его действительный корень вычисляется по формуле Кардано:

$$t = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (17)$$

Тогда экстремальные значения потокосцепления будут находиться как  $\Psi_{ru} = \sqrt{t}$ .

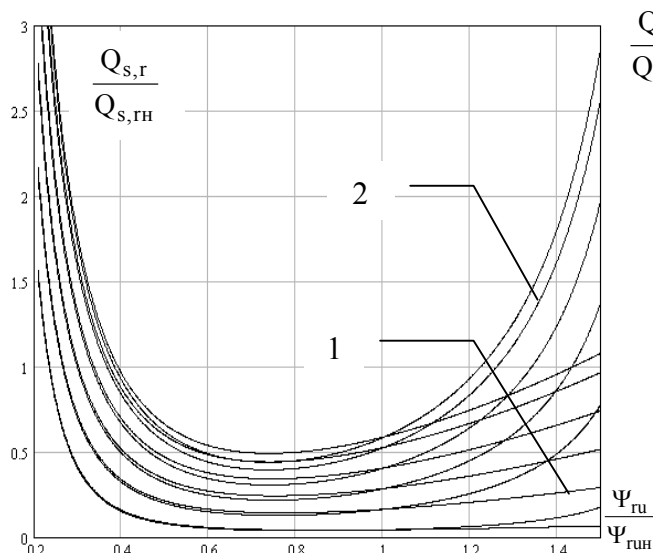
Вторая производная реактивной мощности по потокосцеплению будет положительной для любых значений потокосцеплений. Это говорит о том, что реактивная мощность является вогнутой функцией на всей области определения и, следовательно, экстремальная точка будет минимумом. Из выражения (15) следует, что координаты минимума целевой функции (11) зависят как от момента нагрузки, так и от скорости. Уравнение (15) получено в предположении, что параметр  $L_m$  равен номинальному значению и не зависит от потока. Если учесть эту зависимость, то в результате дифференцирования приходим к сложному уравнению. Поэтому при учёте нелинейности кривой намагничивания целесообразно для отыскания экстремальных потокосцеплений

применить численные методы прямого поиска экстремума функции одной переменной, например, метод дихотомии. В табл.5 помещены результаты исследования характеристики (11) на экстремум для различных скоростей и моментов нагрузки при учёте зависимости  $L_m = f(\Psi_{\text{ру}})$  и без него.

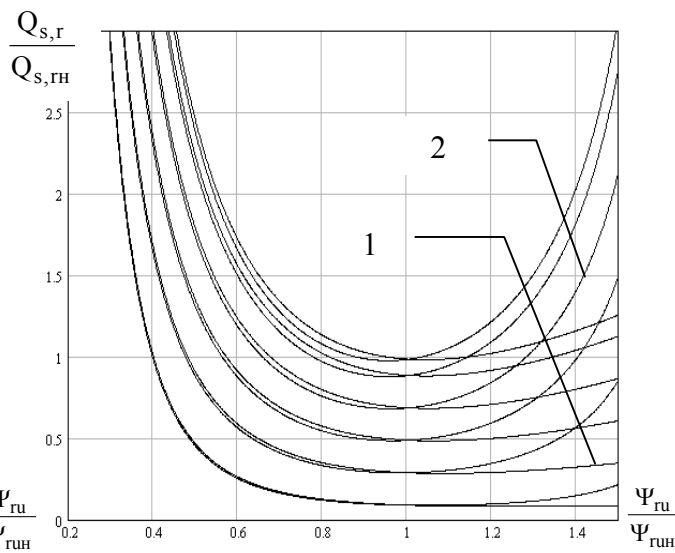
Таблица 5 – Результаты исследования работы АД по критерию минимума реактивной мощности (11)

$\omega/\omega_0$	0,15	0,35	0,55	0,75	0,95	$M_c/M_H$
$\Psi_{\text{ру}}/\Psi_{\text{рун}}, L_m = L_{\text{мн}}$	1,119	1,072	1,056	1,048	1,043	1
$\Psi_{\text{ру}}/\Psi_{\text{рун}}, L_m = f(\Psi_{\text{ру}})$	1,001	0,973	0,926	0,922	0,919	
$\Psi_{\text{ру}}/\Psi_{\text{рун}}, L_m = L_{\text{мн}}$	0,792	0,758	0,747	0,741	0,738	0,5
$\Psi_{\text{ру}}/\Psi_{\text{рун}}, L_m = f(\Psi_{\text{ру}})$	0,774	0,75	0,742	0,737	0,735	
$\Psi_{\text{ру}}/\Psi_{\text{рун}}, L_m = L_{\text{мн}}$	0,501	0,479	0,472	0,469	0,467	0,2
$\Psi_{\text{ру}}/\Psi_{\text{рун}}, L_m = f(\Psi_{\text{ру}})$	0,521	0,503	0,497	0,494	0,492	

На рис.3, 4 показаны зависимости в относительных единицах реактивной мощности АД от модуля вектора потокосцепления ротора для различных скоростей и нагрузок. Из графиков видно, что экстремум характеристик при увеличении скорости вращения смещается вверх, а при росте нагрузки – вправо. При этом экстремальные потокосцепления и особенно соответствующие им значения реактивной мощности для обоих типов характеристик отличаются незначительно. При низких скоростях функция реактивной мощности в окрестности минимума является пологой. При увеличении скорости минимум становится явно выраженным.



1 – без учёта насыщения магнитопровода;  
2 – с учётом насыщения магнитопровода  
Рисунок 3 – Графики изменения реактивной мощности при различных скоростях и  $M_c = 0.5M_H$



1 – без учёта насыщения магнитопровода;  
2 – с учётом насыщения магнитопровода  
Рисунок 4 – Графики изменения реактивной мощности при различных скоростях и  $M_c = M_H$

Если продифференцировать по  $\Psi_{ru}$  выражение для коэффициента мощности (12) и приравнять производную нулю, то после преобразований получается следующее тождество, которому должны удовлетворять значения  $\Psi_{ru}$ , доставляющие максимум коэффициенту мощности:

$$Q_{s,r} \cdot \frac{dP_{s,r}}{dt} = P_{s,r} \cdot \frac{dQ_{s,r}}{dt} . \quad (18)$$

Для упрощения полученного уравнения примем скорость вращения системы координат  $\omega_k$ , не зависящей от потокосцепления, т.е. в дальнейших преобразованиях положим  $\omega_k = \omega$ . После подстановки выражений (6) и (9), а также результатов их дифференцирования по  $\Psi_{ru}$  в равенство (18), получим

$$\left( \frac{3L'_s \omega \Psi_{ru}^2}{2L_m^2} + \frac{2L'_s \omega M_c^2}{3N^2 K_r^2 \Psi_{ru}^2} + \frac{3K_r \omega \Psi_{ru}^2}{2L_m} + \frac{M_c}{NT_r} \right) \left( \frac{3R_s \Psi_{ru}}{L_m^2} - \frac{4R' M_c^2}{3N^2 K_r^2 \Psi_{ru}^3} \right) = \left( \frac{3R_s \Psi_{ru}^2}{2L_m^2} + \frac{2R' M_c^2}{3N^2 K_r^2 \Psi_{ru}^2} + \frac{\omega M_c}{N} \right) \left( \frac{3L'_s \omega \Psi_{ru}}{L_m^2} + \frac{3K_r \omega \Psi_{ru}}{L_m} - \frac{4L'_s \omega M_c^2}{3N^2 K_r^2 \Psi_{ru}^3} \right) . \quad (19)$$

Результатом преобразований выражения (19) будет следующее биквадратное уравнение:

$$\left( \frac{3R_s}{NT_r L_m^2} - \frac{3L'_s \omega^2}{NL_m^2} - \frac{3K_r \omega^2}{NL_m} \right) \Psi_{ru}^4 + \left( \frac{4R_s L'_s \omega M_c}{N^2 K_r^2 L_m^2} - \frac{4R' L'_s \omega M_c}{N^2 K_r^2 L_m^2} - \frac{4R' \omega M_c}{N^2 K_r L_m} \right) \Psi_{ru}^2 + \left( \frac{4L'_s \omega^2 M_c^2}{3N^3 K_r^2} - \frac{4R' M_c^2}{3K_r^2 N^3 T_r} \right) = 0 . \quad (20)$$

Решая уравнение (20) методом сведения его к квадратному уравнению для заданных скорости и момента нагрузки, беря далее в качестве результата единственный положительный действительный корень, получаем приближённое значение потокосцепления, при котором коэффициент мощности достигает максимума. Приближённость результатов следует из сделанного выше допущения  $\omega_k = \omega$ . В табл.6 содержатся результаты решения уравнения (20) для различных скоростей и моментов.

Таблица 6 – Физически реализуемые корни уравнения (20)

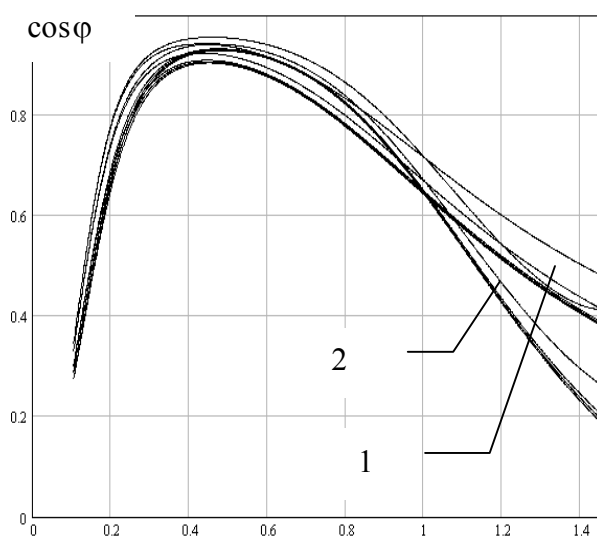
$\omega/\omega_0$	0,15	0,35	0,55	0,75	0,95	$M_c/M_H$
$\Psi_{ru}/\Psi_{рун}$	0,79	0,925	0,961	0,978	0,988	1
$L_m = L_{mn}$	0,56	0,654	0,68	0,691	0,698	0,5
	0,353	0,414	0,43	0,437	0,442	0,2

Если в выражение (12) подставим соотношения (6) и (11), то получим  $\cos\phi$  как функцию трёх переменных: угловой скорости вала в электрических рад/с, момента на валу и потокосцепления ротора. При фиксированных скорости и моменте нагрузки коэффициент мощности как функция потока имеет явно выраженный максимум. Для определения его координат в силу громоздкости и сложности получаемой зависимости целесообразно применить метод прямого численного поиска экстремума. Результаты вычислений, осуществлённые методом дихотомии, помещены в табл.7, из данных которой следует, что экстремальные значения потокосцеплений практически не изменяются от скорости и существенно зависят от момента нагрузки.

Таблиця 7 – Результати дослідження на екстремум коефіцієнта потужності АД при різних моделях критерія якості

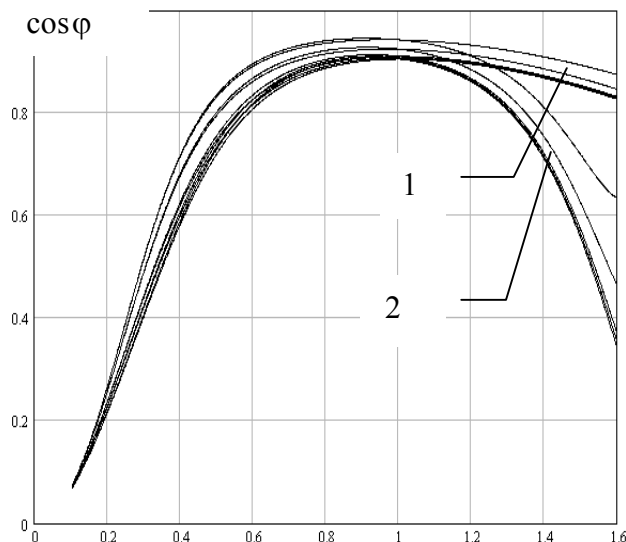
$\omega/\omega_0$		0,15	0,35	0,55	0,75	0,95	$M_c/M_H$
$\frac{\Psi_{ru}}{\Psi_{рун}}$	$L_m = L_{mн}$	0,968	0,992	1,004	1,004	1,009	1
	$L_m = f(\Psi_{ru})$	0,915	0,927	0,933	0,933	0,933	
	$L_m = L_{mн}$	0,685	0,703	0,709	0,709	0,715	0,5
	$L_m = f(\Psi_{ru})$	0,697	0,709	0,715	0,715	0,715	
	$L_m = L_{mн}$	0,432	0,444	0,45	0,45	0,45	0,2
	$L_m = f(\Psi_{ru})$	0,462	0,473	0,479	0,479	0,479	

Из сравнения значений табл.6, 7 видно, что наибольшие погрешности определения экстремальных значений потокосцеплений из решения уравнения (20) наблюдаются при низких скоростях вращения. На рис.5, 6 показаны графики зависимости коэффициента мощности от потока при разных скоростях и моментах. Рис.,5 6 подтверждают сделанные выше выводы и, кроме того, обнаруживают пологость функции коэффициента мощности в окрестности максимума.



1-без учёта насыщения магнитопровода;  
2-с учётом насыщения магнитопровода

Рисунок 5 – Графики коэффициента мощности при разных скоростях и  $M_c = 0.2M_H$



1-без учёта насыщения магнитопровода;  
2-с учётом насыщения магнитопровода

Рисунок 6 – Графики коэффициента мощности при разных скоростях и  $M_c = M_H$

Если по графикам рис.2 определить величины активных потерь для потокосцеплений, при которых функции реактивной мощности и коэффициента мощности достигают экстремума, то видно, что эти потери в подавляющем большинстве случаев не превышают номинальных. Исключение составляет область высоких скоростей и номинальных нагрузок, где экстремум достигается при потокосцеплениях несколько меньших номинального значения. При этом потери будут незначительно превышать номинальные. Однако благодаря пологости  $Q_{s,r}$  и  $\cos \phi$  в области экстремума можно сместить величину  $\Psi_{ru}$  до номинального значения, незначительно ухудшив при этом

функцию качества. Сказанное указывает на допустимость обеспечения экстремальных значений  $Q_{s,r}$  и  $\cos \varphi$  по условиям нагрева АД.

**Выводы.** Регулирование модуля потокосцепления ротора позволяет оптимизировать основные энергетические характеристики АД в статических режимах работы. При управлении по минимуму реактивной мощности или по максимуму коэффициента мощности модель с линейной кривой намагничивания можно эффективно использовать для получения достаточно точных приближений к экстремальным потокосцеплениям.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сандлер А.С. Автоматическое частотное управление асинхронными двигателями / А.С.Сандлер, Р.С.Сарбатов. – М.: Энергия, 1974. – 328с.

УДК 621.3.051.025

САДОВОЙ А.В., д.т.н., профессор  
АЛЕКСЕЕВ И.А., к.т.н., доцент  
ТРИКИЛО А.И., к.т.н., доцент

Днепродзержинский государственный технический университет

### ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РЕЗОНАНСНЫХ ТРАНСФОРМАТОРОВ В СИСТЕМЕ ОДНОПРОВОДНОЙ ПЕРЕДАЧИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

**Введение.** Более ста лет назад Никола Тесла опубликовал результаты своих опытов по резонансному методу передачи электрической энергии [1, 2]. В начале двадцатого века не было современных электронных компонентов, а трехфазные сети, работающие с частотой 50-60 Гц, успешно справлялись с задачами по передаче энергии в диапазоне мощности от сотен ватт до тысяч мегаватт и на расстояние до 1000 километров. Технологические потери на активных и реактивных сопротивлениях, коммуникационных и преобразующих устройствах при таком способе передачи электрической энергии составляют более 20%.

Первым на территории СНГ однопроводную систему передачи электрической энергии внедрил «Газпром» (Россия) и спонсировал изготовление соответствующей установки мощностью 20 кВт [3]. Вдоль газопроводов технологически прокладывают линии электропередачи для катодной защиты, питания насосов для перекачивания и для других эксплуатационных служб. Стандартные линии стоят дорого, содержат провода из цветных металлов. При однопроводной передаче энергии стало возможным протянуть стальной провод, а на некоторых участках газопровода даже осуществить передачу энергии по самой трубе. Такая система имеет в сотни раз лучшие электрические параметры (КПД более 90%), чем традиционные двух-, трехпроводные.

**Постановка задачи.** Основной задачей данной работы является анализ электрических, геометрических, частотных характеристик резонансных трансформаторов и основных закономерностей построения на их основе резонансных силовых сетей электропитания.

**Результаты работы.** На базе кафедры электромеханики Днепродзержинского государственного технического университета в лабораторных условиях была исследована однопроводная резонансная система передачи электрической энергии мощностью до 100 Вт.

В качестве передающего и принимающего трансформаторов в системе резонансной передачи электрической энергии использовались трансформаторы Тесла, изготовленные на пластиковых каркасах с параметрами, указанными в табл. 1.



Таблиця 1 – Конструктивні параметри експериментальних трансформаторів

Тип обмотки	Діаметр каркаса, м	Длина каркаса, м	Сечение провода, мм <sup>2</sup>	Количество витков, шт	Изоляция провода
Первичная	0,1	0,3	2	30	поливинилхлорид
Вторичная	0,05	0,75	0,09	3000	эмаль

После проведенных теоретических и экспериментальных исследований получена эквивалентная схема резонансного трансформатора, показанная на рис.1. Для неё характерны следующие параметры: емкость и индуктивность первичной обмотки ( $C_1, L_1$ ); емкость и индуктивность вторичной обмотки ( $C_2, L_2$ ); активные сопротивления первичной и вторичной обмоток ( $R_1, R_2$  – на рис.1 не показаны); взаимная индуктивность между обмотками ( $M_{св}$ ); взаимная емкость ( $C_{св}$ ). Последний параметр, как правило, не учитывается в методиках расчета низкочастотных и импульсных трансформаторов, но необходим при расчете резонансного трансформатора, так как учитывает характер резонансных явлений между первичной и вторичной обмотками.

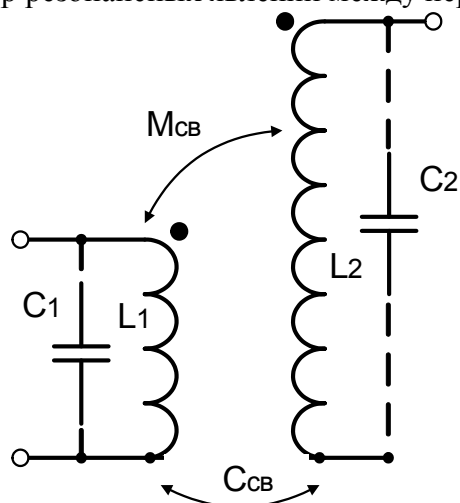


Рисунок 1 – Эквивалентная схема трансформатора Тесла

первичной и вторичной обмоток (номера передаточных функций соответствуют номерам резонансных частот, указанных в табл.2, 3 в скобках).

Для первичного контура после определения  $L_1, C_1, M_{св}, C_{св}$  [4,5] получены значения резонансных частот и соответствующие относительные показатели вклада в суммарный сигнал по отношению к гармонике с максимальной амплитудой (табл.2)

$$\varepsilon = A_i / A_{\max} \cdot \quad (1)$$

Аналогичные вычисления проведены для вторичной обмотки трансформатора (табл.3). Резонансный трансформатор Тесла можно представить в виде структурной схемы, приведенной на рис.2. Здесь передаточные функции  $W_i(p)$  представляют собой колебательные звенья с резонансной частотой, рассчитанной по формуле Томсона для возможных комбинаций  $C_i$  и  $L_i$

Таблиця 2 – Резонансные частоты в первичной обмотке

	$C_1$		$C_{св}$		$(C_1+C_{св})$	
	$f_r$ (кГц)	$\varepsilon$ , (отн. ед.)	$f_r$ (кГц)	$\varepsilon$ , (отн. ед.)	$f_r$ (кГц)	$\varepsilon$ , (отн. ед.)
$L_1$	300 (1)	32	3310 (2)	18	3430 (3)	19
$M_{св}$	240 (4)	41	919 (5)	62	950 (6)	63
$L_1+M_{св}$	230 (7)	51	890 (8)	63	919 (9)	62

Таблиця 3 – Резонансные частоты во вторичной обмотке

	$C_2$		$C_{св}$		$(C_2+C_{св})$	
	$f_r$ (кГц)	$\varepsilon$ , (отн. ед.)	$f_r$ (кГц)	$\varepsilon$ , (отн. ед.)	$f_r$ (кГц)	$\varepsilon$ , (отн. ед.)
$L_2$	300 (1)	33	< 100 (2)	$\approx 2-3$	320 (3)	115
$M_{св}$	2740 (4)	36	925 (5)	12	2890 (6)	37
$L_2+M_{св}$	300 (7)	56	< 100 (8)	$\approx 4-5$	318 (9)	200



Из полученных данных следует, что трансформатор Тесла обладает рядом резонансных частот, которые с погрешностью  $< 5\%$  кратны расчетной резонансной частоте вторичной обмотки ( $f_2 = 300$  кГц).

На рис.3, 4 приведена графическая интерпретация резонансных явлений в первичной и вторичной обмотках трансформатора соответственно. Все множество резонансных частот контуров первичной и вторичной обмоток на рисунках расположены в трехчастотных полосах  $\Delta f_i$  и гармонически связаны между собой.

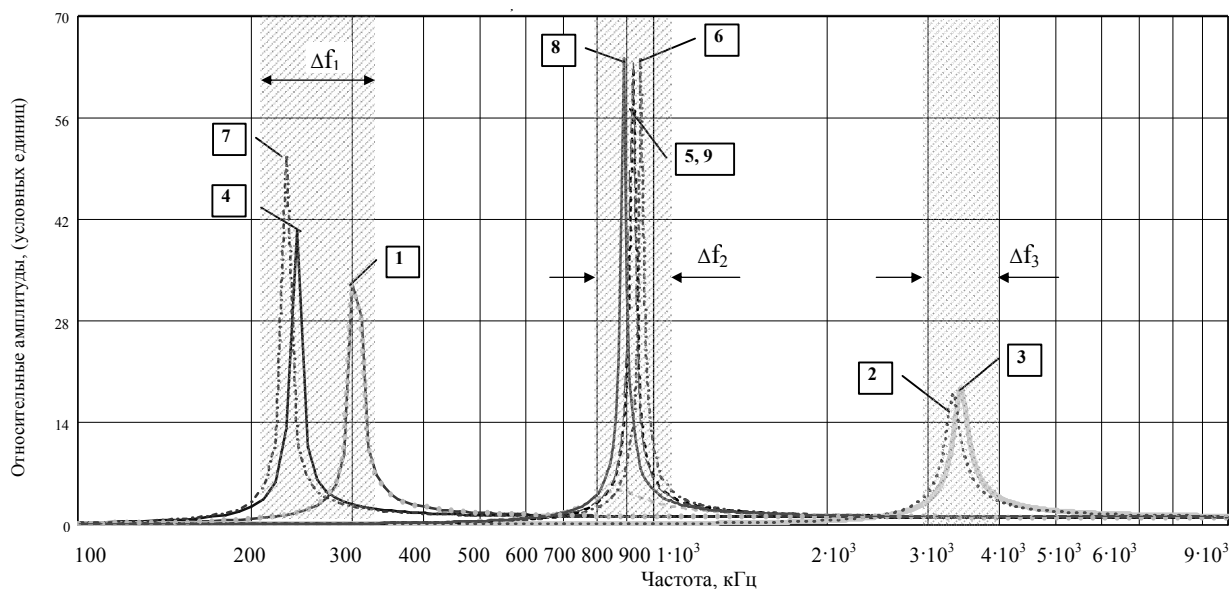


Рисунок 3 – Графическая интерпретация резонансных явлений в первичной обмотке трансформатора Тесла

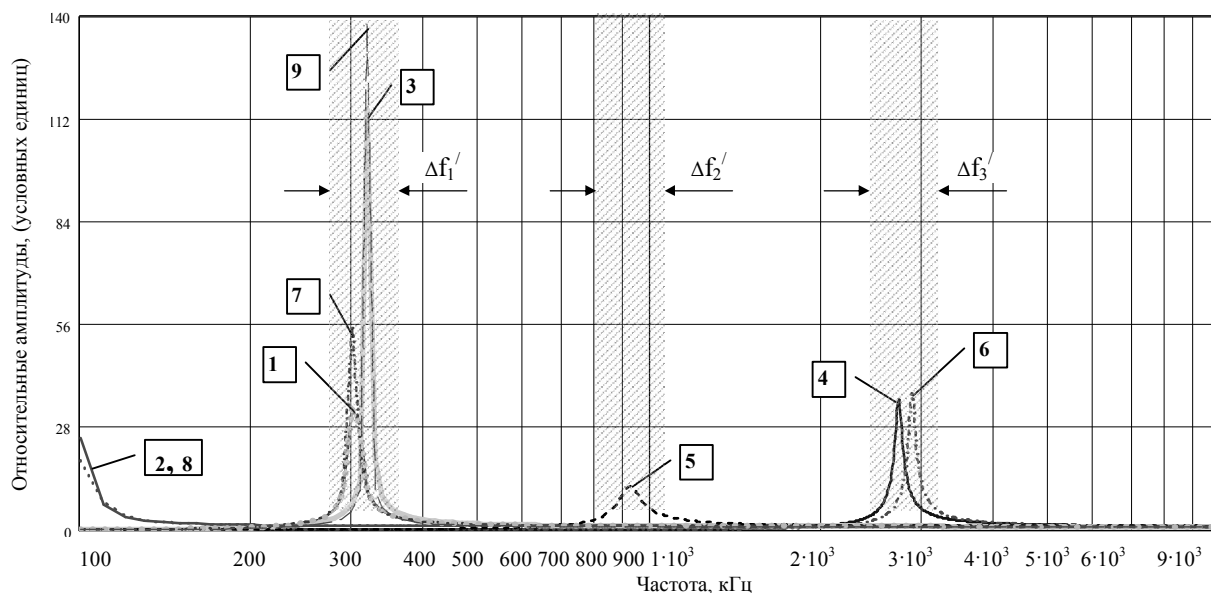


Рисунок 4 – Графическая интерпретация резонансных явлений во вторичной обмотке трансформатора Тесла

Ширина частотных полос, количество резонансных частот, расположенных в соответствующих полосах, и их суммарные энергетические показатели различны для

первичной и вторичной обмоток трансформатора Тесла. Это явление объясняется конструктивными особенностями трансформатора, а именно, более «строгими» требованиями к расчету и практическому достижению резонанса во вторичной обмотке.

Экспериментальным путем установлено, что рабочая частота комплекса, состоящего из двух резонансных трансформаторов Тесла и проводника, соединяющего передатчик и приемник энергии, лежит в пределах 260-280 кГц. Допустимая ошибка установки рабочей частоты комплекса не более  $\pm 2 \dots 2,5$  кГц ( $\Delta \leq 1\%$ ).

Таким образом, внешне простой по конструкции резонансный трансформатор Тесла, используемый в качестве передающего и принимающего устройства в системе резонансной передачи электрической энергии, представляет собой сложный объект управления с множеством дополнительных резонансных частот, что значительно усложняет задачу автоматического поиска и поддержания рабочей частоты комплекса и требует реализации дополнительных процедур по обеспечению стабильности и помехозащищенности информационного канала системы управления.

#### **Выводы.**

1. Все множество резонансных частот контуров первичной и вторичной обмоток трансформатора Тесла расположены в трех частотных полосах  $\Delta f_i$  и гармонически связаны между собой.
2. Внедрение комплексов резонансной однопроводной передачи электрической энергии требует разработки методики идентификации и автоматического управления резонансными явлениями в системе.

#### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Тесла Н. Статьи / Н.Тесла. – Самара: Издательский дом «Агни», 2008. – 584с.
2. Тесла Н. Колорадо-Спрингс. Дневники. 1899-1900 / Н.Тесла. – Самара: Издательский дом «Агни», 2008. – 460с.
3. Стребков Д.С. Резонансные методы передачи электрической энергии / Д.С.Стребков, А.И.Некрасов; под ред. академика РАСХН Д.С.Стребкова. – 2-е изд. – М.: ВИЭСХ, 2006. – 304с.
4. Иоссель Ю.Я. Расчет электрической емкости / Иоссель Ю.Я., Кочанов Э.С., Струнский М.Г. – 2-е изд., перераб. и доп. – Л.: Энергоиздат. Ленингр. отд-ние, 1981. – 288с.
5. Немцов М.В. Справочник по расчету катушек индуктивности / М.В.Немцов, Ю.М.Шамаев. – М.: Энергоиздат, 1981. – 136с.

УДК 681.5.03

ВОЛЯНСКИЙ Р.С., к.т.н., доцент  
САДОВОЙ А.В., д.т.н., профессор

Днепродзержинский государственный технический университет

### **КОНСТРУИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ КАЧЕСТВА ДЛЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ АКТИВАЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ**

**Введение.** Существующие системы управления электромеханическими объектами обеспечивают экспоненциально протекающие переходные процессы и гарантируют требуемый запас устойчивости [1]. Такой характер движения объекта управления в замкнутой системе объясняется в первую очередь линейностью используемых управляющих воздействий. Аналогичная ситуация наблюдается в системах разрывного

управления, которые в скользящем режиме эквивалентны линейным с неограниченным коэффициентом усиления, а при срыве скользящего режима работают как разомкнутые с максимальным управляющим воздействием. За счет форсировки управляющего воздействия системы разрывного управления обладают высоким быстродействием и точностью. Однако процесс управления в таких системах сопровождается подачей на объект в каждый момент времени максимального управляющего воздействия, что не всегда является энергетически целесообразным и приводит к значительным энергетическим затратам. Поэтому, наряду с рассмотренными ранее системами в последнее время появились разработки, позволяющие форсировать протекание переходных процессов без повышения энергии управления в установившихся режимах. В первую очередь к таким разработкам следует отнести системы управления, реализующие скользящие режимы высоких порядков [2], которые возникают при использовании иррациональных активационных функций и реализуются управлениями вида

$$U = -|S|^{\alpha} \text{sign}(S), \quad (1)$$

где  $S$  – линия равновесного состояния регулятора;  $\alpha$  – показатель степени,  $\alpha \in [0,1]$ .

Выполненные ранее исследования [3] показали, что существенное влияние на быстродействие систем с управлениями (1) оказывает показатель степени  $\alpha$ , с уменьшением которого повышается не только быстродействие, но и колебательность системы. Это позволяет форсировать систему при пуске, однако негативно сказывается на установившемся режиме.

Данный факт позволил сформулировать гипотезу об изменении показателя степени  $\alpha$  в процессе движения системы управления, в соответствии с которой замкнутая система при больших рассогласованиях работает как релейная с  $\alpha = 0$ , а по мере снижения ошибки управления увеличивается показатель  $\alpha$ , что устраняет автоколебания и существенно ограничивает энергию управления. Таким образом, в установившемся режиме система может работать в соответствии с линейным алгоритмом управления, обеспечивая минимальное энергопотребление, а при возрастании отклонения управляемой величины от заданного значения автоматически снижается показатель  $\alpha$ , и за счет повышенного энергопотребления происходит форсированный переход в новую точку фазового пространства. Таким образом, за счет плавного изменения активационной функции организуется система оптимального управления с переменной структурой.

Проверке данной гипотезы в настоящее время препятствует отсутствие функционалов качества, минимизация которых осуществляется управляющим воздействием вида

$$U = -f_1(S)^{f_2(S)}. \quad (2)$$

Управление (2) является сложной функцией от  $S$ , и определение интегральных функционалов качества, которые оно минимизирует на траекториях управляемого движения, – достаточно сложная задача. Поэтому прежде чем переходить к решению этой задачи, целесообразно рассмотреть определение целей управления, достижение которых обеспечивают управляющие воздействия с показательной активационной функцией

$$U = -C|f_2(S)| \text{sign}(S), \quad (3)$$

где  $C$  – отличная от 0 и  $\pm 1$  константа, которая определяет амплитуду управляющего воздействия.

**Постановка задачи.** Целью настоящей работы является определение интегрального функционала качества, минимизация которого осуществляется оптимальным управлением (3).

**Результаты работы.** Искомый функционал качества представим в виде интеграла двух слагаемых, первое из которых  $F(S)$  определяет асимптотичность траекторий движения системы управления, а второе  $G(U)$  – расход энергии управления

$$I = \int_0^{\infty} [F(S) + G(U)] dt. \quad (4)$$

Для определения слагаемых функционала (4) в соответствии с [4] запишем сопряженные функции

$$\begin{aligned} f(S) &= -g^{-1}(U) = C^{|f_2(S)|} \text{sign}(S); \\ g(U) &= -f^{-1}(S) = \log_C |U| \text{sign}(U). \end{aligned} \quad (5)$$

Расход энергии на управление  $G(U)$  может быть найден путем интегрирования последнего выражения системы (5) по управляющему воздействию

$$\begin{aligned} G(U) &= \int g(U) dU = \int \log_C |U| \text{sign}(U) dU = \frac{1}{\ln C} \int \ln |U| \text{sign}(U) dU = \\ &= \frac{1}{\ln C} |U| (\ln |U| - 1) = C_1 |U| \ln |U| - C_1 |U|, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $C_1 = \frac{1}{\ln C}$ .

Графическое представление функций  $g(U)$  и  $G(U)$  для случая  $C = 2$  приведено на рис.1.

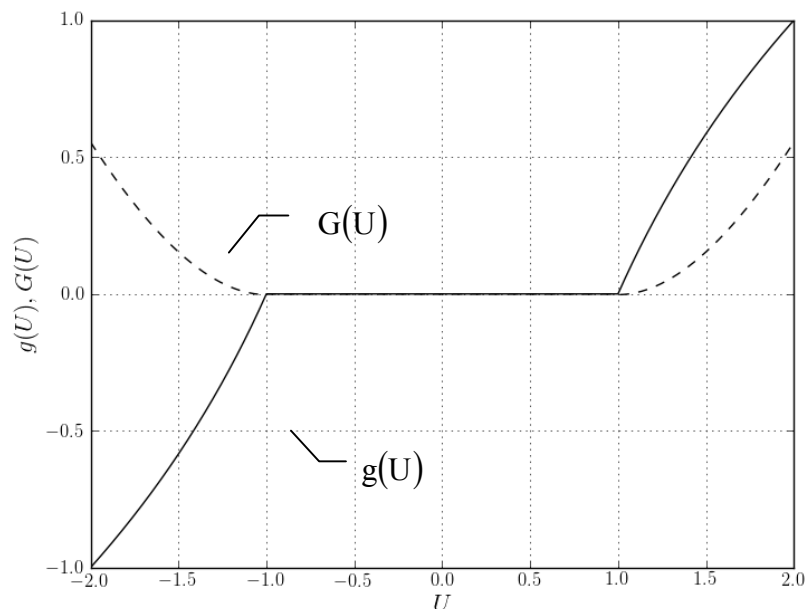


Рисунок 1 – Внешний вид функций  $g(U)$  и  $G(U)$

Анализ выражения (6) и графиков, приведенных на рис.1, показывает, что функция  $G(U)$  является знакопостоянной, имеющей экстремум, соответственно интеграл от нее

$$I_U = \int_0^{\infty} G(U) dt \quad (7)$$

имеет экстремали и может использоваться при построении оптимальных систем.

Перейдем теперь к рассмотрению составляющей  $F(S)$  функционала (4). Эта составляющая в самом общем случае определяется выражением [4]

$$F(S) = S \cdot f(S) - \int S \frac{\partial f(S)}{\partial S} dS, \quad (8)$$

которое с учетом функции (5) примет вид

$$\begin{aligned} F(S) &= S \cdot C^{|f_2(S)|} \text{sign}(S) - \int S \frac{\partial C^{|f_2(S)|}}{\partial |f_2(S)|} \frac{\partial f_2(S)}{\partial S} dS = \\ &= S \cdot C^{|f_2(S)|} \text{sign}(S) - \ln C \int S C^{|f_2(S)|} \text{sign}(S) \frac{\partial f_2(S)}{\partial S} dS. \end{aligned} \quad (9)$$

Вычисление интеграла, образующего второе слагаемое выражения (9) в общем виде при неопределенной функции  $f_2(S)$  затруднено. Поэтому имеет смысл рассмотреть определение значения выражения (9) для ряда случаев при различных функциях  $f_2(S)$ .

**1. Функция**  $f_2(S) = S$ . В этом случае выражение (9) принимает вид

$$\begin{aligned} F(S) &= S \cdot C^{|S|} \text{sign}(S) - \ln C \int S C^{|S|} \text{sign}(S) \frac{\partial S}{\partial S} dS = \\ &= S \cdot C^{|S|} \text{sign}(S) - \ln C \int S C^{|S|} \text{sign}(S) dS = \\ &= |S| \cdot C^{|S|} - \ln C \int |S| C^{|S|} dS = |S| \cdot C^{|S|} - \ln C \frac{C^{|S|} (|S| \ln C - 1)}{(\ln C)^2} = \\ &= |S| \cdot C^{|S|} - \frac{\ln C |S| C^{|S|}}{\ln C} + \frac{C^{|S|}}{\ln C} = \frac{C^{|S|}}{\ln C} = C_1 C^{|S|}. \end{aligned} \quad (10)$$

Очевидно, что выражение  $C_1 C^{|S|}$  имеет экстремум при  $S = 0$ .

Подстановка значений выражений (10) и (6) в функционал (4) позволяет получить следующий функционал качества:

$$I = \int_0^{\infty} [C_1 C^{|S|} + (C_1 |U| \ln |U| - C_1 |U|)] dt = C_1 \int_0^{\infty} [C^{|S|} + (|U| \ln |U| - |U|)] dt, \quad (11)$$

который минимизируется оптимальным управлением

$$U = -C^{|S|} \text{sign}(S). \quad (12)$$

**2. Функция**  $f_2(S) = \sqrt{|S|}$ . Для этой функции первое слагаемое интегранта функционала (4) примет вид

$$\begin{aligned}
 F(S) &= S \cdot C^{\sqrt{|S|}} \text{sign}(S) - \ln C \int S C^{\sqrt{|S|}} \text{sign}(S) \frac{\partial \sqrt{|S|}}{\partial S} dS = \\
 &= S \cdot C^{\sqrt{|S|}} \text{sign}(S) - \ln C \int \frac{|S| C^{\sqrt{|S|}}}{2\sqrt{|S|}} dS = |S| \cdot C^{\sqrt{|S|}} - \frac{\ln C}{2} \int \sqrt{|S|} C^{|S|} dS = \\
 &= |S| \cdot C^{\sqrt{|S|}} - \ln C \frac{C^{\sqrt{|S|}} (|S| (\ln C)^2 - 2\sqrt{|S|} \ln C + 2)}{(\ln C)^3} = \\
 &= |S| \cdot C^{\sqrt{|S|}} - \ln C \frac{|S| \cdot C^{\sqrt{|S|}} (\ln C)^2}{(\ln C)^3} + \ln C \frac{2\sqrt{|S|} \cdot C^{\sqrt{|S|}} \ln C}{(\ln C)^3} - \ln C \frac{2C^{\sqrt{|S|}}}{(\ln C)^3} = \\
 &= \frac{2\sqrt{|S|} \cdot C^{\sqrt{|S|}}}{\ln C} - \frac{2C^{\sqrt{|S|}}}{(\ln C)^2} = 2 \frac{C^{\sqrt{|S|}}}{\ln C} \left( \sqrt{|S|} - \frac{1}{\ln C} \right) = 2C_1 C^{\sqrt{|S|}} (\sqrt{|S|} - C_1)
 \end{aligned} \tag{13}$$

Подставив в функционал (4) значения выражений (13) и (6), получим следующий интегральный функционал

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\infty} \left[ 2C_1 C^{\sqrt{|S|}} (\sqrt{|S|} - C_1) + (C_1 |U| \ln |U| - C_1 |U|) \right] dt = \\
 &= C_1 \int_0^{\infty} \left[ 2C^{\sqrt{|S|}} (\sqrt{|S|} - C_1) + (|U| \ln |U| - |U|) \right] dt,
 \end{aligned} \tag{14}$$

который минимизируется оптимальным управлением

$$U = -C^{\sqrt{|S|}} \text{sign}(S). \tag{15}$$

В рассмотренных примерах интеграл, образующий второе слагаемое выражения (9), определялся через элементарные функции. Однако в ряде случаев найти значение этого интеграла в классе элементарных функций не представляется возможным.

Проиллюстрируем это следующими примерами.

**3. Функция**  $f_2(S) = \frac{1}{|S|}$ . Для гиперболической функции первое слагаемое интеграла функционала (4) примет вид

$$\begin{aligned}
 F(S) &= S \cdot C^{1/|S|} \text{sign}(S) - \ln C \int S C^{1/|S|} \text{sign}(S) \frac{\partial (1/|S|)}{\partial S} dS = \\
 &= |S| \cdot C^{1/|S|} + \ln C \int |S| \frac{C^{1/|S|}}{|S|^2} dS = |S| \cdot C^{1/|S|} + \ln C \int \frac{C^{1/|S|}}{|S|} dS.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Найти значение интеграла, образующего второе слагаемое выражения (16), в элементарных функциях невозможно, однако значение  $F(S)$  может быть определено через экспоненциальный интеграл [5]

$$Ei(a, z) = \int_1^{\infty} e^{-kz} k^{-a} dk \tag{17}$$

следующим образом:



$$F(S) = |S| \cdot C^{1/|S|} + \ln C \cdot \text{Ei} \left( 1, -\frac{\ln C}{|S|} \right) = |S| \cdot C^{1/|S|} + \frac{1}{C_1} \text{Ei} \left( 1, -\frac{1}{C_1|S|} \right). \quad (18)$$

Тогда с учетом выражений (18) и (6) искомый функционал примет вид

$$I = \int_0^{\infty} \left[ |S| \cdot C^{1/|S|} + \frac{1}{C_1} \text{Ei} \left( 1, -\frac{1}{C_1|S|} \right) + (C_1|U| \ln|U| - C_1|U|) \right] dt. \quad (19)$$

Функционал (19) минимизируется оптимальным управлением

$$U = -C^{1/|S|} \text{sign}(S). \quad (20)$$

**4. Функция**  $f_2(S) = |S|^\alpha$ . Найдем функционал качества, который минимизируется оптимальным управлением

$$U = -C^{1/|S|^\alpha} \text{sign}(S), \alpha \neq 0. \quad (21)$$

Использование при вычислении второго слагаемого выражения (9) верхней неполной гамма-функции [5]

$$\Gamma(s, x) = \int_x^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt, \quad (22)$$

которая связана с интегралом (17) соотношением

$$\text{Ei}(a, z) = z^{a-1} \Gamma(1-a, z), \quad (23)$$

позволяет обобщить полученные результаты на случай произвольного показателя степени  $\alpha$  функции

$$f_2(S) = |S|^\alpha. \quad (24)$$

Тогда выражение (9) примет вид

$$\begin{aligned} F(S) &= S \cdot C^{1/|S|^\alpha} \text{sign}(S) - \ln C \int S C^{1/|S|^\alpha} \text{sign}(S) \frac{\partial |S|^\alpha}{\partial S} dS = \\ &= |S| \cdot C^{1/|S|^\alpha} - \alpha \ln C \int |S| C^{1/|S|^\alpha} |S|^{\alpha-1} dS = |S| \cdot C^{1/|S|^\alpha} - \alpha \ln C \int C^{1/|S|^\alpha} |S|^\alpha dS = \\ &= |S| \cdot C^{1/|S|^\alpha} + \alpha \ln^{(\alpha-1)/\alpha} C \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}, -\ln C |S|^\alpha\right)}{\alpha^{\alpha-1}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Подставив выражения (25) и (6) в функционал (4), получим

$$I = \int_0^{\infty} \left[ |S| \cdot C^{1/|S|^\alpha} + \alpha \ln^{(\alpha-1)/\alpha} C \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}, -\ln C |S|^\alpha\right)}{\alpha^{\alpha-1}} + (C_1|U| \ln|U| - C_1|U|) \right] dt. \quad (26)$$

Дальнейшее усложнение функции  $f_2(S)$ , в частности переход к аддитивным формам

$$f_2(S) = \sum_{i=1}^m w_i f_i(S), \quad (27)$$

где  $m$  – число слагаемых функции  $f_2(S)$ , приводит к необходимости использования и других неэлементарных функций.

В частности использование функции ошибок [5]

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (28)$$

позволило определить функционал, который минимизируется управлением

$$U = -C^{w_1} \sqrt{|S|} + w_2 |S| \operatorname{sign}(S), \quad (29)$$

однако вследствие громоздкости полученного интеграла он здесь не приводится.

**Выводы.** Приведенные математические выкладки позволяют сделать вывод о том, что функционалы качества, которые минимизируются оптимальными управлениями с показательной активационной функцией, состоят из двух слагаемых, определяющих динамику объекта управления и энергию управления, необходимую для осуществления движения объекта по заданным траекториям возмущенного движения.

Необходимо отметить, что составляющая  $G(U)$ , которая учитывает расход энергии управления, однозначно зависит от управляющего воздействия и при  $|U| \leq 1$  имеет экстремум, наличие которого позволяет математически обосновать возможность снижения затрат энергии управления в оптимальных системах, реализующих управляющие воздействия (3).

Составляющая  $F(S)$  функционала качества, определяющая траекторию возмущенного движения объекта управления, в простейших случаях может быть выражена через элементарные функции, причем в этом случае по ее виду может быть определен класс оптимального управления. В более сложных случаях эта составляющая не может быть определена среди элементарных функций и выражается через ряд неэлементарных функций. Использование некоторых из них позволяет значительно расширить класс минимизируемых функционалов, а значит, и увеличить область используемых управляющих воздействий.

Сложность приведенного математического аппарата создает предпосылки к использованию в инженерных расчетах численных методов для определения составляющих функционала (4) и алгоритмов оптимального управления (3).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Садовой А.В. Системы оптимального управления прецизионными электроприводами / Садовой А.В., Сухинин Б.В., Сохина Ю.В. – К.: ИСИМО, 1996. – 298с.
2. Емельянов С.В. Новые типы обратной связи: управление при неопределенности / С.В.Емельянов, С.К.Коровин. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 352с.
3. Волянский Р.С. Синтез оптимальной системы управления с иррациональной активационной функцией / Р.С.Волянский, А.В.Садовой // Вестник НТУ «ХПИ» «Проблемы автоматизированного электропривода» (Теория и практика). – 2010. – Вып.28. – С.49-51.
4. Волянский Р.С. Решение обратной задачи аналитического конструирования регуляторов для электромеханической системы с обобщенной активационной функцией / Р.С.Волянский, К.А.Калужный // Достижение молодых ученых в развитии инновационных процессов в экономике, науке и образовании: сборник докладов научной конференции, ч.1. – Брянск: изд-во БГТУ. – 2011. – С.139-140.
5. Ямке Е. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы / Е.Ямке, Ф.Эмде, Ф.Леш. – М.:Наука, 1964. – 344с.

Харьковская национальная академия городского хозяйства

## О ЗАДАЧЕ УЧЕТА ВИХРЕВЫХ ТОКОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МАШИНЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

**Введение.** Действие вихревых токов в машине постоянного тока связано с весьма важными для машины процессами, такими как ее коммутация, добавочные потери, перенапряжения. Вихревые токи возникают в электропроводящих массивных элементах и связаны с нестационарными процессами, протекающими в этих элементах. К этим процессам можно отнести следующие:

- возникновение вихревого тока в пазовой части;
- вихревые токи в коммутирующих секциях якорной обмотки [1];
- вихревые токи в станине [2, 3, 4].

Актуальность решения задач распределения вихревых токов, обладающих общностью постановки, не вызывает сомнений.

**Постановка задачи.** Действие вихревого тока в участках электрической машины связано с неравномерностью распределения на рассматриваемом участке силовых линий магнитного поля. Решение задачи распределения линий напряженности магнитного поля  $H_n$  по сечению участка с вихревым током является дуальным решением задачи о распределении плотности вихревого тока  $j$  по рассматриваемому сечению. Решения задачи распределения вихревых токов в перечисленных выше случаях могут быть найдены как численными, так и аналитическими методами, что предлагается в настоящей статье

**Результаты работы.** В аналитической постановке задачи участки магнитопровода с вихревыми токами входят составляющими в рассматриваемую магнитную цепь, которая представляется приведенной схемой замещения.

В общем случае, исходной основой для анализа является система уравнений электромагнитного поля (уравнений Максвелла). Ниже будет показана важность корректной постановки задачи расчета, поэтому приведем систему уравнений в интегральной и дифференциальной форме с комментариями, относящимися к рассматриваемому кругу задач.

Основными векторами, определяющими электромагнитное поле, являются:

- вектор электрического смещения  $\vec{D}$  и связанный с ним вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$ . Вектора  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  связаны соотношением удельной электрической проницаемости  $\varepsilon$

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (1)$$

где физическая константа  $\varepsilon_0 = 8,856 \times 10^{-12} \text{ Ф/м}$ ;

- вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  и связанный с ним вектор напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ . Вектора  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  связаны соотношением удельной магнитной проницаемости  $\mu$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad (2)$$

где физическая константа  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Гн/м}$ .

- вектор плотности тока  $\vec{j}$  (в рассматриваемых случаях это вектор плотности вихревого тока) связан с вектором напряженности электрического поля  $\vec{E}$  законом Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}, \quad (3)$$

где  $\rho$  – удельное электрическое сопротивление участка с вихревым током.

Четыре уравнения Максвелла приводятся в интегральной и дифференциальной формах.

Первое уравнение представляет закон полного тока.

<i>Интегральная форма</i>	<i>Дифференциальная форма</i>	
$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint H_n \cdot dl = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{s},$	$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}.$	(4)

В (4) отсутствует составляющая "тока смещения"  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  в силу условий рассматриваемой задачи.

Второе уравнение представляет закон электромагнитной индукции.

<i>Интегральная форма</i>	<i>Дифференциальная форма</i>	
$\oint \vec{E} \cdot d\vec{z} = \oint E_n \cdot dz = -\frac{d\Phi}{dt},$	$\text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$	(5)

Величина магнитного потока в (5) определена как поток вектора магнитной индукции  $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S B_n \cdot ds.$

Третье и четвертое уравнения выражают тот факт, что полем источников является лишь электрическое поле, а источников у магнитного поля не бывает.

<i>Интегральная форма</i>	<i>Дифференциальная форма</i>	
$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q,$	$\text{div } \vec{D} = q.$	(6)

$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0,$	$\text{div } \vec{B} = 0.$	(7)
---------------------------------------	----------------------------	-----

Здесь величина  $Q$  представляет суммарный электрический заряд, заключенный в объеме, ограниченном замкнутой поверхностью  $S$ , а величина  $q$  представляет плотность объемного электрического заряда. Уравнения (6) и (7) говорят о природе электрического поля как поля источников и магнитного поля как поля вихрей и выражают известную теорему Гаусса. Интегральная форма уравнений (6) и (7) представляет поток вектора. Дифференциальная форма уравнений (6) и (7) получается при помощи предельного перехода из интегральной при  $S \rightarrow 0$ . Замкнутый характер поверхности  $S$

позволяет однозначно провести указанный предельный переход, который собственно и дает понятие векторной операции дивергенции.

С уравнениями (4) и (7) связаны граничные условия векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ , представляющие соотношения непрерывности линий вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  и источников вектора  $\vec{H}$  на границе двух сред:

$$B_{n1} = B_{n2}; \quad (8)$$

$$H_{\tau 1} = H_{\tau 2}. \quad (9)$$

Граничное условие (9) справедливо при отсутствии токового слоя на границе.

Более внимательного рассмотрения требует предельный переход в (4) и (5), который производится по теореме Стокса. Для закона полного тока эта теорема представляет выражение

$$\int_S (\text{rot } \vec{H})_z ds = \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l}. \quad (10)$$

Сам предельный переход осуществляется в соответствии с выражением

$$\text{rot}_z \vec{H} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint H_n \cdot dl}{S} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\int j_z \cdot ds}{S}. \quad (11)$$

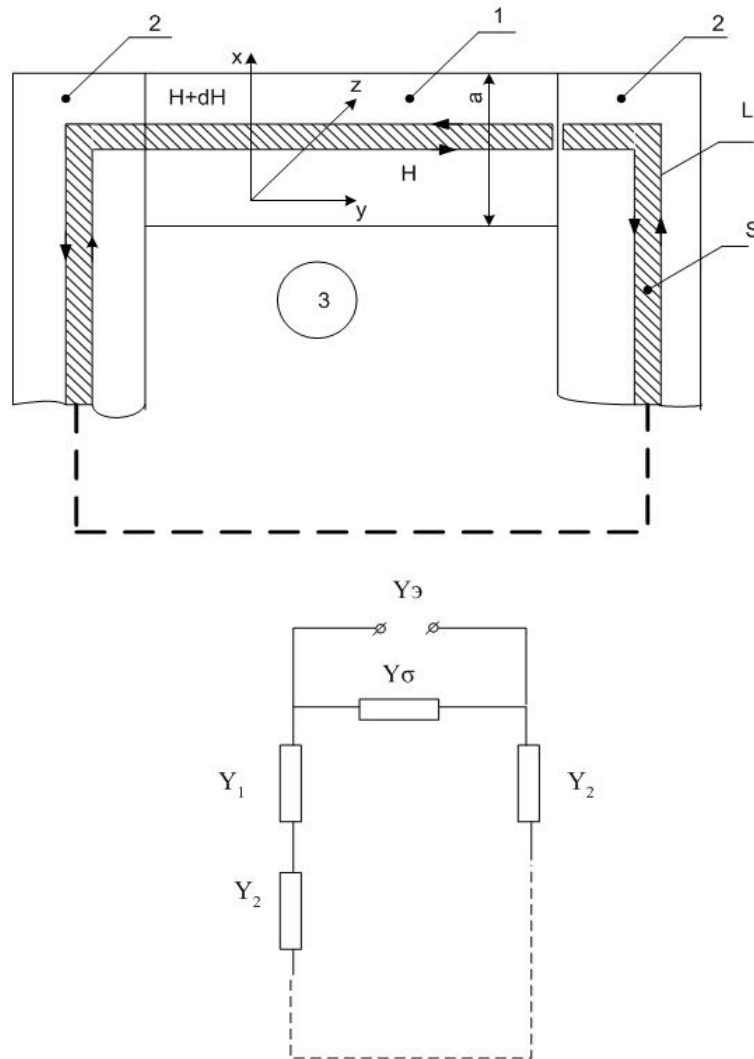
Здесь  $S$  – площадь рассматриваемой поверхности, внутри которой протекает полный ток с плотностью  $\vec{j}$  в направлении вектора  $d\vec{z}$ . Сам же ток ограничен замкнутым контуром обхода  $L$ . Таким образом, контур  $L$  и соответствующая ему площадь  $S$  неразрывно связаны. В общем случае предельный переход связан с понятием циркуляции вектора. Циркуляция вектора  $\vec{H}$  может приниматься по любому замкнутому контуру.

*Задачи, сочетающие уравнения поля со схемами замещения.* Схему замещения следует представлять как некоторую модель реального поля. Пользуясь понятиями модели, следует обозначить основные особенности указанной модели в рамках рассматриваемой задачи. Главными особенностями есть предположения о сосредоточенности поля в рамках магнитопровода, соответственно в ветвях схемы, и о характере представления поля в рамках ветвей схемы. Магнитное поле в рамках схемы замещения представим в виде "нитей" магнитного потока замкнутых по контурам ветвей схемы.

Последнее представление физически определяет и характер поля, и особенности граничных условий (8), (9). Условие о тангенциальной составляющей напряженности поля (9) вообще не рассматривается, поскольку в рамках представленной модели тангенциальной составляющей поля вообще не существует, а условие (8) равенства нормальной составляющей магнитной индукции на границе раздела сред следует принимать как непрерывность "нитей" потока.

Такого рода ограничения жестко определяют единственно возможный вид контура циркуляции вектора поля в виде контура  $L$  на рис.1, то есть контура, охватываемого замкнутыми "нитями" потока. Например, контур, замыкающийся только по одному участку или части участков магнитопровода, выбрать невозможно по причине условия о тангенциальной (поперечной) составляющей поля.

Неучет формы контура циркуляции может приводить к расчетной ошибке, заключающейся в применении уравнений поля в дифференциальной форме для участков модели поля в рамках схемы замещения. Типичный пример возникновения этой ошибки можно рассмотреть на примере простой модели магнитной цепи электромагнита, показанной на рис.2.



1 – рассматриваемый участок; 2 – участки магнитопровода; 3 – область рассеивания

Рисунок 1– Массивный участок в составе неоднородной магнитной цепи

Рассмотрим массивный участок прямоугольного сечения со сторонами  $a$  и  $b$  длиной  $l_1$  в составе магнитной цепи электромагнита с воздушным зазором величиной  $\delta$  при мгновенном отключении внешнего источника МДС (рис.2). Удельное электрическое сопротивление рассматриваемого участка  $\rho$ , а магнитная проницаемость составляет  $\mu_1$ . Начальное значение магнитного потока на момент отключения МДС составляет  $\Phi_0$ .

Для среды с вихревым током плотностью  $j$  используем в дифференциальной форме первое и второе уравнения Максвелла (4) и (5), а также закон Ома (3), откуда, применяя операцию ротора к (3), имеем:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{j}) &= \frac{1}{\rho} \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\mu_1}{\rho} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{rot rot}(\vec{B}) &= \text{rot}(\mu_1 \vec{j}) = -\Delta(\vec{B}) + \text{grad div}(\vec{B}) = \mu_1 \text{rot}(\vec{j}). \end{aligned}$$

Здесь  $\Delta$  – оператор лапласиана. В последнем преобразовании использовано четвертое уравнение Максвелла (7),  $\text{div}(\vec{B}) = 0$ , поэтому

$$\Delta(\vec{B}) = \frac{\mu_1}{\rho} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

$$\begin{cases} \nabla^2 B_x(x, y) = \frac{\mu_1}{\rho} \frac{\partial B_x}{\partial t}, \\ \nabla^2 B_y(x, y) = \frac{\mu_1}{\rho} \frac{\partial B_y}{\partial t}. \end{cases} \quad (12)$$

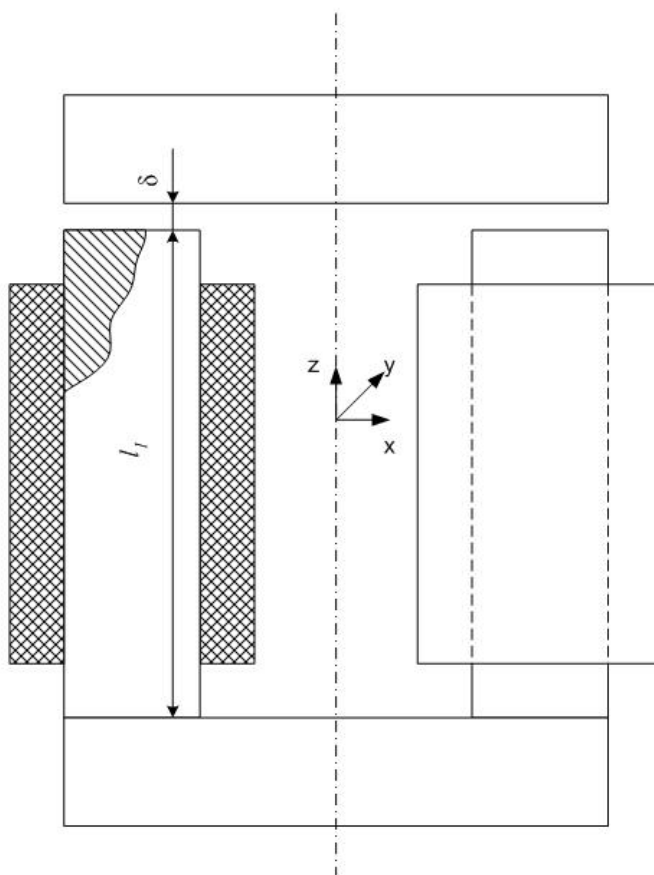


Рисунок 2 – Электромагнит с неоднородной магнитной цепью

Уравнения (12) записаны в декартовой системе координат, дифференциальный оператор  $\nabla^2 B_x(x, y) = \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2}$ .

Система уравнений (12), записанная относительно составляющих вектора магнитной индукции, является уравнением типа "теплопроводности". Его начальными условиями могут быть

$$B_x(0) = B_y(0) = \frac{\Phi_0}{ab}.$$

Граничные условия определяются соотношениями (8) и (9) для непрерывной среды. Применение уравнений (12) для массивного участка  $l_1$  приведет к ошибке, поскольку пути прохождения потока на рис.2 ограничены границами магнитопровода, фактически рамками схемы замещения, и среда уже не является непрерывной, а дискретной. В одномерной постановке (для плоскопараллельного поля) граничные условия относятся сугубо к участку  $l_1$  и выражаются нулевым суммарным током через участок и отсутствием вихревого тока в середине:

$$\int_0^a j(x)dx = 0, \quad j(a/2) = 0. \quad (13)$$

Совместно с уравнениями (12) решение для участка  $l_1$  получается "самодостаточным", и настораживает тот факт, что в нем отсутствует такой важный параметр магнитной цепи, как величина зазора  $\delta$ .

К сожалению, такие подходы встречаются в литературе ([5, 6]). Иное решение рассматриваемой задачи приведено в статье [1] и работах Р.Рюденберга в виде:

$$\Phi(t) = \Phi_0 \sum_{m,n=1,3,5\dots} \frac{1}{m^2 n^2} e^{-t/T_{mn}}, \quad (14)$$

$$T_{mn} = \frac{\mu_0}{\rho} \cdot \frac{l_1}{\delta} \times \frac{a^2 b^2}{\pi^2 (m^2 b^2 + n^2 a^2)}.$$

Решение (14) учитывает факторы формы магнитопровода – длину демпфирующего участка  $l_1$  и величину воздушного зазора  $\delta$  электромагнита.

*Предельный переход для первого уравнения Максвелла. Эквивалентная магнитная проницаемость.* Аналитические приближения оценки вихревых токов в неоднородных магнитопроводах, как правило, связаны с применением схем замещения. В общем случае, постановку задачи показывает рис.1. Участок 1 является массивным электропроводящим элементом сложного магнитопровода. При изменениях магнитного потока  $\Phi(t)$  в нем возникает вихревой ток с распределенной плотностью  $j(x)$  в указанной системе координат. Вихревой ток замыкается в направлении координаты  $z$ , соответственно длину участка 1 в этом направлении будем обозначать  $L_1$ . В составе магнитопровода рассматриваются  $n$  последовательных участков с порядковой нумерацией, а также область 3, соответствующая магнитному рассеиванию. Эскизу магнитопровода соответствует его эквивалентная схема замещения, элементами которой являются последовательно включенные магнитные проводимости участков магнитопровода  $Y_i$  и проводимость рассеивания  $Y_\sigma$ , включенная в схему замещения параллельно. Значения магнитных проводимостей определяются соотношением

$$Y_i = \mu_i \frac{S_i}{l_i}, \quad (15)$$

где величины  $\mu_i, S_i, l_i$  – соответственно магнитная проницаемость, площадь сечения и длина магнитной силовой линии  $i$ -го участка. Для участка рассеивания магнитная проницаемость равна  $\mu_0$ .

Контур циркуляции вектора  $\vec{H}$  обязан строго соответствовать замкнутой обозначенной магнитной силовой линии (контур  $L$ ) с соблюдением первого граничного условия (8).



Предельный переход, соответствующий теореме Стокса, состоит в устремлении  $dx \rightarrow 0$ , при этом соответствующая поверхность  $S$ , ограниченная контуром  $L$ , будет стягиваться не в точку, как это имело место для общего случая среды, а в бесконечно тонкую полосу. Векторная операция ротора относится в рассматриваемом нами случае к циркуляции вектора не по бесконечно малому контуру, а по бесконечно тонкому контуру. В соответствии с интегральной формой уравнения (4)

$$\sum_{i=1}^n dH_i \times l_i = j(x)l_1 dx. \quad (16)$$

Из непрерывности линий магнитной индукции и величины магнитного потока  $\Phi$  (7), (8) следует

$$H_i = \frac{\mu_1}{\mu_i} \cdot \frac{S_1}{S_i} \times H_1. \quad (17)$$

С учетом значений (15) и (17) дифференциальная форма первого уравнения Максвелла в рассматриваемом случае окончательно принимает вид:

$$\frac{dH_1}{dx} = \frac{1}{Y_1 \times \sum_{i=1}^n \frac{1}{Y_i}} \times j(x).$$

Последнее выражение верно для "полезного" потока, т.е. той части магнитного потока, который проходит собственно по магнитопроводу. Для потока рассеивания может быть получено аналогичное выражение:

$$\frac{dH_{1\sigma}}{dx} = \frac{Y_\sigma}{Y_1} \times j(x).$$

Согласно принципу суперпозиции, справедливому для схемы замещения, окончательный вид дифференциальной формы закона полного тока для участка 1 имеет вид:

$$\frac{dH_1}{dx} = \frac{Y_\vartheta}{Y_1} \times j(x), \quad (18)$$

где  $Y_\vartheta$  – эквивалентная магнитная проводимость всей магнитной цепи, показанная на схеме замещения рис.1, и равная

$$Y_\vartheta = \left( \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{Y_i}} + Y_\sigma \right). \quad (19)$$

Первое слагаемое в выражении (19) представляет суммарную проводимость последовательно соединенных участков магнитопровода.

Выражения (18) и (19) позволяют ввести понятие "эквивалентной среды", в которой действует вихревой ток в массивном участке 1, входящем в схему замещения. Соотношения магнитной проницаемости этой эквивалентной среды  $\mu_\vartheta$  с реальной магнитной проницаемостью массивного участка  $\mu_1$  имеет вид:

$$\frac{\mu_\vartheta}{\mu_1} = \frac{Y_\vartheta}{Y_1}. \quad (20)$$

*Уравнение для вихревого тока в массивном участке.* Дифференциальная форма закона полного тока (18) позволяет записать уравнение в частных производных как для распределенной плотности вихревого тока по сечению участка 1 в виде  $j(x, t)$ , так и для распределения поля в виде векторов  $H(x, t), B(x, t)$ .

Согласно закону Ома (3) и интегральной форме закона электромагнитной индукции (5) для произвольного контура протекания вихревого тока справедливо соотношение

$$\begin{aligned} E(x) \times L_1 - E(0) \times L_1 &= -\frac{d\Phi_x}{dt}, \\ E(x) &= \rho_1 j(x). \end{aligned} \quad (21)$$

здесь  $\rho_1$  – удельное электрическое сопротивление рассматриваемого участка.

Величина магнитного потока, сцепленного с контуром вихревого тока, определяется как

$$\Phi_x = \mu_1 L_1 \int_0^x H_1(x) dx = \mu_1 L_1 \left[ x H_1(x) - \int_0^x x dH_1(x) \right]. \quad (22)$$

В последнем преобразовании применено правило интегрирования по частям. Выражение (22) позволяет выразить поток  $\Phi_x$  через распределение вектора напряженности  $H_1(x)$ . Связь вектора поля и плотности тока в виде (18) и (20) позволяет выразить поток  $\Phi_x$  через распределенную плотность вихревого тока:

$$\Phi_x = \mu_3 L_1 \left[ \int_0^x x j(x) dx - x \int_0^x j(x) dx \right]. \quad (23)$$

Преобразование выражения потока (22) с учетом соотношения (21) приводит к уравнению распределения напряженности на рассматриваемом участке:

$$\begin{aligned} -\frac{d\Phi_x}{dt} &= \rho_1 L_1 [j(x) - j(0)] = -\frac{\mu_1}{\mu_3} \rho_1 L_1 \times \frac{\partial H_1(x)}{\partial x}, \\ -\frac{\mu_1}{\mu_3} \rho_1 L_1 \times \frac{\partial H_1(x)}{\partial x} &= -\mu_1 L_1 \frac{\partial}{\partial t} \left[ x H_1(x) - \int_0^x x dH_1(x) \right]. \end{aligned}$$

Дифференцируя последнее равенство по координате  $x$  и приводя подобные, окончательно приходим к уравнению для распределения поля:

$$\frac{\partial^2 H_1(x)}{\partial x^2} = \frac{\mu_3}{\rho_1} \times \frac{\partial H_1(x, t)}{\partial t}.$$

Последнее уравнение удобно представлять в виде функции безразмерной относительной координаты  $\xi = \frac{x}{a}$ , которая изменяется в пределах  $0 \leq \xi \leq 1$ ;  $0 \leq x \leq a$ . Здесь  $a$  – ширина участка 1 по координате  $x$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_1(\xi, t)}{\partial \xi^2} &= T \times \frac{\partial H_1(\xi, t)}{\partial t} \quad \text{или} \\ \frac{\partial^2 B_1(\xi, t)}{\partial \xi^2} &= T \times \frac{\partial B_1(\xi, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь постоянная  $T$  представляет постоянную времени вихревых токов и определяется выражением:

$$T = \frac{\mu_3}{\rho_1} \times a^2. \quad (25)$$

Аналогично приведенным преобразованиям выражение для потока (23) позволяет получить уравнение распределения плотности вихревого тока по рассматриваемому участку:

$$-\frac{d\Phi_x}{dt} = \rho_1 L_1 [j(x) - j(0)] = -\mu_3 L_1 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_0^x x j(x) dx - x \int_0^x j(x) dx \right].$$

Дифференцируя это выражение дважды по координате  $x$  и приводя подобные, получим:

$$\frac{\partial^2 j(\xi, t)}{\partial \xi^2} = T \times \frac{\partial j(\xi, t)}{\partial t}. \quad (26)$$

Задание начальных и граничных условий в уравнениях (24) и (26) определяется конкретными условиями решаемых задач. Также следует отметить сравнение полученных уравнений с ранее приведенным уравнением (12), коэффициенты правых частей которых, определяющие постоянные времени вихревого тока  $T$ , отличаются в соотношении  $\mu_3 / \mu_1$ .

**Выводы.** В основе требуемой корректировки вида уравнений поля лежит допущение о сосредоточении поля в рамках ветвей схемы замещения, нарушающее непрерывность области. Широко применяемые численные методы расчета поля, основанные на разбиении области на конечные элементы, сетку, конечные разности, связывающие всю расчетную область непрерывно граничными условиями (8), (9), в такой корректировке не нуждаются.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Калиниченко Ю.С. О вихревом магнитном поле в пазу якоря машины постоянного тока / Ю.С.Калиниченко, С.П.Калиниченко // Техническая электродинамика. – 1988. – №6. – С.23-27.
2. Иоффе А.Б. Тяговые электрические машины / Иоффе А.Б. – М.-Л.: Энергия, 1965. – 232с.
3. Захарченко Д.Д. Тяговые электрические машины: учебник для вузов ж-д. трансп. / Д.Д.Захарченко, Н.А.Ротанов. – М.: Транспорт, 1991. – 343с.
4. Яковенко В.А. Влияние конструктивных особенностей крупных электродвигателей на коммутацию в нестационарных режимах / В.А.Яковенко, С.П.Калиниченко // Электромашиностроение и электрооборудование: респ. научно-техн. сборник. – К.: Техніка. – 1979. – Вып. 29. – С.82-84.
5. Скобелев В.Е. Двигатели пульсирующего тока / Скобелев В.Е. – М.-Л.: Энергия, 1968. – 231с.
6. Жиц М.З. Переходные процессы в машинах постоянного тока / Жиц М.З. – М.: Энергия, 1974. – 112с.