

РОЗДІЛ «АВТОМАТИКА. ЕЛЕКТРОМЕХАНІКА»

УДК 62-83

ВОЛЯНСКИЙ Р.С., к.т.н., доцент
САДОВОЙ А.В., д.т.н., профессор

Днепродзержинский государственный технический университет

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ НЕЛИНЕЙНОЙ АКТИВАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Введение. В настоящее время в теории оптимального управления хорошо разработаны методы, позволяющие определять управляющие воздействия в классе аддитивных форм

$$x = \sum_{i=0}^n V_{in} \eta_i, \quad (1)$$

принадлежащих закрытому множеству

$$|U| \leq 1. \quad (2)$$

Выбор активационной функции, формирующей множество (2), определяет тип регулятора и позволяет синтезировать ограниченные непрерывные

$$U = -\text{sat}[g \cdot x] \quad (3)$$

и разрывные

$$U = -\text{sign}[x] \quad (4)$$

управления.

Выбор в качестве весовых коэффициентов V_{in} формы (1) коэффициентов функции Ляпунова гарантирует устойчивость замкнутой системы, которая в некоторых случаях является гранично-апериодической [1]. Однако управлениям (3) и (4) свойствен ряд недостатков, основными из которых являются сравнительно медленное изменение сигнала управления в линейной системе, не позволяющее в полной мере форсировать переходные процессы, и возникновение колебаний управляющего воздействия прямоугольной формы и максимальной амплитуды, являющихся причиной преждевременного износа оборудования.

Поэтому возникает проблема поиска оптимального управления, свободного от указанных недостатков. Если взять за основу для такого управления аддитивную форму (1), то проблема синтеза искомого управляющего воздействия может быть сведена к определению только его активационной функции.

Как показали выполненные на математических моделях предварительные исследования [2], улучшить динамику системы управления можно, если в качестве активационной функции принять определенную на множестве (2) нелинейность типа «квадратный корень от модуля сигнала»

$$\text{sqrt}(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \text{sign}(x), & \text{при } |x| \leq 1; \\ \text{sign}(x), & \text{при } |x| > 1. \end{cases} \quad (5)$$

Постановка задачи. Несмотря на то, что в общем виде алгоритм оптимальных управлений (3) и (4) включает в себя вычисление значения аддитивной формы (1) и использование соответствующей активационной функции, свойства, характеристики и методы исследования синтезированных систем управления будут различны. Поэтому целью данной статьи является определение класса функций, к которым принадлежит нелинейность (5).

Результаты работы. Отличительной особенностью релейных систем управления от линейных является разрыв и недифференцируемость их активационной функции в начале координат фазового пространства возмущенного движения. Указанная особенность не позволяет использовать для систем управления динамическими объектами методы анализа и синтеза, базирующиеся на постулате непрерывности регулируемой переменной и ее производных.

Покажем, что последнее утверждение относится и к системам с нелинейной активационной функцией (5). Для этого исследуем эту функцию и ее производные на разрывность.

В соответствии с определением непрерывности функции $f(x)$ в окрестностях особой точки x_0 [3] функция будет непрерывна, если будет справедливо неравенство для сколь угодно малых h и ε

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (6)$$

Для исследуемой функции особыми точками являются точки $x_{01,02} = \pm 1$, соответствующие переходу с иррациональной функции на знаковую и точка $x_{03} = 0$, которая определяет переход из 1 квадранта координатной плоскости в 3 (рис. 1).

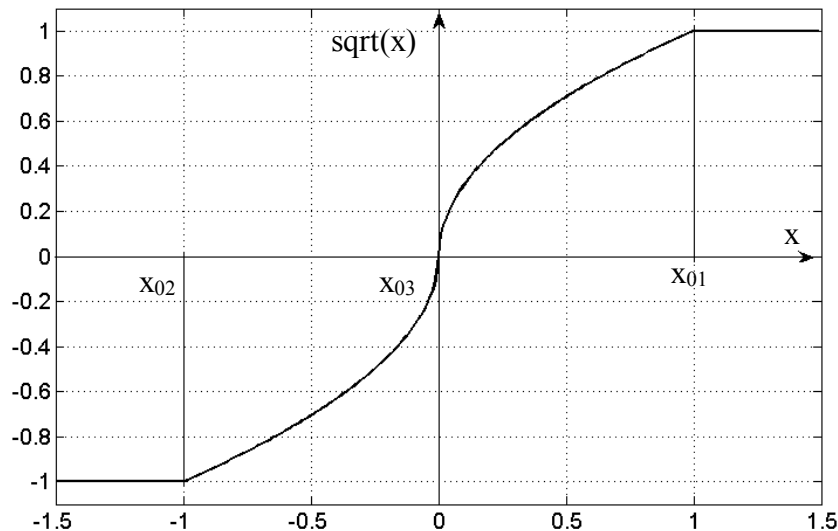


Рисунок 1 – Особые точки активационной функции (5)

Очевидно, что значение функций

$$f_1(x) = \sqrt{|x|} \text{sign}(x) \quad (7)$$

и

$$f_2(x) = \text{sign}(x) \quad (8)$$

в точках $x_{01} = 1$, $x'_{01} = 1 + h$ и $x_{02} = -1$, $x'_{02} = -1 - h$ равны единице. Поэтому неравенство (6) можно записать следующим образом

$$\varepsilon > 0. \quad (9)$$

Неравенство (9) выполняется для любых сколь угодно малых ε и подтверждает непрерывность функции (5) в окрестностях точек $x_{01,02} = \pm 1$.

Перейдем к рассмотрению непрерывности в окрестностях начала координат $x_{03} = 0$. В этом случае при определении непрерывности возникает неопределенность, вызванная тем, что функция $\text{sign}(x)$ при $x_{03} = 0$ может принимать любые значения из интервала $[-1, 1]$.

Разрешим эту неопределенность рассмотрением пределов справа

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{|x|} \text{sign}(x); \\ L'_1 &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+, \\ h \rightarrow 0}} \sqrt{|x+h|} \text{sign}(x+h) \end{aligned} \quad (10)$$

и слева

$$\begin{aligned} L_2 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{|x|} \text{sign}(x); \\ L'_2 &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0^-, \\ h \rightarrow 0}} \sqrt{|x-h|} \text{sign}(x-h). \end{aligned} \quad (11)$$

Независимо от способов стремления к нулю для пределов (10) и (11) справедливо равенство

$$L_1 = L'_1 = L_2 = L'_2 = 0. \quad (12)$$

Следовательно, попарная подстановка пределов (10) и (11) в неравенство (6) однозначно позволяет перейти к неравенству (9) и сделать вывод о непрерывности функции (5) во всей области (2), а значит и снижению возможности возникновения в замкнутой системе управления с нелинейностью (5) автоколебаний большой амплитуды.

Увеличение коэффициента усиления g оптимального регулятора трансформирует управление (3) в управление (4) с последующим возникновением скользящего режима. Подобная трансформация сопровождается ростом производной управляющего воздействия и в предельном случае становится справедливым выражение

$$\lim_{\substack{dt \rightarrow 0 \\ g \rightarrow \infty}} \frac{d}{dt} U = \infty. \quad (13)$$

Таким образом, можно сделать вывод, что в замкнутых системах с ограниченным по модулю управлением одним из индикаторов возможности возникновения скользящего режима является большой темп нарастания управляющего воздействия.

Перейдем теперь к рассмотрению дифференцируемости функции (5).

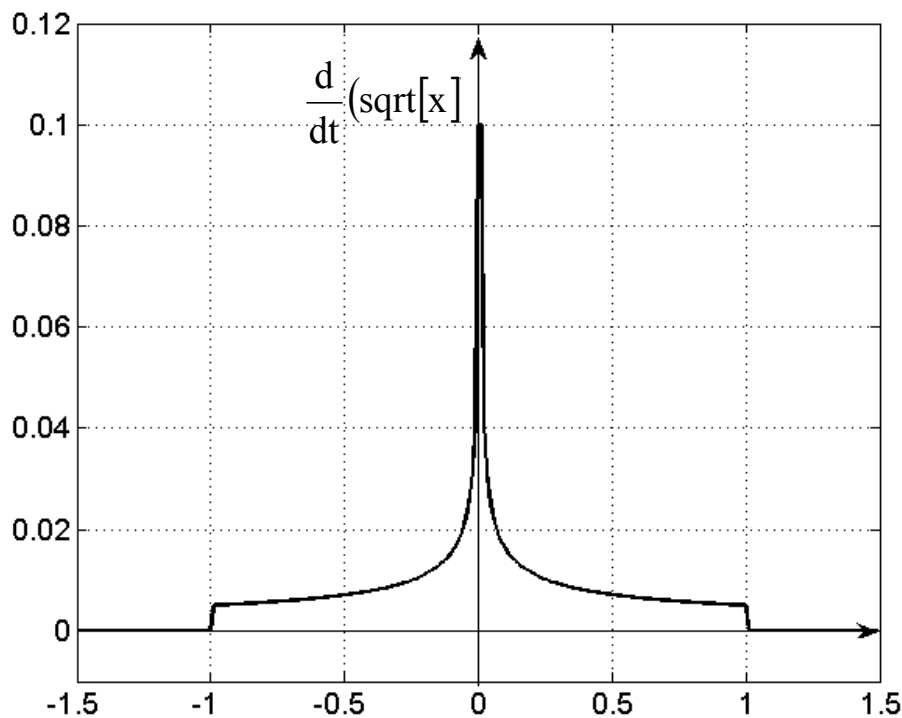
Ввиду того, что функция $\text{sign}(x)$ неопределенна в начале координат и ее абсолютное значение не превышает 1, представим нелинейность (5) следующим образом:

$$\text{sqrt}(x) = \begin{cases} -1, & \text{при } x < -1; \\ \sqrt{-x}, & \text{при } -1 \leq x < 0; \\ \sqrt{x}, & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ 1, & \text{при } x > 1. \end{cases} \quad (14)$$

Дифференцирование получившейся нелинейности (14) на каждом из участков позволяет получить следующее выражение:

$$\frac{d}{dt}(\text{sqrt}[x]) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < -1; \\ \frac{0,5}{\sqrt{-x}}, & \text{при } -1 \leq x < 0; \\ \frac{0,5}{\sqrt{x}}, & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ 0, & \text{при } x > 1. \end{cases} \quad (15)$$

Анализ производной (15) показывает, что при $|x| > 1$ управляющее воздействие не изменяется и система управления с нелинейностью (5) работает как разомкнутая с максимальным управляющим воздействием. По мере уменьшения значения аддитивной формы (1), вызванной замыканием системы и переходом в один из интервалов $[-1,0)$ или $(0,1]$ производная (15) увеличивается (рис.2).



Рисунок

су-2 –

Кусочно-непрерывная производная нелинейности (5)

В точке x_{03} эта производная достигает бесконечно большого значения, т.е. оказывается справедливым выражение

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{d}{dt}(\text{sqrt}[x]) = \infty, \quad (16)$$

т.е. система с нелинейностью (5) становится эквивалентной релейной системе управления, регулятор которой формирует управляющее воздействие амплитудой

$$U_{\max} = \lim_{|x| \rightarrow 0} \sqrt{|x|}. \quad (17)$$

Из выражения (17) следует, что для максимального значения U_{\max} в окрестностях начала координат справедливо неравенство

$$U_{\max} \ll 1. \quad (18)$$

Неравенство (18) при переходе от активационной функции (5) к функции вида

$$\text{krt}(x) = \begin{cases} \sqrt[k]{|x|} \text{sign}(x), \text{ при } |x| \leq 1; \\ \text{sign}(x), \text{ при } |x| > 1 \end{cases} \quad (19)$$

при достаточно малых значениях k , а следовательно сильном увеличении значения функции $f(x) = \sqrt[k]{|x|}$ может превратиться в неравенство

$$U_{\max} < 1. \quad (20)$$

В предельном случае при $k=0$ происходит переход от функции (19) к функции $f(x) = \text{sign}(x)$. Амплитуда управляющего воздействия U_{\max} в этом случае равна единице.

Выводы. Приведенные математические выкладки показывают, что управление с активационной функцией (5)

$$U = -\text{sqrt}(x) \quad (21)$$

занимает промежуточное место между линейным (3) и разрывным (4) управлениями.

При переходе к активационной функции (19) управление (21) преобразуется к виду

$$U = -\text{krt}(x), \quad k \in [0,1]. \quad (22)$$

Для случая $k=0$ из управления (22) может быть получено разрывное управление (4), а при $k=1$ алгоритм нелинейного управления (22) трансформируется в алгоритм линейного управления (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Садовой А.В. Системы оптимального управления прецизионными электроприводами / Садовой А.В., Сухинин Б.В., Сохина Ю.В. – К.: ИСИМО, 1996. – 298 с.
2. Энергетические характеристики систем управления с нелинейной активационной функцией / Волянский Р.С., Садовой А.В., Сохина Ю.В., Тищенко Н.Т. // Електроінформ: тематичний випуск «Проблеми автоматизованого електроприводу. Теорія і практика». – Львів: «Екоінформ». – 2009. – С.341-342.
3. Гурса Э. Курс математического анализа / Э.Гурса. – Т. 1: Производные и дифференциалы. Определенные интегралы. – М.: Государственное технико-теоретическое издательство, 1933. – 368 с.

УДК 62-533.6

С'ЯНОВ О.М., д.т.н., професор
КУЛИК М. В., аспірант
МАНУКЯН О.С., аспірант

Дніпродзержинський державний технічний університет

СИСТЕМА УПРАВЛІННЯ ПЕРЕТВОРЮВАЧЕМ ЕНЕРГІЇ З ВИКОРИСТАННЯМ МОДУЛЯ РКІ

Вступ. На сьогоднішній день у розвитку сучасної електротехніки використання мікроконтролерів (МК) є невід'ємною частиною. Майже все електроустаткування проектується саме на базі спеціалізованих або універсальних МК. В сучасних системах управління (СУ), зокрема перетворювачем енергії (ПЕ,) використовуються МК, які запрограмовані на виконання конкретних завдань з фіксованими функціями. Стабільність роботи систем на базі таких МК досить висока, проте їх неможливо вдосконалювати і

адаптувати на нові задачі тому, що відсутня можливість оновлення програмного забезпечення (ПО). В результаті проведеного аналізу серед наявних МК самим оптимальним є ATmega16. Крім того, що цей МК багаторазового програмування, він містить в собі 8 аналогових ліній даних і порт для підключення зовнішнього кварцового резонатора, який забезпечує потрібне тактування таймера, що обслуговує підключені пристрої. Для візуального контролю використано рідкокристалічний індикатор (РКІ) фірми WINSTAR WH2004A. Алфавітно-цифрові РКІ-модулі представляють собою недороге і зручне рішення, яке забезпечує зображення великого об'єму інформації при низькому енергоспоживанні, а РКІ з втіленим підсвіченням задньої панелі можна використовувати в умовах зі зниженою або нульовою освітленістю.

Постановка задачі. Схематична розробка системи управління ПЕ з візуальним контролем на РКІ та реалізація відповідного програмного забезпечення.

Результати роботи. Для створення СУ з РКІ використано МК ATmega16, який має наступні технічні характеристики: об'єм оперативної пам'яті – 1КБ; об'єм постійної пам'яті – 16КБ; частота кварцового резонатора – 16,9344 МГц, що складає 16 млн. операцій на секунду. Це більш ніж достатньо для реалізації на ньому системи управління перетворювачем енергії.

Рідкокристалічний індикатор фірми WINSTAR WH2004A має вбудований мікроконтролер KS 0066, структурну схему якого зображено на рис.1.

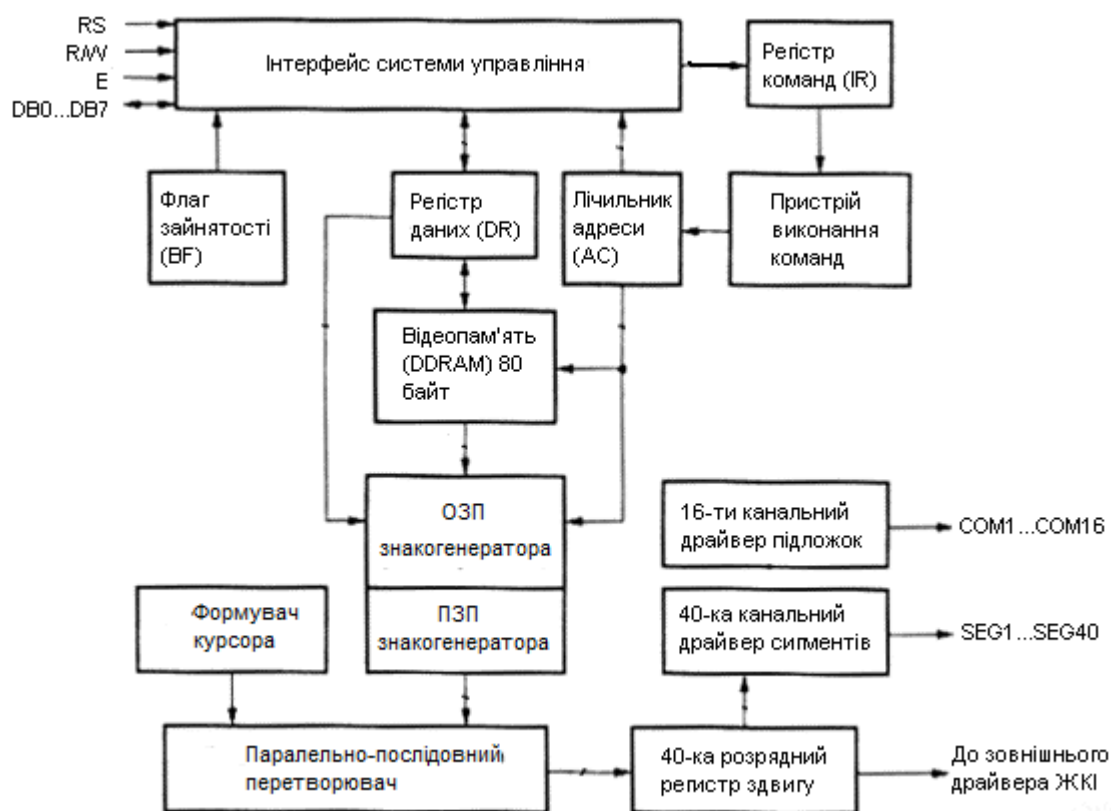


Рисунок 1 – Структурна схема вбудованого в РКІ контролера KS 0066

Управління контролером здійснюється за допомогою інтерфейса управляючої системи. Основними об'єктами взаємодії є регістри DR та IR.

Для з'єднання РКІ з системою управління використовується паралельна синхронна шина, яка налічує в собі 8 або 4 (вибирається програмою) ліній даних DB0...DB7, лінію вибору операції R/W, лінію вибору регістра RS і лінію стробування E. Крім ліній

управляючої шини тут присутні ще лінії живлення В - GND і V_{CC}, та лінія для подачі напруги живлення драйвера РКІ - V₀.

Обслуговування сервісних пристроїв і функцій з фіксованим періодом повтору передбачене використанням 8-ми розрядного таймера/лічильника, який знаходиться в корпусі МК.

В результаті аналізу різних схем створена принципова схема мікропроцесорної частини системи управління (рис.2), яка включає в себе МК АТmega16, РКІ WH2004А, цифрову шину даних (j3) та інтерфейс програмування (j1).

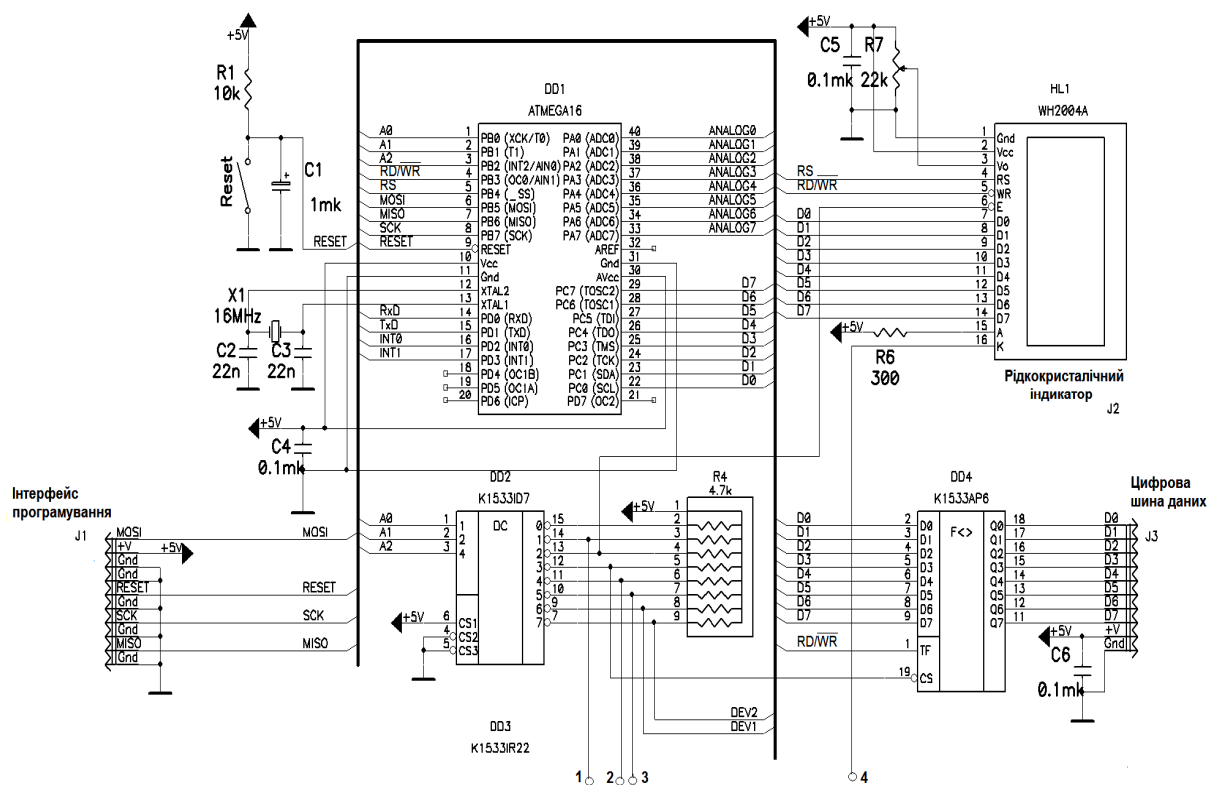


Рисунок 2 – Мікропроцесорний модуль СУ з РКІ

В поєднанні з клавіатурою і відповідними драйверами, які зображені на рис.3, отримуємо повну систему управління перетворювачем енергії з можливістю візуального контролю за допомогою рідкокристалічного індикатора.

Обслуговування сервісних пристроїв і функцій з фіксованим періодом повторення можливо при використанні 8-ми розрядного таймера/лічильника, який знаходиться в корпусі МК. Даний лічильник реалізовано апаратно в корпусі МК, тому програмна реалізація опиту лічильника не потрібна, що в значній мірі збільшує швидкодію і вибір режиму опиту зовнішніх пристроїв, а також зменшує кількість корпусів мікросхем в системі управління.

Період виклику переривання лічильника наступає в момент його переповнення і визначається за формулою:

$$T_{\text{timer0_ovf}} = \frac{CK * TCNTx}{F_{CPU}}, \quad (1)$$

$$F_{\text{timer0_ovf}} = \frac{F_{CPU}}{CK * TCNTx}. \quad (2)$$

де F_{CPU} – тактова частота контролера;
 СК – коефіцієнт ділення схеми лічильника;
 TCNTx – вміст регістра лічильника або його розрядність.

Для кварцового резонатора з частотою 16,9344МГц тактова частота МК буде:

$$T_{timer0_ovf} = \frac{256 * 66}{16896000} = 1\text{кГц.}$$

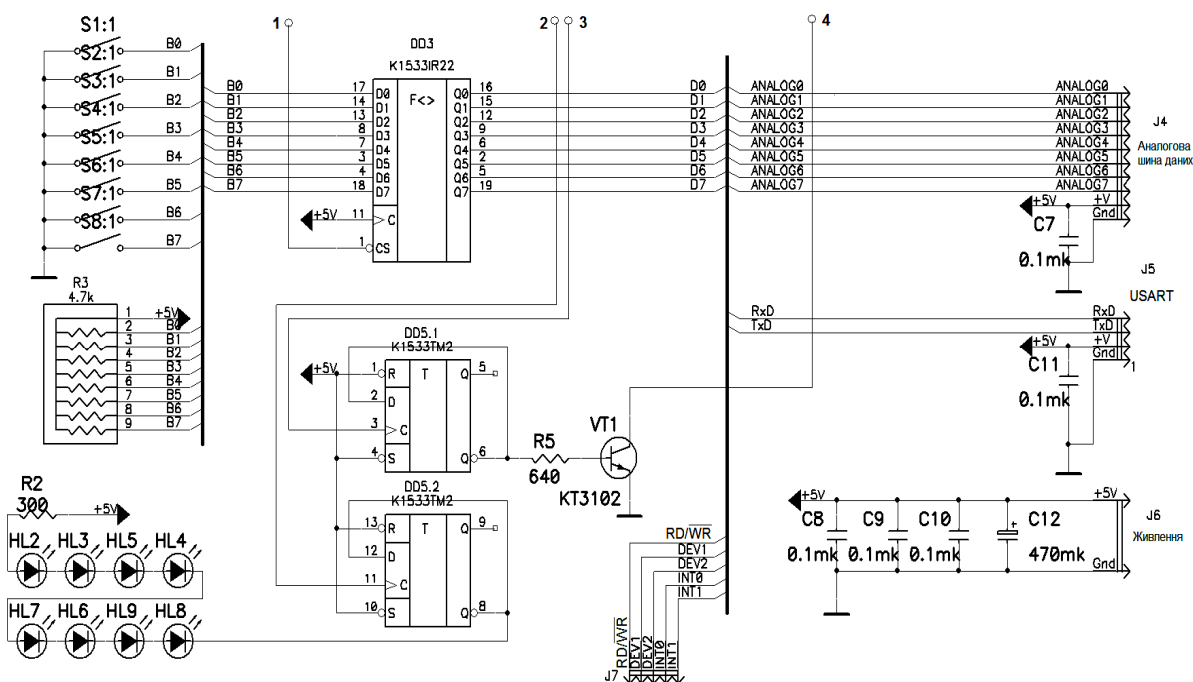


Рисунок 3 – Принципова схема підключення клавіатури та відповідного драйвера до МК та ПКІ

Основні команди програми, яка написана на асемблері для роботи МК ATmega16, представлені нижче у вигляді табл.1.

Таблиця 1

Дія	Код команди	Короткий опис
1	2	3
Команди управління пристроєм ззовні (безумовні)	0h04,0h00,crc 0h04,0h01,crc 0h07,0h0A,crc 0h07,0h0B,crc	Управління пристроєм PWM OFF Управління пристроєм PWM ON Управління пристроєм Angle++ Управління пристроєм Angle--
Команди управління пристроєм ззовні, на які потрібна відповідь	0h14,0h01,crc 0h14,0h02,crc 0h14,0h0A,crc 0h14,0hFF,crc	Запит на читання чи ввімкнено пристрій, DEVICE DETECT Запит на читання статусу пристрою (ON/OFF) Запит читання Angle Запит на читання всього масиву змінних/даних

Продовження таблиці 1

1	2	3
Зовнішні команди відповіді при запитках ззовні	0h01,0h01,DATA,crc 0h01,0h02,DATA,crc 0h01,0h0A,DATA,crc 0h01,0h14,DATA,crc	Читання значень чи ввімкнено пристрій, DEVICE DETECT Читання значення статусу пристрою (ON/OFF) Читання значення Angle Читання всього масиву змінних/даних
Команди надіслані пристрою назовні при зміні параметрів	+0h00,0h01,crc +0h00,0h0A,crc +0h00,0h0B,crc +0h00,0h0C,crc +0h00,0h0D,crc	Код стану пристрою, DEVICE DETECT Стан пристрою PWM OFF Стан пристрою PWM ON Стан пристрою Angle++ Стан пристрою Angle--

Висновки.

1. Розроблена система контролю та керування перетворювачем напруги або інших пристроїв з використанням РКІ дає змогу зручно встановлювати бажані режими роботи кінцевого пристрою і корегувати його роботу в будь-який момент часу.

2. В ході експериментальних досліджень встановлено, що розроблена СУ на базі МК ATmega16 та РКІ фірми WINSTAR WH2004A здатна стабільно працювати та виконувати поставлені задачі, а відповідне програмне забезпечення можна завжди оновлювати через вбудований інтерфейс програмування, тим самим адаптуючи пристрій до поставлених вимог.

ЛІТЕРАТУРА

1. Сайт огляду цифрових індикуючих рідко-кристалічних дисплеїв <http://www.electronics.ru/>.
2. Y.Y.Tzou, H.J.Hsu, "FPGA Detalization of space-vector PWM control IC for three-phase PWM inverters", IEEE Transactions on Power Electronics, Vol 12, No 6, pp 953-963, 1997.
3. Теория и проектирование цифровых систем управления / [под редакцией д-ра техн. наук, профессора П. И. Попова]. – М.: Машиностроение, 1986. – 448 с.

УДК 62-52

САДОВОЙ О.В, д.т.н., професор
ШЕРЕМЕТ О.І.*, к.т.н., доцент

Дніпродзержинський державний технічний університет
*Донбаська державна машинобудівна академія

АНАЛІТИЧНИЙ СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРІВ ЗА КВАНТОВАНОЮ ФОРМОЮ БАЖАНОЇ ПЕРЕХІДНОЇ ФУНКЦІЇ

Вступ. Перехідні функції, які спостерігаються на виході систем автоматичного керування при зміні входньої дії або зовнішнього збурення, повинні відповідати деяким технічним вимогам, що представляються у вигляді показників якості. Ці показники визначаються формою перехідної функції. У більшості методів синтезу регулятори підбираються таким чином, щоб забезпечити потрібний рівень двох-трьох показників якості [1, 2]. Вся перехідна функція при цьому не охоплюється.

Постановка задачі. Виконуючи зворотні динамічні перетворення, можна одержати передатну функцію регулятора за бажаною перехідною функцією [3], проте, якщо система є нелінійною, або перехідна функція не має виразу у елементарних функціях, безпосереднє зворотнє математичне перетворення унеможлиблюється. В цьому разі можна виконати квантування, тобто розділення бажаної перехідної функції на сукупність функцій Хевісайда [4], що мають постійно зростаючий часовий зсув.

Результати роботи. Розглянемо вихідну координату системи автоматичного керування у вигляді дискретного значення, що існує деякий час T_0 .

Квантована перехідна функція може бути представлена у вигляді ступінчастої функції, яка є сумою функцій Хевісайда, що затримуються відносно нуля на цілу кількість періодів T_0 .

$$\begin{aligned}
 y^*(t) &= h_1(\sigma(t-T_0) - \sigma(t-2T_0)) + h_2(\sigma(t-2T_0) - \sigma(t-3T_0)) + \dots \\
 &\dots + h_{n-1}(\sigma(t-(n-1)T_0) - \sigma(t-nT_0)) + h_n\sigma(t-nT_0) = \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} h_i(\sigma(t-iT_0) - \sigma(t-(i+1)T_0)) + h_n\sigma(t-nT_0).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Зворотнє перетворення Лапласа від виразу (1) матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
 Y^*(p) &= L^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} h_i(\sigma(t-iT_0) - \sigma(t-(i+1)T_0)) + h_n\sigma(t-nT_0) \right\} = \\
 &= \frac{1}{p} \left(\sum_{i=1}^{n-1} h_i(e^{-iT_0p} - e^{-(i+1)T_0p}) + h_n e^{-nT_0p} \right).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Якщо розглядати регулятор, що будується за формулою

$$W_p(p,t) = \frac{L\{y^*(t)\}}{W_{нч}(p) \cdot U(p)}, \tag{3}$$

то при одиничній ступінчастій дії, що має зображення $U(p) = \frac{1}{p}$, передатна функція регулятора перетвориться до вигляду

$$W_p(p) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} h_i(e^{-iT_0p} - e^{-(i+1)T_0p}) + h_n e^{-nT_0p}}{W_{нч}(p)}, \tag{4}$$

причому в даному разі вона явно не залежатиме від часу.

Експоненціальні функції з формули (4) можуть бути представлені у вигляді розкладення у ряд Маклорена [4]

$$\left. \begin{aligned}
 e^{-iT_0p} &= \frac{1}{1 + iT_0p + \frac{i^2 T_0^2 p^2}{2!} + \frac{i^3 T_0^3 p^3}{3!} + \dots + \frac{i^k T_0^k p^k}{k!} + \dots}, \\
 e^{-(i+1)T_0p} &= \frac{1}{1 + (i+1)T_0p + \frac{(i+1)^2 T_0^2 p^2}{2!} + \frac{(i+1)^3 T_0^3 p^3}{3!} + \dots + \frac{(i+1)^k T_0^k p^k}{k!} + \dots}, \\
 e^{-nT_0p} &= \frac{1}{1 + nT_0p + \frac{n^2 T_0^2 p^2}{2!} + \frac{n^3 T_0^3 p^3}{3!} + \dots + \frac{n^k T_0^k p^k}{k!} + \dots}
 \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

де k – ціле число, що відображає порядок складової ряду Маклорена.

Період квантування T_0 є малою величиною, тому для спрощення розрахунків за формулами (5), можна відкинути складові, до яких входить T_0 у другій та вищих степенях, тобто вважати, що $e^{-iT_0p} = \frac{1}{1+iT_0p}$, $e^{-(i+1)T_0p} = \frac{1}{1+(i+1)T_0p}$, $e^{-nT_0p} = \frac{1}{1+nT_0p}$. З

урахуванням цих виразів, формула (4) матиме наступний вигляд:

$$\begin{aligned} W_p(p) &= \frac{1}{W_{нч}(p)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} h_i \left(\frac{1}{1+iT_0p} - \frac{1}{1+(i+1)T_0p} \right) + h_n \frac{1}{1+nT_0p} \right) = \\ &= \frac{1}{W_{нч}(p)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} h_i \left(\frac{1+(i+1)T_0p - 1 - iT_0p}{(1+iT_0p)(1+(i+1)T_0p)} \right) + h_n \frac{1}{1+nT_0p} \right) = \\ &= \frac{1}{W_{нч}(p)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} h_i \left(\frac{T_0p}{(1+iT_0p)(1+(i+1)T_0p)} \right) + h_n \frac{1}{1+nT_0p} \right) = \\ &= \frac{T_0p}{W_{нч}(p)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} h_i \left(\frac{1}{(1+iT_0p)(1+(i+1)T_0p)} \right) + h_n \frac{1}{(1+nT_0p)T_0p} \right). \end{aligned} \tag{6}$$

При синтезі регулятора за формулою (6) рівні h_i та h_n визначаються бажаною перехідною функцією, а $W_{нч}(p)$ – незмінюваною частиною системи. Параметр T_0 , який обирається довільно, впливає на положення полюсів регулятора на комплексній площині. Експериментально визначимо критерії вибору T_0 .

Наприклад, система з $W_{нч}(p) = \frac{1}{0,1p+1}$ при подачі на вхід одиничного ступінчастого сигналу матиме перехідну функцію, що аналітично може бути описана рівнянням $h(t) = 1 - e^{-10t}$. Така перехідна функція матиме тривалість 0,3 с (при 5% точності керування). Припустимо, що необхідно одержати перехідну функцію з меншою тривалістю. Задамо три довільні рівні $h_1 = 0$; $h_2 = 0,8h_{уст}$; $h_3 = h_{уст}$, де $h_{уст}$ – усталене значення, якого досягає вихідна координата після закінчення перехідного процесу. Фіксацію рівнів виконаємо з періодом $T_0 = 0,01$ с (рис.1).

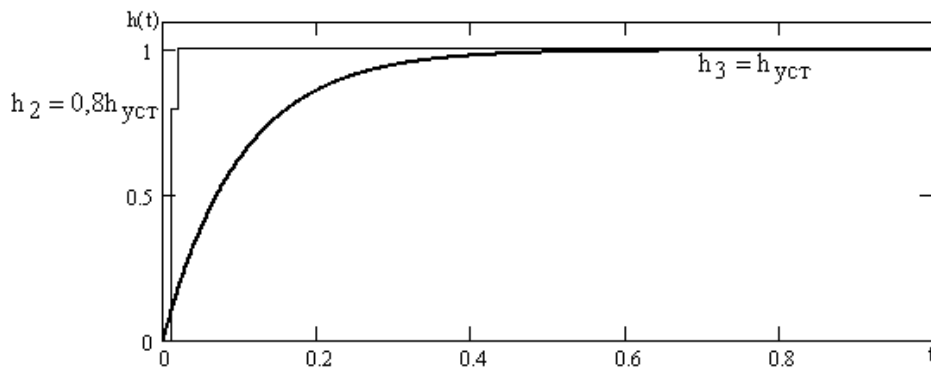


Рисунок 1 – Квантована перехідна функція

Застосуємо формулу (4) для синтезу регулятора, що забезпечуватиме таке керування.

$$\begin{aligned}
 W_p(p) &= \frac{T_0 p}{W_{нч}(p)} \left(\frac{0,8}{(1+2T_0 p)(1+3T_0 p)} + \frac{1}{(1+3T_0 p)T_0 p} \right) = \\
 &= T_0 p (0,1p+1) \left(\frac{0,8}{(1+2T_0 p)(1+3T_0 p)} + \frac{1}{(1+3T_0 p)T_0 p} \right) = \\
 &= \frac{0,8T_0 p(0,1p+1)}{(1+2T_0 p)(1+3T_0 p)} + \frac{(0,1p+1)}{(1+3T_0 p)}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Розкладемо експоненціальні функції з виразу (5) у ряд Маклорена.

$$\left. \begin{aligned}
 e^{-2T_0 p} &= \frac{1}{1+2T_0 p + \frac{4T_0^2 p^2}{2!} + \frac{8T_0^3 p^3}{3!} + \dots + \frac{(2T_0 p)^k}{k!}} \\
 e^{-3T_0 p} &= \frac{1}{1+3T_0 p + \frac{9T_0^2 p^2}{2!} + \frac{27T_0^3 p^3}{3!} + \dots + \frac{(3T_0 p)^k}{k!}}
 \end{aligned} \right\}. \tag{8}$$

Значення T_0 є досить малим, тому для спрощення розрахунків можна відкинути складові, до яких входить T_0 у другій та вищих степенях: $e^{-2T_0 p} = \frac{1}{1+2T_0 p}$;

$e^{-3T_0 p} = \frac{1}{1+3T_0 p}$. Тоді передатна функція регулятора прийме вигляд

$$W_p(p) = (0,1p+1) \left(\frac{0,8}{1+2T_0 p} + \frac{0,2}{1+3T_0 p} \right). \tag{9}$$

Реалізуємо регулятор за формулою (6) у програмному середовищі MATLAB Simulink, додавши блоки h2 та h3 для формування бажаної ступінчастої перехідної функції (рис.2).

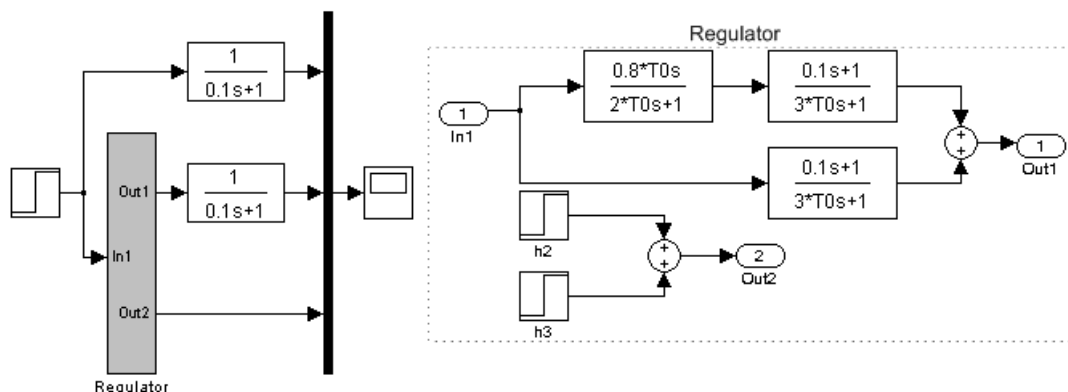


Рисунок 2 – Структурна схема системи з регулятором та без нього, зібрана в програмному середовищі MATLAB Simulink

Результати моделювання наведені на рис.3 у вигляді перехідних функцій при реакції на одиничну ступінчасту дію.

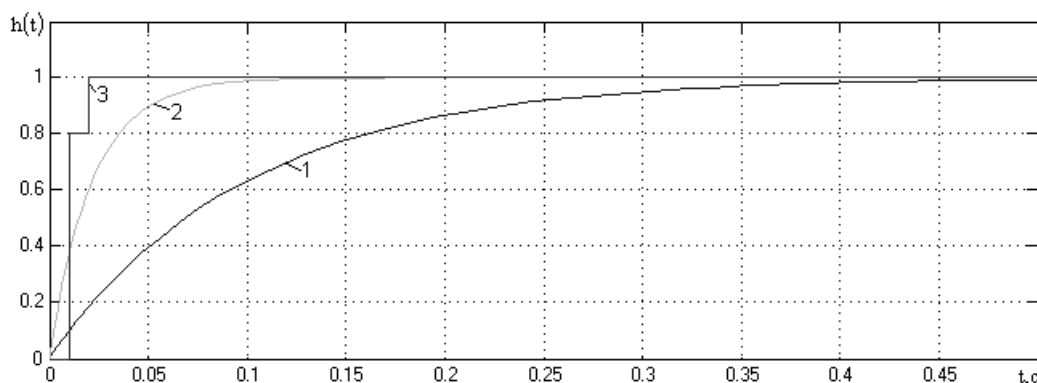


Рисунок 3 – Перехідні функції в системі без регулятора (1), з регулятором (2) та бажана перехідна функція (3), одержані в програмному середовищі MATLAB Simulink

З рис.3 видно, що бажана перехідна функція 3 не співпадає з перехідною функцією 2. Це є природним для аналогової системи. Похибку можна оцінити за інтегральною квадратичною оцінкою (10)

$$I^2(T_0) = \int_0^{t_n} (h_3(t) - h_2(t))^2 dt, \quad (10)$$

де $h_3(t)$ – аналітичний вираз заданої ідеальної перехідної функції (ілюструється кривою 3 на рис. 3), $h_2(t)$ – аналітичний вираз перехідної функції, одержаної на моделі після застосування регулятора (ілюструється кривою 2 на рис. 3), t_n – тривалість перехідних функцій (час, після досягнення якого криві 2 та 3 мало відрізняються одна від одної – під час моделювання в програмному середовищі MATLAB Simulink це може бути час моделювання).

Застосовуючи задані вище параметри системи для періоду повторення рівнів $T_0 = 0,01$ с, одержимо значення $I^2(T_0) = 3,232 \cdot 10^{-3}$. Результати розрахунків $I^2(T_0)$ за моделлю для інших значень T_0 наведені в табл.1.

На рис.4 наведено залежність $I^2(T_0)$, побудовану за даними табл.1. Ця залежність є лінійною, тобто інтегральна квадратична оцінка є прямо пропорційною T_0 і для того, щоб зменшити динамічну похибку системи, потрібно обирати якомога менше значення T_0 . Емпірична формула, що пов'язує $I^2(T_0)$ та T_0 для розглянутої аперіодичної ланки матиме наступний вигляд:

$$I^2(T_0) = kT_0. \quad (11)$$

Таблиця 1 – Значення квадратичної оцінки при різних T_0

T_0, c	0,1	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02
$I^2(T_0)$	0,0323	0,0291	0,0259	0,0226	0,0194	0,0162	0,0129	0,0096	0,0064
T_0, c	0,01	0,009	0,008	0,007	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002
$I^2(T_0)$	0,0032	0,0029	0,0025	0,0022	0,0019	0,0016	0,0013	0,0009	0,0006

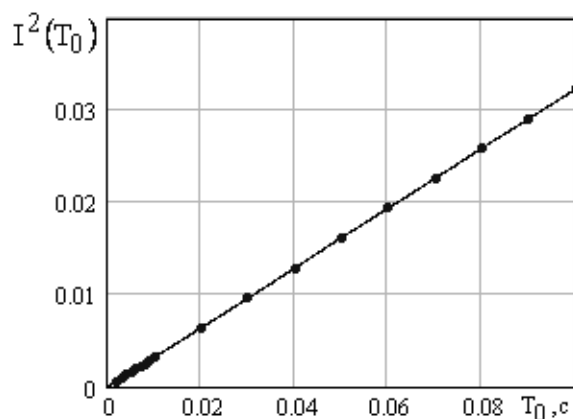


Рисунок 4 – Залежність інтегральної квадратичної оцінки від періоду фіксації рівнів

Вочевидь коефіцієнт інтегральної квадратичної оцінки $k = 0,32$ залежить від параметрів незмінюваної частини та форми ідеальної перехідної функції. Для його зменшення потрібно детальніше задавати бажану перехідну функцію, збільшуючи кількість квантів, що його описують. Для ілюстрації цього твердження збільшимо кількість квантів на інтервалі від нуля до $0,03$ с у п'ять разів, тобто будемо вважати, що $T_0 = 0,002$ с, та зада-

мо на цьому інтервалі 16 рівнів (змінюються за законом, близьким до експоненціального): $h_1 = 0$; $h_2 = 0,33h_{уст}$;

$h_3 = 0,551h_{уст}$; $h_4 = 0,699h_{уст}$; $h_5 = 0,798h_{уст}$; $h_6 = 0,865h_{уст}$; $h_7 = 0,909h_{уст}$;
 $h_8 = 0,939h_{уст}$; $h_9 = 0,959h_{уст}$; $h_{10} = 0,973h_{уст}$; $h_{11} = 0,982h_{уст}$; $h_{12} = 0,988h_{уст}$;
 $h_{13} = 0,992h_{уст}$; $h_{14} = 0,994h_{уст}$; $h_{15} = 0,997h_{уст}$; $h_{16} = h_{уст}$ (рис.5).

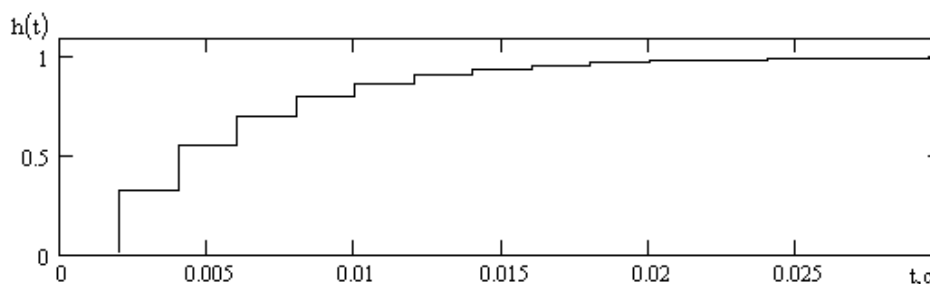


Рисунок 5 – Квантована перехідна функція зі збільшеною кількістю рівнів

Використовуючи формулу (6), одержимо передатну функцію для потрібного регулятора

$$W_p(p) = \sum_{i=1}^{15} h_i \left(\frac{(0,1p+1)T_0p}{(1+iT_0p)(1+(i+1)T_0p)} \right) + h_{16} \frac{(0,1p+1)}{(1+nT_0p)}. \quad (12)$$

Реалізуємо регулятор за формулою (12) у програмному середовищі MATLAB Simulink по аналогії зі схемою, показаною на рис. 2. Результати моделювання наведені на рис. 6 у вигляді перехідних функцій при реакції на одиничну ступінчасту дію.

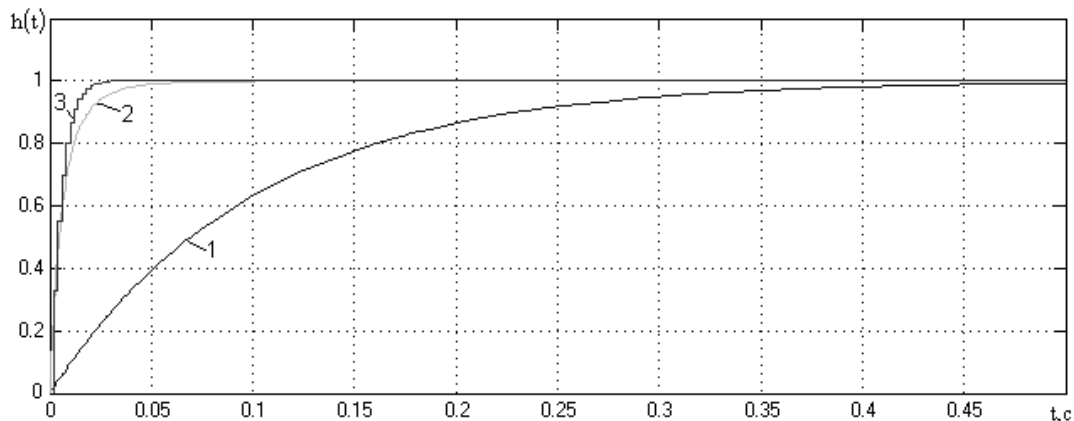


Рисунок 6 – Перехідні функції в системі без регулятора (1), з регулятором (2), ідеальна перехідна функція (3), одержані в програмному середовищі MATLAB Simulink

За формулою (10) інтегральна квадратична похибка складає $I^2(T_0) = 2,048 \cdot 10^{-4}$, що у відповідності до формули (11) становитиме значення $k = 0,102$. Отже, збільшення кількості квантів на тому ж самому відрізку часу у 5 разів призводить до зменшення коефіцієнта інтегральної квадратичної похибки у 3,14 рази, що підвищує точність наближення перехідної функції для системи з регулятором (12) до ідеальної перехідної функції.

Висновки:

- представлення бажаної перехідної функції у вигляді елементарних квантів, що являють собою зсунуті за часом функції Хевісайда, дає можливість знайти передатну функцію відповідного регулятора навіть при значній складності процесу або нелінійності незмінюваної частини;

- зменшення часу квантування T_0 призводить до зниження похибки, що оцінюється за інтегральною квадратичною оцінкою $I^2(T_0)$;

- інтегральна квадратична оцінка лінійно залежить від T_0 з коефіцієнтом пропорційності k , який можна зменшити деталізуючи представлення бажаної перехідної функції, тобто розбиваючи його на більшу кількість квантів з більшою кількістю рівнів h_i на тому ж часовому проміжку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бесекерский В.А. Теория систем автоматического управления / В.А.Бесекерский, Е.П.Попов. – 4-е изд., перераб. и доп. – СПб: Профессия, 2003. – 752 с.
2. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства / Кузовков Н.Т. – М.: Машиностроение, 1976. – 184с.
3. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики в теории автоматического управления. Цикл лекций: учеб. пособие для вузов / Крутько П.Д. – М.: Машиностроение, 2004 – 576 с.
4. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И.Н.Бронштейн, К.А.Семендяев. – М.: Наука, 1998. – 608 с.