

## РОЗДІЛ «МАШИНОБУДУВАННЯ. МЕХАНІКА»

УДК 621.923.4

МОЛЧАНОВ В.Ф., к. т. н., доцент

Дніпродзержинський державний технічний університет

### ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ТВЕРДИХ ЧАСТОК НА ШОРСТКІСТЬ ПОВЕРХОНЬ ПРИ ШЛІФУВАННІ МЕТОДАМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ

**Вступ.** У сучасному машинобудуванні при механічній обробці деталей машин технічний прогрес передбачає вдосконалення технологій з метою підвищення якості і пониження собівартості продукції. В зв'язку з підвищеними вимогами до якості поверхневого шару деталей, які оброблюються, на фінішних операціях металообробки важливого значення набуває широке застосування мастильно-охолоджуючих рідин (МОР). На підприємствах машинобудування використовуються високопродуктивні агрегати і верстати, в яких основним технологічним елементом є мастильно-охолоджуючі рідини. Мастильно-охолоджуючі рідини одночасно та взаємопов'язано забезпечують змащувальну, адсорбційну, хімічну, охолоджуючу і миючу дії на процес механічної обробки деталей машин. Однак в процесі їх експлуатації технологічні рідини безперервно і інтенсивно забруднюються твердими частками металообробки. Потрапляючи в зону обробки, тверді частки разом з мастильно-охолоджуючою рідиною приймають участь в процесі різання і таким чином впливають на процес формування мікропрофілю обробленої поверхні.

Дослідження механізму утворення шорсткості поверхонь при фінішній обробці шліфуванням розглянуто в багатьох наукових працях, присвячених проблемі підвищення якості поверхонь деталей машин [1-4]. У більшості з цих досліджень розглядається вплив технологічних факторів на середнє значення шорсткості поверхні. В той же час при експлуатації мастильно-охолоджуючих рідин на операціях шліфування в рідині поступово накопичуються тверді частки, які суттєво впливають на формування нерівностей профілю поверхні. Однак механізм утворення мікропрофілю поверхні з урахуванням впливу твердих часток, що містяться в МОР, досліджено недостатньо. Відомо, що металеві частки шламу, які потрапили разом з рідиною в зону контакту абразивних зерен шліфувального круга з поверхнею деталі, деформуються самі і певним чином впливають на деформацію матеріалу оброблюваної поверхні. Абразивні частки шламу практично не деформуються, а, вступаючи в силовий контакт при шліфуванні, ніби «подовжують» абразивні зерна на поверхні круга і приймають участь в одиничних актах різання, проникають в оброблювану поверхню, залишаючи сліди дії на поверхневому шарі деталі, які призводять до зростання шорсткості.

**Постановка задачі.** Для виведення теоретичних положень механізму дії твердих часток на поверхневий шар необхідно знати зміни параметрів шорсткості, отримані при обробці поверхонь шліфуванням з очищеною МОР і з МОР, забрудненою твердими частками. Фактично крива мікропрофілю поверхні характеризує розподіл ординат мікронерівностей по висоті. Зміни параметрів шорсткості, що враховують дію твердих часток на мікронерівності поверхневого шару, визначимо з наступних міркувань.

Мікронерівності поверхні є сукупністю мікроподряпин абразивних зерен шліфувального круга, що залишилися в поперечному перетині деталі після його виходу із зони контакту. Якщо на відстані  $\lambda$  від базової лінії провести еквідистанту (рис.1), то кожне абразивне зерно на поверхні шліфувального круга, залишаючи свій слід в поперечному перетині деталі в межах базової довжини  $l_{\sigma}$  на рівні цієї еквідистанти, може за-

їмати з рівною імовірністю і незалежно від інших зерен довільне положення уздовж базової лінії.

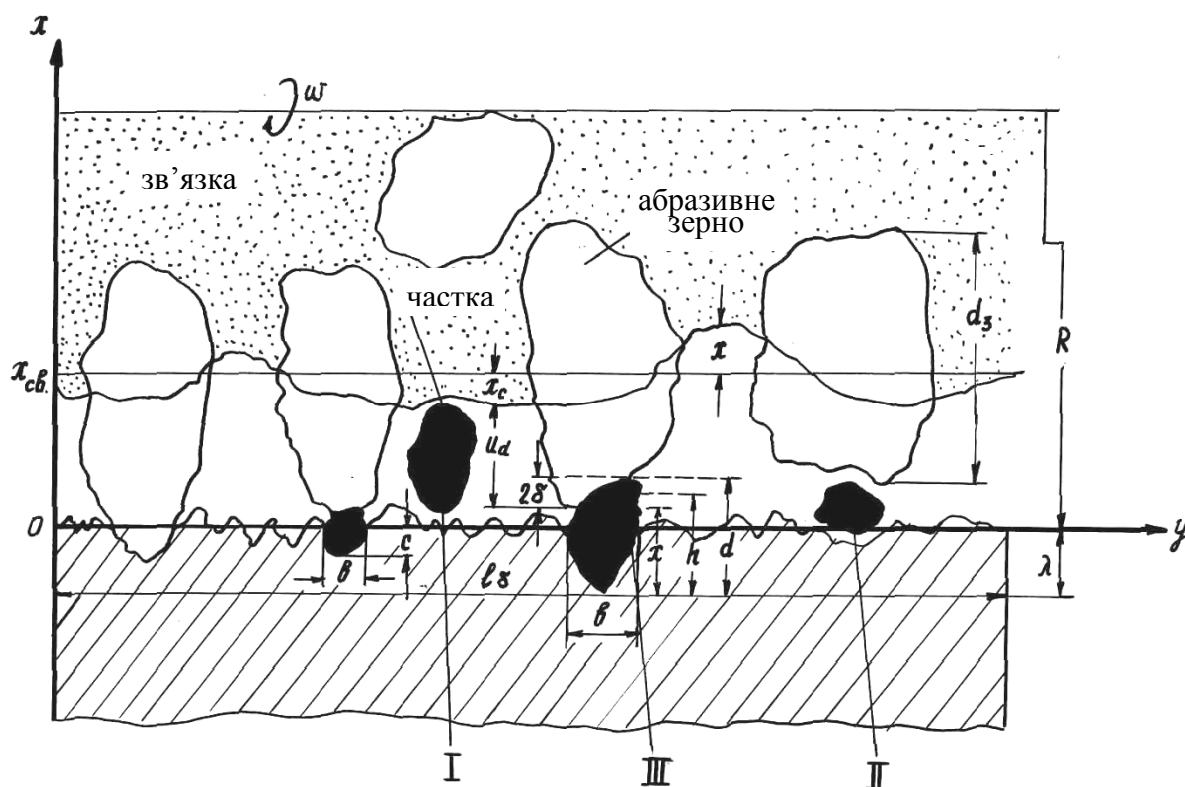


Рисунок 1 – Схема механізму дії твердих часток на поверхневий шар при шліфуванні

Тверді абразивні частки, що містяться в МОР, потрапляючи в зону обробки деталі, спричиняють додаткові подряпини на поверхні, змінюючи закон розподілу ординат мікронерівностей поверхні. Тому в даному випадку має місце суперпозиція двох законів розподілу: закону розподілу ординат мікронерівностей поверхні за відсутності твердих часток в МОР і закону розподілу додаткових подряпин, що залишаються абразивними твердими частками, що містяться в МОР. Згідно з теорією ймовірності [4] щільність розподілу  $f(x)$  суперпозиції двох розподілів визначається інтегралом

$$f(x) = \int_0^x f_1(x) f_2(x-y) dx, \quad (1)$$

де  $f_1$  і  $f_2$  – щільність розподілу кожного із складових суперпозиційної випадкової величини.

Складність задачі полягає у виборі законів і параметрів розподілу складових для отримання закону розподілу ординат мікронерівностей поверхонь шліфування. Проте розв'язання задачі істотно спрощується, якщо розглядати тільки числові характеристики результуючого розподілу. Для незалежних випадкових величин справедливі наступні рівності [5]:

$$M(x+y) = M(x) + M(y); \quad (2)$$

$$D(x+y) = D(x) + D(y), \quad (3)$$

де  $M$  – математичне очікування випадкової величини;

$D$  – дисперсія випадкової величини.

Оцінимо зміну числових характеристик мікропрофілю оброблюваної поверхні шліфуванням при дії заклинюючих абразивних часток, що містяться в МОР.

**Результати роботи.** При шліфуванні деталей з очищеною МОР формуються мікронерівності поверхневого шару зі своїми числовими характеристиками. Якщо МОР забруднена твердими частками, то при шліфуванні на поверхневому шарі з'являються додаткові подряпини від абразивних часток, що заклинили. Позначимо середнє значення ширини подряпини в даному поперечному перетині деталі на рівні  $\lambda$  через  $b_\lambda$ , а середню глибину подряпини – через  $c$ . В залежності від кількості подряпин  $z$  на відріжку базової довжини  $l_\sigma$  зміняться і характеристики шорсткості поверхні.

Середнє значення мікронерівностей профілю поверхні на рівні  $\lambda$  становить

$$M(y) = \frac{1}{l_\sigma} \int_0^{l_\sigma} |\varphi(y)| dy = \frac{1}{l_\sigma} \sum_{i=1}^z \frac{b_i \cdot c_i}{2} = z \frac{b_\lambda \cdot c}{2l_\sigma}, \quad (4)$$

де  $\varphi(y)$  – крива мікропрофілю поверхневого шару.

Дисперсія значень мікронерівностей профілю поверхні становить

$$D(y) = M(y^2) - M(y)^2. \quad (5)$$

Оскільки

$$M(y^2) = \frac{1}{l_\sigma} \int_0^{l_\sigma} |\varphi(y)|^2 dy = \frac{1}{l_\sigma} \sum_{i=1}^z \frac{b_i \cdot c_i^2}{3} = z \cdot \frac{b_\lambda \cdot c^2}{3l_\sigma},$$

то

$$D(y) = z \cdot \frac{b_\lambda \cdot c^2}{3l_\sigma} - z^2 \cdot \frac{b_\lambda^2 \cdot c^2}{4l_\sigma^2} = z \frac{b_\lambda \cdot c^2}{l_\sigma} \left( \frac{1}{3} - \frac{b_\lambda \cdot z}{4l_\sigma} \right). \quad (6)$$

Величина  $D(y)$  може бути визначена, якщо виконується нерівність

$$\frac{1}{3} - \frac{b_\lambda \cdot z}{4l_\sigma} > 0, \quad (7)$$

звідки

$$b_\lambda < \frac{4l_\sigma}{3z}. \quad (8)$$

У розглянутій нерівності  $\frac{l_\sigma}{z}$  – це середня довжина відрізка, яка припадає на одну подряпину.

Очевидно, що нерівності (7) та (8) справедливі завжди.

Для нормального розподілу використаємо формулу з теорії ймовірності [6]

$$M(|Y - M(y)|) = 0,7979 \sqrt{D(y)}, \quad (9)$$

де  $M(|Y - M(y)|)$  – середнє відхилення по модулю.

Розподіл мікронерівностей профілю поверхні може відрізнитися від нормального, і тоді

$$M(|Y - M(y)|) = K_3 \cdot \sqrt{D(y)}, \quad (10)$$

де  $K_3$  – коефіцієнт, що враховує відхилення розподілу мікронерівностей профілю поверхні від нормального.

Оскільки  $\lambda$  – відстань від базової лінії до еквідистанти вибрана довільно, то, не обмежуючи спільності отриманих результатів, можна прийняти цю відстань від базової лінії до середньої лінії профілю поверхні. Тоді середнє відхилення мікронерівностей профілю поверхні є не що інше, як середнє арифметичне відхилення ординат профілю мікронерівностей від його середньої лінії

$$R_a = K_3 \sqrt{D(y)}. \quad (11)$$

Підставляючи значення величини дисперсії  $D(y)$  у формулу (11), отримаємо

$$R_a = K_3 \sqrt{c^2 b_\lambda \frac{z}{\ell_\sigma} \left( \frac{1}{3} - \frac{b_\lambda \cdot z}{4\ell_\sigma} \right)}, \quad (12)$$

Число подряпин, що залишаються абразивними частками на шліфованій поверхні, визначаємо з рівняння (6)

$$z = \frac{\kappa_r \cdot N_o(t) \cdot P_3 \cdot l_\sigma}{B_\kappa}, \quad (13)$$

де  $N_o(t)$  – середня кількість твердих часток в одиниці об'єму МОР за час  $t$ ;

$P_3$  – вірогідність заклинювання твердих часток в зоні контакту шліфувального круга з поверхнею деталі;

$\kappa_r$  – коефіцієнт, що враховує вміст абразивних частинок;

$B_\kappa$  – ширина шліфувального круга, м.

Підставляючи значення величини  $z$  у формулу (12), отримаємо величину шорсткості, яка враховує вплив твердих часток, що містяться в МОР, на формування мікропрофілю поверхонь при шліфуванні [7]:

$$R_a = \kappa_3 \sqrt{\frac{c^2 b_\lambda \kappa_r N_o(t)}{B_\kappa} P_3 \left( \frac{1}{3} - \frac{b_\lambda \kappa_r N_o(t)}{4B_\kappa} P_3 \right)}. \quad (14)$$

**Висновки.** 1. Аналіз формули (14) показує, що при шліфуванні на параметр  $R_a$  впливають розміри частинок абразивного шламу, кількість їх в МОР, а також вірогідність заклинювання часток в зоні контакту. Причому, із збільшенням цих факторів параметр шорсткості  $R_a$  зростає.

2. Використовуючи залежність (14), можна визначити величину параметра шорсткості, яка враховує дію твердих часток, що містяться в МОР, у будь-який момент часу  $t$  обробки шліфуванням, а також визначити тривалість процесу шліфування з шорсткістю поверхні, що не перевищує гранично допустимого значення  $R_a$ .

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Худобин Л. Влияние загрязнения СОЖ отходами шлифования на пригогообразование / Леонид Худобин, Евгений Гульнов // Вестник машиностроения. – 1978. – №1. – С.67-68.

2. Степанов М. Влияние механических примесей, содержащихся в СОЖ, на структуру и микротвердость поверхностного слоя шлифованных деталей / Михаил Степанов, Наталья Шумакова // Смазочно-охлаждающие технологические средства в процессе абразивной обработки. – Ульяновск. – 1988. – С.78-84.
3. Худобин Л. Тонкая очистка технологических жидкостей при шлифовании. / Леонид Худобин, Валерий Ромашкин // Резание и инструмент. – 1984. – №31. – С.3-10.
4. Румшинский Л.З. Элементы теории вероятностей. / Румшинский Л.З. – М.: Наука, 1976. – 240с.
5. Большев Л.Н. Таблицы математической статистики / Л.Н.Большев, Н.В.Смирнов. – М.: Наука, 1983. – 416с.
6. Редько С.Г. Вероятностный подход к исследованию качества поверхности при глубинном шлифовании / С.Г.Редько, А.В.Королёв, В.Н.Аштаев // Чистовая обработка деталей машин. – Саратов. – 1980. – С.81-95.
7. Молчанов В.Ф. Вероятностный подход к образованию шероховатости поверхностей при окончательной обработки / В.Ф.Молчанов // Системные технологии. – 2001 – № 2. – С.106-110.

Надійшла до редколегії 01.02.2016.

УДК 621.914

КОРОТКОВ В.С., к.т.н., доцент

Днепродзержинский государственный технический университет

## ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМА РАСЧЕТА ТРАЕКТОРИЙ В ВИДЕ ЛОМАНЫХ С ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ЗВЕНЬЯМИ

**Введение.** В связи со спецификой ряда станков с числовым программным управлением (ЧПУ), в частности перемещение их рабочих органов по криволинейной траектории комбинациями элементарных перемещений, параллельных осям координат и кратных дискретности станка, возникает необходимость в разработке алгоритмов аппроксимаций криволинейных участков ломаными с ортогональными звеньями. Возникающие при этом погрешности, прежде всего, зависят от точности методов аппроксимации контуров такими ломаными, и от величины дискретности по заданным координатам конкретных станков, для которых рассчитывается траектория движения инструмента.

**Постановка задачи.** Таким образом, очевидна целесообразность в разработке и использовании алгоритмов аппроксимации сложных контуров деталей ломаными с ортогональными звеньями, длина которых кратна дискретности станка. Из практических соображений необходимо построить алгоритм аппроксимации с асимптотически минимальным числом звеньев при заданном поле допуска  $\varepsilon$ . При таком подходе к аппроксимации для некоторых деталей большое значение имеет первоначальная ориентация их на станке. Учитывая изложенное выше, необходимо для каждого положения детали строить аппроксимирующую ломаную с ортогональными звеньями при любом ее положении на станке, а затем необходимо подобрать такое положение, чтобы число звеньев было минимальным.

**Результаты работы.** Для практической реализации с использованием вычислительной техники намного удобнее применять алгоритм, определяющий сначала угол оптимальной ориентации детали, а затем для нее строящий ломаную с ортогональными звеньями, аппроксимирующую исходный контур.

Введем соответствующие условные обозначения и разъяснения.

Круг радиусом  $\varepsilon$  с центром в точке  $M_0$  назовем  $\varepsilon$  окружностью точки  $M_0$ , т. е. множество таких точек  $M$ , для которых  $|MM_0| \leq \varepsilon$ .

Кривую  $\Gamma$ , состоящую из точек с  $\varepsilon$ -«окрестностями», будем считать  $\varepsilon$ -коридором ( $\varepsilon$ -допуском).

Всякая ломаная с ортогональными звеньями, кратными заданной дискретности, лежащая в поле  $\varepsilon$ -допуска (рис.1), т.е. удовлетворяющая точностным требованиям, будет называться допустимым по точности вариантом ломаной.

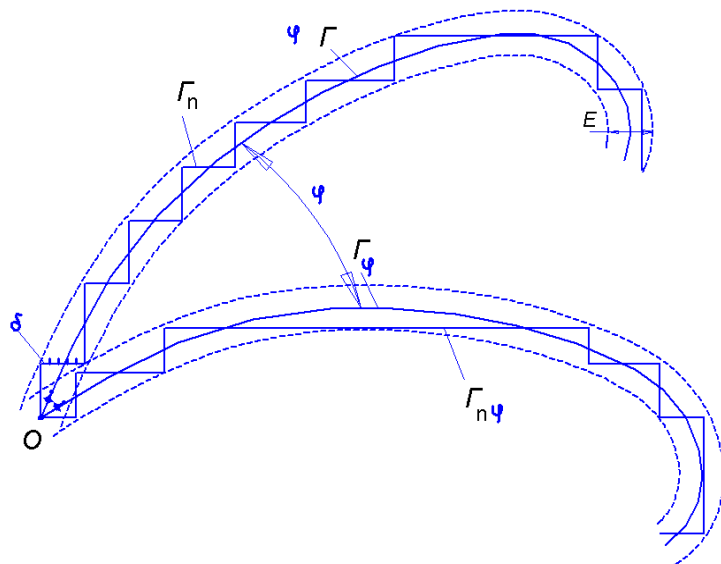


Рисунок 1 – Ориентация контура детали относительно координатных осей при аппроксимации ломаными с ортогональными звеньями

Ломаную с минимальным числом звеньев  $n$ , лежащую в поле  $\varepsilon$ -допуска, назовем  $\varepsilon$ -оптимальным расчетным вариантом, а число ее звеньев в этом случае будем обозначать  $n_* = n_*(\varepsilon, \Gamma)$ .

Последовательность допустимых по точности вариантов расчетной траектории  $\{\Gamma_{n(\varepsilon)}\}_{n=1}^{\infty}$  назовем асимптотически оптималь-

ным, если  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{n(\varepsilon)}{n_*(\varepsilon, \Gamma)} = 1$ .

При построении будем опираться на следующий результат, полученный в работе [1].

Пусть гладкая кривая

$\Gamma$  задана параметрическими уравнениями  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  ( $t \in [t_0, T]$ ).

Угол поворота  $\varphi$  контура относительно координатных осей против часовой стрелки выбран из условия

$$\min_{\varphi} \int_{t_0}^T \psi_{\varphi}(t) dt = \int \psi_{\varphi_0}(t) dt, \quad (1)$$

где

$$\psi_{\varphi}(t) = \frac{|x'_{\varphi}(t)y'_{\varphi}(t)|}{\sqrt{(x'_{\varphi}(t))^2 + (y'_{\varphi}(t))^2}} \quad (2)$$

и

$$\begin{aligned} x_{\varphi}(t) &= x(t) \cos \varphi - y(t) \sin \varphi, \\ y_{\varphi}(t) &= x(t) \sin \varphi + y(t) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть

$$B = \int_{t_0}^T \psi_{\varphi_0}(t) dt \quad (4)$$

и число изломов  $n_* = n(\Gamma, \varepsilon, \delta, \varphi_0)$ , где  $\varepsilon$  – величина допустимого отклонения, а  $\delta$  – заданная дискрета, выбранная из равенства

$$n_* = \left[ \frac{B}{2\varepsilon - \delta\sqrt{2}} \right] + 1, \quad (5)$$

где  $[\beta]$  – целая часть числа  $\beta$ .

Пусть узлы  $t_{i,n}^*$  выбраны из условий

$$t_{0,n}^* = \tau_0, \quad \int_{t_0}^{t_{i,n}^*} (\psi_{\varphi_0}(t) + 1/n_*) dt = \frac{iB}{n_*} \quad (i = \overline{1, n}), \quad (6)$$

тогда ломаная с ортогональными звеньями, проходящая через точки

$$\left( x(t_{0,n}^*), y(t_{0,n}^*), \left( x(t_{0,n}^*), \frac{y(t_{0,n}^*) + y(t_{1,n}^*)}{2} \right), \right. \\ \left. \left( x(t_{1,n}^*), \frac{y(t_{0,n}^*) + y(t_{1,n}^*)}{2} \right), \left( x(t_{1,n}^*), \frac{y(t_{1,n}^*) + y(t_{2,n}^*)}{2} \right), \dots \right) \quad (7)$$

будет асимптотически оптимальной.

Рассмотрим построение алгоритма. Пусть задан криволинейный контур точками  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , достаточно точно его характеризующими. Построим параметрический сплайн  $(S(x, t), S(y, t))$  по этим точкам и снимем с него более полный набор точек, лежащих на контуре.

По набору точек  $k_i = (\overline{0, N})$  строим дискретные аналоги всех выражений, входящих в приведенную формулировку.

Построим разности

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= x_{i+1} - x_i & (i = \overline{1, N}), \\ \Delta y_i &= y_{i+1} - y_i & (i = \overline{1, N}), \\ S_i &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} & (i = \overline{1, N}) \end{aligned} \quad (8)$$

и функцию  $\theta_N(\varphi)$ , являющуюся дискретным аналогом

$$\int_{t_0}^T \Psi_{\varphi}(t) dt : \quad (9)$$

$$\theta_N(\varphi) = \sum_{i=1}^N \frac{|2\Delta x_i \Delta y_i \cos 2\varphi + ((\Delta x_i)^2 - (\Delta y_i)^2) \sin 2\varphi|}{S_i}.$$

Найдем угол  $\varphi_0$  из условий

$$\max_{0 \leq \varphi \leq \pi/2} \theta_N(\varphi) = \theta_N(\varphi_0). \quad (10)$$

Ясно, что (10) есть дискретизация соотношения (1). Находим дискретный аналог величины  $B$ , фигурирующей в (4):

$$B_N = \theta_N(\varphi_0). \quad (11)$$

Согласно равенству (5) выбираем число  $n_*$  следующим образом:

$$n_* = \left[ \frac{B_N}{2\varepsilon - \delta\sqrt{2}} \right] + 1 \quad (12)$$

и положим  $\delta_0 = 0$ ,  $\delta_1 = S_1$ ,  $\delta_2 = S_1 + S_2 + \dots$ ,  $\delta_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n$ .

Обозначим через  $\psi(t)$  кусочно-постоянную функцию, равную

$$\psi_i = \frac{\left| 2\Delta x_i \Delta y_i \cos 2\varphi_0 + ((\Delta x_i)^2 - (\Delta y_i)^2) \cdot \sin 2\varphi \right|}{S_i} + \frac{\varepsilon}{n_*} \quad (13)$$

для  $t \in [\sigma_i, \sigma_{i+1}]$ . Понятно, что  $\int_0^t \psi_N(u) du$  есть строго возрастающая ломаная, проходящая через точки  $(\sigma_i, c_i)$  ( $i = 0, N$ ), где

$$c_0 = 0, \quad c_i = \sum_{v=1}^i \psi_v \cdot S_v, \quad (i = \overline{1, N}). \quad (14)$$

Эта функция является дискретным аналогом функции

$$\int_{t_0}^t \psi_{\varphi_0}(u) du, \quad (15)$$

фигурирующей в (6).

Отыскание точек  $t_i^*$  (решение уравнений (6)) осуществляется путем отыскания абсцисс точек пересечения прямых, параллельных оси  $\sigma$ , проходящих через точки  $(0, i \cdot c/n_*)$  с графиком ломаной (6). Затем для построения расчетной ломаной достаточно найти значения  $x$  и  $y$  в этих узлах. Каждая точка  $t_i^*$  попадает в какой-то из отрезков  $[\sigma_j, \sigma_{j+1}]$ . Тогда мы определяем приближенное значение  $x$  в точке  $t_i^*$ , применяя линейную интерполяцию:

$$x_i^* = x_j + \frac{x_{j+1} - x_j}{S_j} (t_i^* - \sigma_j), \quad (16)$$

и аналогично

$$y_i^* = y_j + \frac{y_{j+1} - y_j}{S_j} (t_i^* - \sigma_j). \quad (17)$$

Кроме того, считаем, что  $x_0^* = x_0$ ,  $y_0^* = y_0$ . Теперь, наконец, получаем асимптотически оптимальную ломаную с ортогональными звеньями, каждое из которых кратное заданной дискрете, проходящую через точки

$$(x_0^{**}, y_0^{**}), (x_0^{**}, y_{1/2}^{**}), (x_1^{**}, y_{1/2}^{**}), (x_1^{**}, y_{3/2}^{**}), (x_2^{**}, y_{3/2}^{**}), (x_2^{**}, y_{5/2}^{**}), \dots \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} x_i^{**} &= \left\langle \frac{x_i^*}{\delta} \right\rangle \delta & (i = \overline{0, N}), \\ y_{i-1/2}^{**} &= \left\langle \frac{y_i^* + y_{i-1}^*}{\delta} \right\rangle \delta & (i = \overline{1, N}), \\ y_0^{**} &= \left\langle \frac{y_0^*}{\delta} \right\rangle \delta. \end{aligned} \quad (19)$$



Здесь  $\langle \gamma \rangle$  – ближайшее к  $\gamma$  целое число.

**Выводы.** Таким образом, процедура построения асимптотически оптимального алгоритма аппроксимации криволинейных контуров ломаными с ортогональными звеньями такова.

1. По опорным точкам строим параметрический сплайн, из которого пополняем набор опорных точек  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, N$ ). Если исходная кривая задана параметрически  $(x(t), y(t))$   $t \in [t_0, T]$ , этот пункт заменяется простым подсчетом:

$$x_i = x\left(t_0 + \frac{T - t_0}{N} \cdot i\right),$$

$$y_i = y\left(t_0 + \frac{T - t_0}{N} \cdot i\right).$$

2. По формулам (8) вычисляем приращения  $x$ ,  $y$  и длины элементарных отрезков ломаной, соединяющей точки.

3. Задаем число  $m$  и вычисляем числа  $\theta_N(\varphi_i)$ , где  $\varphi_i = \frac{i\pi}{2m}$ .

4. Выбираем наименьшее из чисел  $\theta_N(\varphi_i)$  ( $i = 1, m$ ). Пусть, например, это будет  $\theta_N(\varphi_{i_0})$  и определяем угол  $\varphi_0 = i_0\pi / 2m$ .

5. Определяем число  $B_N$  по формуле (11) и оптимальное число переключений  $n_*$  по формуле (12).

6. Определяем числа  $\psi_i$  по формуле (13) и, исходя из функции  $\int_0^t \psi_N(u) du$ , выбираем асимптотически оптимальные узлы  $t_i^*$ .

7. Вычисляем координаты  $x_i^*$  и  $y_i^*$ ,  $x_i^{**}$  и  $y_{i-1/2}^{**}$  по формулам (16)-(19).

8. Строим асимптотически оптимальную ломаную с ортогональными звеньями по формуле (18).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лигун А.А. Асимптотически оптимальный алгоритм кусочно-линейной аппроксимации с ортогональными звеньями при подготовке управляющих программ / А.А.Лигун, В.С.Коротков, А.А.Шумейко. – К., 1987. – Деп в УкрНИИНТИ 21.09.87, №2620. – 27с.
2. Лигун А.А. Асимптотически оптимальный алгоритм аппроксимации криволинейных контуров ортогональными звеньями в решениях траекторных задач фрезерной обработки / А.А.Лигун, А.А.Шумейко, В.С.Коротков // Известия вузов. Машиностроение. – 1989. – №11 – С.136-140.

Поступила в редколлегию 23.02.2016.

Днепродзержинский государственный технический университет

## ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМА КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

**Введение.** Важное практическое значение имеет решение задач интерполяции гладких контуров сложной конфигурации прямыми отрезками с заданной точностью. В последующем информация в таком виде может применяться для описания контуров деталей при проектировании, решения задач по расчетам траекторий движения формообразующих инструментов при обработке на станках с числовым программным управлением (ЧПУ) и т.д. Поэтому разработка эффективных методов и алгоритмов построения интерполяционных ломаных с заданной точностью является задачей актуальной как на этапе проектирования изделий, так и при расчетах технологичных траекторий для станков с ЧПУ.

**Постановка задачи.** Для упрощения решения задач по описанию поверхностей сложной конфигурации и последующего использования геометрической информации в расчетах траекторий движения инструментов целесообразно использовать асимптотически оптимальные методы. Для эффективной реализации таких методов на компьютере необходимо разработать асимптотически оптимальные алгоритмы, которые можно использовать в средствах автоматизации на этапах проектирования и технологической подготовки металлообработки.

**Результаты работы.** Поверхности сложных гладких поверхностей деталей удобно записывать сплайнами, которые хорошо зарекомендовали себя в точном машиностроении. В последующем эта информация может быть преобразована в виде интерполяционных ломаных, удобных для реализации в системах автоматизированного проектирования и при подготовке управляющих программ.

Для построения алгоритма необходимо ввести некоторые условные обозначения и разъяснения.

В особенности  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $M_0$  будем называть круг радиусом  $\varepsilon$  с центром в точке  $M_0$ , т.е. множество точек  $M$  таких, что  $|MM_0| \leq \varepsilon$ .

Объединение  $\varepsilon$ -окрестностей всех точек некоторой кривой  $\Gamma$  будем считать полем допуска кривой или  $\varepsilon$ -коридором (рис.1).

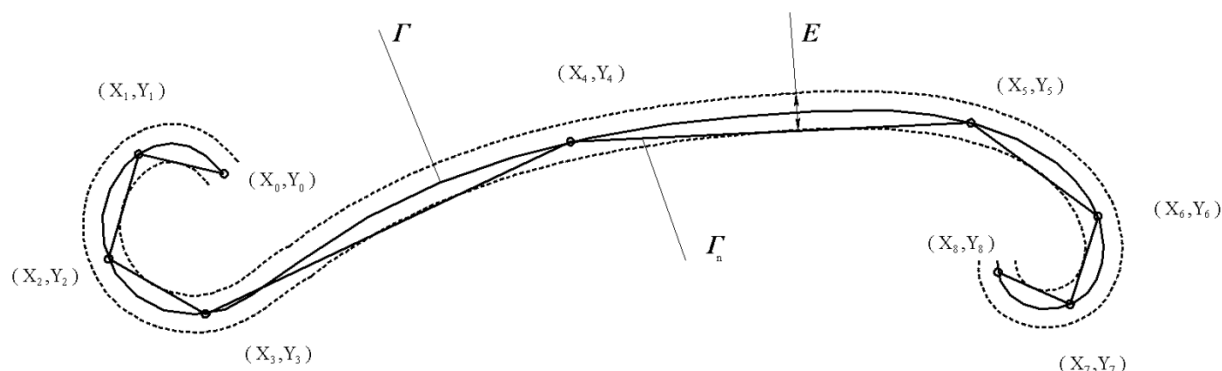


Рисунок 1 – Интерполяционная ломаная, лежащая в поле допуска кривой

Любую интерполяционную ломаную, размещенную в поле  $\varepsilon$ -допуска (размещенную в  $\varepsilon$ -коридоре), будем считать допустимой по точности описания для дальнейшего использования.

Интерполяционную ломаную с минимальным числом звеньев  $n$ , лежащую в поле допуска, назовем  $\varepsilon$  – оптимальным расчетным вариантом, а число ее звеньев в этом случае обозначим через  $n_0 = n_0(\varepsilon, \Gamma)$ .

Как отмечалось выше, под построением оптимального варианта расчетной траектории (расчетной ломаной) понимается построение траектории с минимальным числом звеньев  $n$ . Это позволит свести к минимуму время выполнения расчетов на компьютере и обойтись минимальным объемом информации.

Последовательность допустимых по точности вариантов расчетной траектории  $\{\Gamma_{n_*}\}_{n_*=1}^{\infty}$  назовем асимптотически оптимальной, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{n_0(\varepsilon, \Gamma)}{n_*(\varepsilon, \Gamma)} = 1.$$

В работе [1] доказано, что если кривая  $\Gamma$  гладкая или кусочно гладкая, а число  $n_* = n_*(\varepsilon, \Gamma)$  выбрано из условия

$$n_* = \left[ \sqrt{8\varepsilon} / \int_{t_0}^T \phi(t) dt \right] + 1, \quad (1)$$

где  $[\alpha]$  – целая часть  $\alpha$ , а

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{|x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)|}{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \quad (2)$$

и точки  $t_i^*$  выбраны из условия

$$\int_{t_0}^{t_i^*} \left( \phi(u) + \frac{1}{2} \right) du = \frac{i}{n_*} \int_{t_0}^T \left( \phi(u) + \frac{1}{n_*} \right) du, \quad (3)$$

то последовательность интерполяционных ломаных (траекторных линий), проходящих через точки  $(x(t_i^*), y(t_i^*))$ , будет асимптотически оптимальной при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Для того, чтобы алгоритм был универсальным, применим как для данных с копира, так и для параметрически заданной кривой (например, в виде сплайна), зададим описание его для контура с более чем достаточным количеством опорных точек, т.е. считаем, что заданы точки  $(x_i, y_i)$ , снятые с копира или полученные с помощью метода пополнения [2].

С учетом полученных ранее результатов приведем алгоритм построения асимптотически оптимального варианта расчетной интерполяционной ломаной (траектории).

Принцип построения алгоритма будет основан на замене всех величин, входящих в соотношение (1), (2) и (3) их дискретными аналогами.

Опишем дискретный аналог функции (2). Для этого сначала вычислим разности

$$\delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \delta y_i = y_i - y_{i-1} \quad (i = \overline{1, N}) \quad (4)$$

и длины элементарных участков

$$\bar{S}_i = \sqrt{(\delta x_i)^2 + (\delta y_i)^2} \quad (i = \overline{1, N}). \quad (5)$$

В дальнейшем нам потребуются дополнительные точки  $x_{-1}, y_{-1}, x_{N+1}, y_{N+1}$ , которые построим по интерполяционным формулам Ньютона:

$$x_{-1} = x_0 - S_1 \delta x_i + 2S_2^2 \frac{(\delta x_2 - \delta x_1)}{\overline{S_2 + S_1}}; \quad (6)$$

$$y_{-1} = y_0 - S_1 \delta y_i + 2S_1^2 \frac{(\delta y_2 - \delta y_1)}{\overline{S_2 + S_1}}. \quad (7)$$

Аналогично определяем

$$x_{N+1} = x_N + S_N \delta x_N + 2S_N^2 \frac{(\delta x_N - \delta x_{N-1})}{\overline{S_N + S_{N-1}}}; \quad (8)$$

$$y_{N+1} = y_N + S_N \delta y_N + 2S_N^2 \frac{(\delta y_N - \delta y_{N-1})}{\overline{S_N + S_{N-1}}}. \quad (9)$$

Теперь вычисляем начальные и конечные разности:

$$\delta x_0 = x_0 - x_{-1}, \quad \delta y_0 = y_0 - y_{-1}, \quad (10)$$

$$\delta x_{N+1} = x_{N+1} - x_N, \quad \delta y_{N+1} = y_{N+1} - y_N. \quad (11)$$

Далее строим дискретные аналоги производных  $x'$  и  $y'$ :

$$\Delta x_i = \delta x_i / S_i, \quad \Delta y_i = \delta y_i / S_i \quad (i = \overline{0, N+1}) \quad (12)$$

и аналоги вторых производных  $x''$  и  $y''$ :

$$\Delta^2 x_i = \frac{\Delta x_{i+1} - \Delta x_i}{S_{i+1} + S_i} + \frac{\Delta x_i - \Delta x_{i-1}}{S_i + S_{i-1}} \quad (i = \overline{1, N}), \quad (13)$$

$$\Delta^2 y_i = \frac{\Delta y_{i+1} - \Delta y_i}{S_{i+1} + S_i} + \frac{\Delta y_i - \Delta y_{i-1}}{S_i + S_{i-1}} \quad (i = \overline{1, N}). \quad (14)$$

И, наконец, строим значения в узлах дискретного аналога функции (2)

$$\phi_i = \sqrt{\frac{|\Delta^2 x_i \Delta y_i - \Delta^2 y_i \Delta x_i|}{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}}. \quad (15)$$

Дискретным аналогом функции  $\phi(t)$  будет кусочно-постоянная функция  $\phi_N(t)$  (рис.2), равная  $\phi_i$  для  $t \in [\sigma_{i-1}, \sigma_i]$ , где  $\sigma_0 = 0$ ,  $\sigma_i = \sum_{j=1}^i S_j$  ( $i = \overline{1, N}$ ).

Аналогом  $\int_{t_0}^T \phi(t) dt$ , фигурирующем в (1), будет величина

$$A = \int_0^{\sigma_N} \phi_N(t) dt = \sum_{i=1}^N \phi_i S_i. \quad (16)$$

Теперь согласно равенству (1) находим число звеньев асимптотически оптимальной расчетной траектории по формуле

$$n_i^* = \left[ \frac{A}{\sqrt{8\varepsilon}} \right] + 1. \quad (17)$$

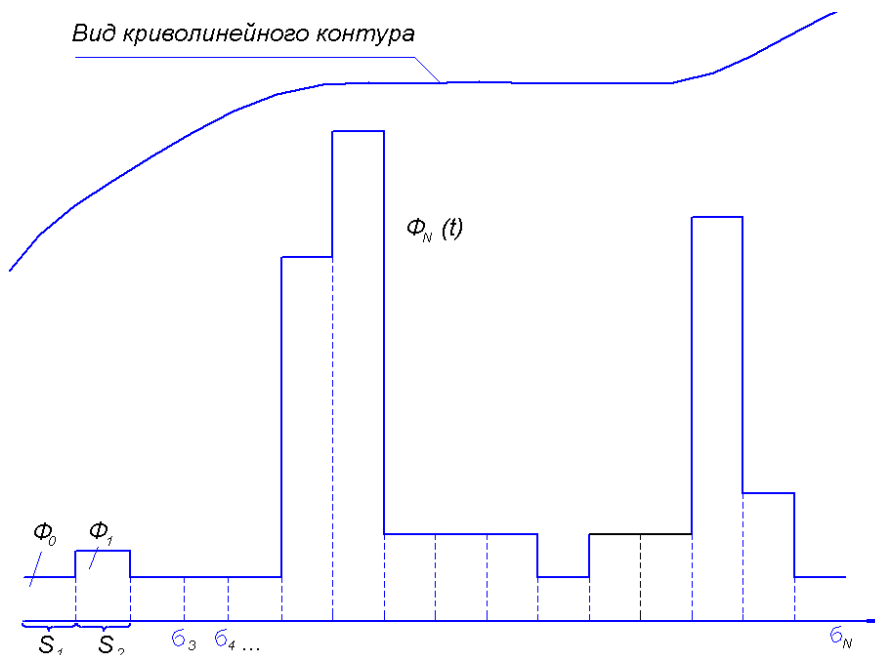


Рисунок 2 – Функция плотности распределения асимптотически оптимальных узлов

Ясно, что значения в узлах  $\sigma_i$  дискретного аналога  $\int_{t_0}^t \phi_N(u) du$  будут вычисляться по формуле

$$A_i = \int_0^{\sigma_i} \phi_N(t) dt = \sum_{v=0}^i \phi_v S_v. \quad (18)$$

Таким образом

$$\int_0^t \phi_N(u) du \quad (19)$$

есть ломаная, проходящая через точки  $(0,0), (\sigma_1, A_1), (\sigma_2, A_2), \dots, (\sigma_{N-1}, A_{N-1}), (\sigma_N, A)$ .

Теперь решение уравнений (3), отыскание точек  $t_i^*$  эквивалентно следующему: отрезок  $[0, A]$  разбиваем на  $n_*$  равных частей и искомые асимптотически оптимальные узлы  $t_i^* (i = \overline{1, N})$  есть абсциссы точек пересечения параллельных оси  $\sigma$  прямых, проходящих через точки  $(0, iA/n_*)$  с графиком построенной ломаной (19). Затем для построения расчетной ломаной достаточно найти значения  $x$  и  $y$  в этих узлах.

Полагаем:  $x_0^* = x_0, y_0^* = y_0, x_{n_*}^* = x_N, y_{n_*}^* = y_N$ .

Каждая точка  $t_i^* (i = \overline{1, n_* + 1})$  попадает в какой-то из отрезков  $[\sigma_j, \sigma_{j+1}]$ .

Тогда мы считаем

$$x_i^* = x_j + \frac{x_{j+1} - x_j}{S_j} (t_i^* - \sigma_j), \quad (20)$$

т.е. определяем приближенное значение  $x$  в точке  $t_i^*$ , применяя линейную интерполяцию.

Аналогично находим  $y_i^*$ :

$$y_i^* = y_j + \frac{y_{j+1} - y_j}{S_j} (t_i^* - \sigma_j). \quad (21)$$

**Выводы.** Таким образом, процедура построения асимптотически оптимального расчетного варианта ломаной (траектории) такова.

1. По опорным точкам строим параметрический сплайн, из которого пополняем набор опорных точек  $(x_i, y_i)$  ( $i = \overline{1, N}$ ), если он не задан ранее. В случае, если кривая задана параметрически  $(x(t), y(t))$   $t \in [t_0, T]$ , этот пункт заменяется простым подсчетом:

$$x_i = x(t_0 + \frac{T - t_0}{N} \cdot i),$$

$$y_i = y(t_0 + \frac{T - t_0}{N} \cdot i).$$

2. По формулам (4)-(14) строим дискретные аналоги первых и вторых производных функций  $x(t)$  и  $y(t)$ .

3. По формуле (15) строим дискретный аналог функции  $\phi(t)$  (меры густоты узлов). Фактически в [1] доказано, что сгущать узлы ломаной необходимо пропорционально величине функции  $\phi(t)$ .

4. По формулам (16), (17) считаем число звеньев асимптотически оптимальной ломаной.

5. По формуле (18) определяем асимптотически оптимальные узлы  $t_i^*$ , по формулам (20), (21) – соответствующие им точки  $x_i^*$  и  $y_i^*$  (при этом считаем, что  $x_0^* = x_0$ ,  $y_0^* = y_0$ ,  $x_{n_*} = x_N$ ,  $y_{n_*} = y_N$ ).

6. Ломаная, проходящая через точки  $x_i^*$  и  $y_i^*$  ( $i = \overline{0, n_*}$ ), есть искомый вариант траектории.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лигун А.А. Асимптотически оптимальный алгоритм кусочно-линейной интерполяции в решениях траекторных задач фрезерной обработки / А.А.Лигун, В.С.Коротков, А.А.Шумейко // Известия вузов. Машиностроение. – 1989. – №7. – С.147-151.
2. Коротков В.С. Описание сложных контуров деталей на этапе подготовки управляющих программ / В.С.Коротков // Зб. наукових праць ДДТУ (технічні науки). – Дніпродзержинськ: ДДТУ. – 2009. – Вип. №3 (13). – С.26-29.

Поступила в редколлегию 23.02.2016.