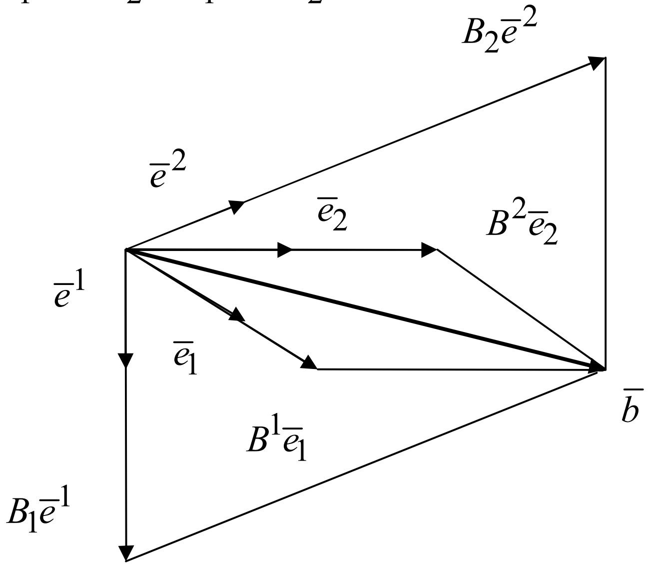
Нікулін О.В.

Наконечна Т.В.

ОСНОВИ ВЕКТОРНОГО ТА ТЕНЗОРНОГО ЧИСЛЕННЯ: ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ТЕСТИ

$$\overline{b} = B^1\overline{e}_1 + B^2\overline{e}_2 = B_1\overline{e}^1 + B_2\overline{e}^2$$



Дніпропетровськ
Видавець Біла К.О.
2011

УДК 517.7
ББК 22.1
Н 65
Рекомендовано до друку рішенням засідання вченої ради обласного комунального вищого навчального закладу «Інститут підприємництва «Стратегія» протокол № 1 від 26.01. 2011р.

Рецензенти: д. т. н., проф. Огурцов А. П. (Дніпродзержинський державний технічний університет)

к. т. н., доц. Нехаєв Н. Є. (ООО НПО «Днепрофмаш»)

Нікулін О. В.

Основи векторного та тензорного числення: теоретичні відомості та тести / Нікулін О. В., Наконечна Т.В. Дніпропетровськ: Біла К. О., 2011р., стор. 72, рис. 17

ISBN 977-966-

Посібник написано відповідно до навчальної програми з основ векторного та тензорного аналізу для вищих навчальних закладів освіти III-IV рівнів акредитації.

В посібнику викладені основні теоретичні факти і формули векторного та тензорного числення. Наводяться варіанти тестових завдань, які можуть бути використані для організації контролю за результатами навчально-пізнавальної діяльності студентів при вивченні курсу основ векторного та тензорного аналізу, а також задачі для індивідуального розв'язування.

ISBN 977-966-

Зміст

Передмова

Використання векторного та тензорного числення для опису фізичних явищ зумовлено як зручністю і наочністю математичних формул, так і природою та властивостями фізичних систем й елементів, з яких вони складаються.

При написанні посібника автори виходили з того, що він повинен включати матеріали та теоретичні відомості, які необхідні при вивченні фізики суцільних середовищ. З цієї причини розглянуті прямокутні, косокутні та криволінійні системи координат, контраваріантні та коваріантні компоненти, коваріантне диференціювання. Вважаємо, що студентам відоме поняття евклідового простору з розділів лінійна алгебра та аналітична геометрія курсу вищої математики. Об'єктами вивчення в посібнику є величини різноманітної природи: вектори, тензори тощо. Розглядаючи окіл того чи іншого порядку точки геометричного образу і трохи змінюючи ідеї «Ерлангенської програми» Ф. Клейна, можна перейти до використання теорії інваріантів фундаментальної групи перетворень [1]. Згідно з цією «Програмою» має смисл та значення лише той аналітичний вираз, який зберігається при допустимих перетвореннях групи. Розрахунки, як правило, виконуються на множині дійсних чисел.

Оскільки більшість збірників задач з векторного та тензорного числення видана ще в минулому сторіччі та практично недоступна студентам, в посібнику наведені типові задачі. В випадках, де автори вважали за доцільне, розглянути методи розв'язку цих задач, в тому числі за допомогою математичної системи MathCAD.

Вважаємо своїм приємним обов'язком виразити щиру вдячність рецензентам за цінні поради по рукопису посібника з метою поліпшення його якості.

§1. Застосування тензорів у фізиці

Математичний опис процесів та явищ ґрунтується на використанні поняття величини. Відомо, що за своєю математичною природою величини бувають трьох типів: скаляри, вектори, тензори. Такий підхід до застосування величин при моделюванні дозволяє сформулювати фізичні закони в інваріантному виді. Інваріантність розуміється в такий спосіб — якщо в просторі змінити систему координат (для фізики це пов'язане з можливістю зміни системи відліку), то це приводить до відповідних змін в описі процесів й явищ, але форма запису не повинна змінюватися. Тому представляється доцільним використати скалярні, векторні й тензорні величини, які при таких перетвореннях не змінюють запису законів. Наприклад, відстань між точками M_1 і M_2 — інваріант при переході від системи Oxy до системи $O^1x^1y^1$ (рис.1).

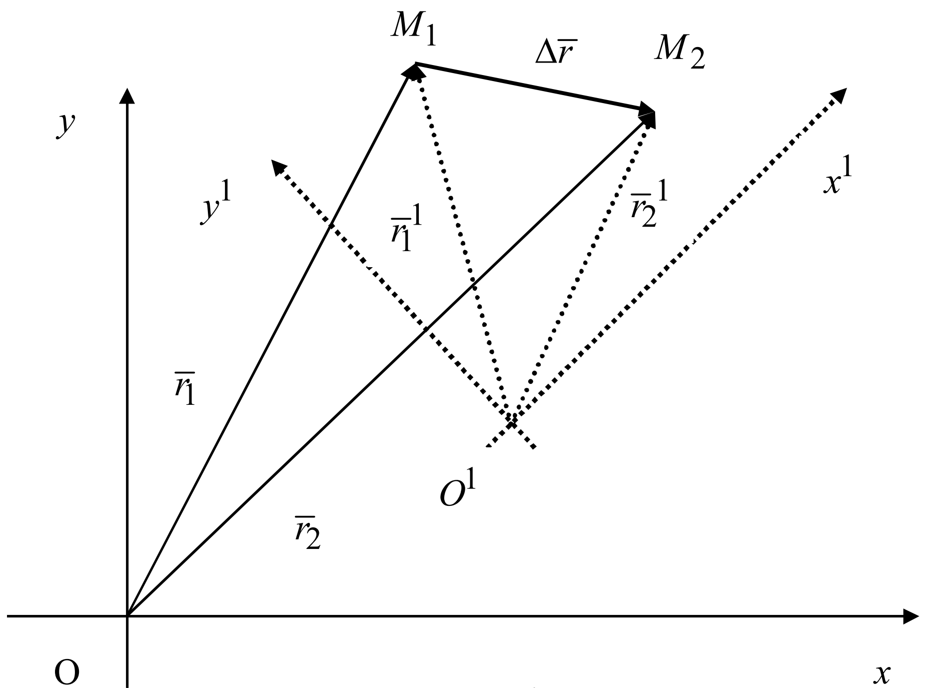


Рис. 1

Нехай в системі $Oxy : M_1(x_1, y_1); M_2(x_2, y_2)$, $O^1x^1y^1 : M_1(x_1^1, y_1^1); M_2(x_2^1, y_2^1)$. Величина $\Delta S = d(M_1, M_2)$ не змінюється тому, що $\Delta S = \sqrt{\Delta\overline{r}^{\,2}}$, де $\Delta\overline{r} = \overline{r}_2 - \overline{r}_1 = = \overline{r}_2^{\,1} - \overline{r}_1^{\,1}$. Скаляри (густина, температура, маса тощо) характеризуються одним числом (функцією), що не змінюється при перетворенні координат. Вектори — спрямовані відрізки, характеризуються величинами і напрямами у просторі та не залежать від вибору системи координат. Тензори є величинами більш складної природи. Наприклад, тензор другого рангу можна визначити в тривимірному просторі трійкою векторів або таблицею дев'яти компонентів.

Використання векторного та тензорного аналізу для моделювання фізичних явищ зумовлене не лише наочністю і зручністю математичних формул. Застосування тензорів в фізиці обумовлено властивостями та структурою фізичного світу, яки відображаються у математичних моделях.

§ 2. Взаємні базиси векторів. Контраваріантні і коваріантні компоненти

Розглянемо тривимірний векторний простір R^3. Будь-яка трійка некомпланарних векторів із загальним початком утворюють базис: $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$, який будемо називати *основним*. Будь який вектор $\overline{b} \in R^3$ можна розкласти по цьому базису (рис. 2), тобто

$$\overline{b} = B^1\overline{e}_1 + B^2\overline{e}_2 + B^3\overline{e}_3. \qquad (2.1)$$

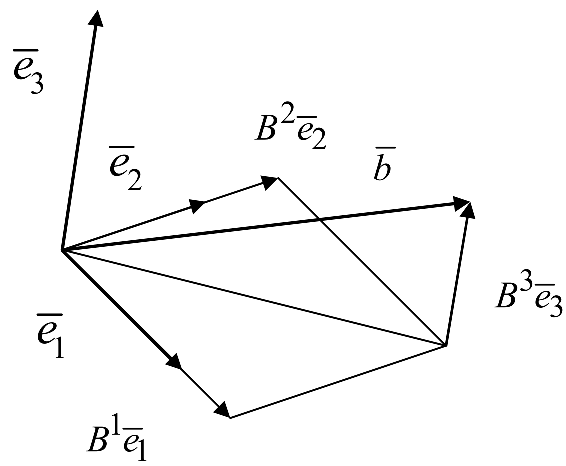


Рис. 2

Коефіцієнти розкладу (2.1) B^1, B^2, B^3 по основному базису називаються ***контраваріантними*** компонентами вектора $\overline{b}$ (індекси зверху). Для того, щоб визначити контраваріантні компоненти аналітично необхідно ввести взаємний базис. Базиси $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ й $\overline{e}^1, \overline{e}^2, \overline{e}^3$ — називаються *взаємними*, якщо виконуються наступні співвідношення [2]:

$$\overline{e}^i \cdot \overline{e}_j = \delta^i_j = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}, \quad i, j = 1,2,3 \qquad (2.2)$$

де δ^i_j — *символ Кронекера.*

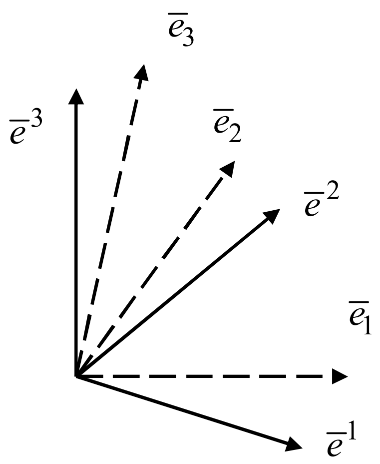


Рис. 3

Вектори взаємного базису, як видно із властивостей скалярного добутку, перпендикулярні до векторів основного базису з незбіжними індексами і утворюють гострий кут з вектором основного базису з таким же індексом (рис. 3), тобто

$$\overline{e}^i \perp \overline{e}_j,\ \cos(\overline{e}^i, \overline{e}_i) > 0\ (i \neq j; i, j = 1,2,3).$$

Якщо взяти базис декартової прямокутної системи кос ні вектори взаємно перпендикулярні), то взаємний базис збігається з ним. Якщо в афінних (косокутних) системах координат розкладання по взаємних базисах не збігаються $B^i \neq B_i$, (рис. 4), то в декартових системах через збіг базисів контраваріантні й коваріантні компоненти співпадають, тому в написанні індексів не роблять розходження.

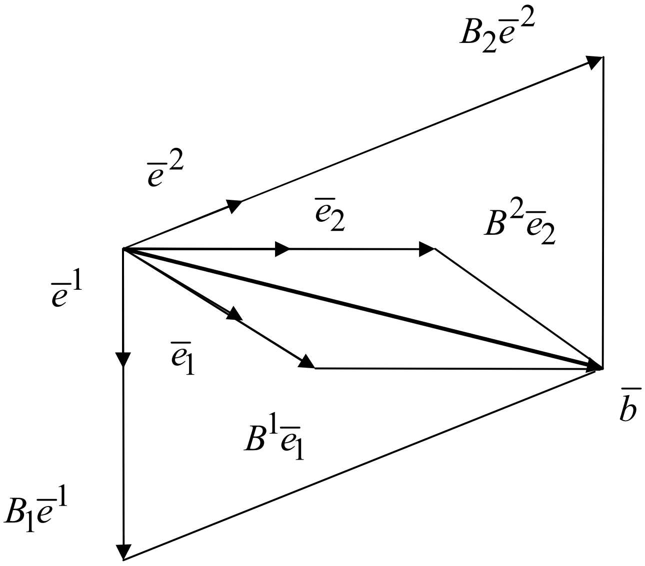


Рис. 4

Аналітично компоненти векторів знаходять за допомогою скалярного добутку. Якщо $\overline{b} = B^1\overline{e}_1 + B^2\overline{e}_2 + B^3\overline{e}_3 = B_1\overline{e}^{\,1} + B_2\overline{e}^{\,2} + B_3\overline{e}^{\,3}$, то $B^i = \overline{b}\cdot\overline{e}^{\,i}$ — ***контраваріантні*** компоненти, $B_j = \overline{b}\cdot\overline{e}_j$ — ***коваріантні*** компоненти.

Для скорочення запису в тензорній алгебрі та тензорному аналізі приймається правило Ейнштейна або умова про підсумовування:

$$\overline{b} = B^1\overline{e}_1 + B^2\overline{e}_2 + B^3\overline{e}_3 = \sum B^i\overline{e}_i = B^i\overline{e}_i.$$

Якщо використані повторювані індекси (один зверху, інший знизу), то мається на увазі, (якщо не обговорене протилежне), підсумовування.

Визначимо тепер аналітично вектори взаємного базису по векторах даного базису. Нехай даний базис $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$, тоді

$$\overline{e}^{\,1} \perp \overline{e}_2, \quad \overline{e}^{\,1} \perp \overline{e}_3, \qquad \overline{e}^{\,1} = \frac{\overline{e}_2 \times \overline{e}_3}{\overline{e}_1\cdot\left(\overline{e}_2 \times \overline{e}_3\right)},$$

тому, що за визначенням $\overline{e}^{\,1}\cdot\overline{e}_1 = 1$,

$$k\,(\overline{e}_2 \times \overline{e}_3)\cdot\overline{e}_1 = 1, \qquad k = \frac{1}{(\overline{e}_2 \times \overline{e}_3)\cdot\overline{e}_1},$$

$$\overline{e}^{\,2} = \frac{\overline{e}_3 \times \overline{e}_1}{\overline{e}_2\cdot\left(\overline{e}_3 \times \overline{e}_1\right)}, \qquad \overline{e}^{\,3} = \frac{\overline{e}_1 \times \overline{e}_2}{\overline{e}_3\cdot\left(\overline{e}_1 \times \overline{e}_2\right)}.$$

Аналогічно визначаються вектори основного базису, якщо задано взаємний базис (міняємо індекси верхній на нижній і навпаки у формулах).

§3. Тензори n-го рангу (n = 0, 1, 2, …)

Розглянемо простір R^3, у ньому скалярні, векторні й тензорні величини визначаються відповідними впорядкованими наборами компонентів. Кількість компонентів $n = 3^N$, де N — ранг тензора. Маємо:

1) скаляр - тензор нульового рангу $n = 3^0 = 1$.

2) вектор - тензор першого рангу $n = 3^1 = 3$.

3) тензор другого рангу $n = 3^2 = 9$, тощо.

Геометрично до поняття тензорної величини і числа компонентів приходимо з використанням базису в просторі. Тензор нульового рангу виходить, якщо при утворенні поліадних добутків вектори базису ми беремо нуль разів.

Тензори 1 рангу, якщо вектори базису ми беремо по одному разу.

Тензори 2 рангу, якщо — по два рази, тощо.

Для того, щоб пояснити одержання тензора другого рангу введемо спочатку поняття *діади* [3].

Діадою або невизначеним добутком двох базисних векторів будемо називати добутки виду $\overline{e}_i\overline{e}_j$: $\overline{e}_1\overline{e}_1$, $\overline{e}_1\overline{e}_2$,..., $\overline{e}_3\overline{e}_3$, інші позначення $\overline{e}_i \otimes \overline{e}_j$.

Тензором другого рангу або *діадиком* називається будь-яка лінійна комбінація діад:

$$D = \alpha\,\overline{e}_1\overline{e}_1 + \beta\,\overline{e}_1\overline{e}_2 + \ldots + \omega\overline{e}_3\overline{e}_3. \tag{3.1}$$

Коефіцієнти в лінійних комбінаціях діад є компонентами тензора. Так як нами використаний основний базис, то це будуть контраваріантні компоненти

$$D^{11} = \alpha, \quad D^{12} = \beta, \quad \ldots, \quad D^{33} = \omega.$$

Якщо брати тріади базисних векторів виду $\overline{e}_1\overline{e}_2\overline{e}_3$, $\overline{e}_3\overline{e}_2\overline{e}_3$, $\overline{e}_2\overline{e}_2\overline{e}_2$ і т. ін., то їхня лінійна комбінація визначає тензор третього рангу або *тріадик*. Використовуючи невизначені добутки базисних векторів по чотирьох (тетради) $\overline{e}_1\overline{e}_2\overline{e}_3\overline{e}_4$, $(\overline{e}_1 \otimes \overline{e}_2 \otimes \overline{e}_3 \otimes \overline{e}_4)$ при розгляді їх усіляких лінійних комбінацій приходимо до *тетрадиків* або тензорів четвертого рангу. Процес можна продовжувати по індукції, одержуючи тензори 5-го, 6-го та вищих рангів.

§4. Перетворення компонентів тензора. Метричний тензор. Піднімання й опускання (перекидання) індексів

Розглянемо перетворення системи координат, вважаючи даними основний $\overline{e}_i$ і взаємний $\overline{e}^j$ базиси, де $i, j = 1,2,3$. Можна зробити перехід до нового основного й взаємного базисів $\overline{e}_k{}'$ і $\overline{e}^{s\prime}$:

$$\overline{e}_i = \alpha_i^k \overline{e}_k{}' = \sum \alpha_i^k \overline{e}_k{}' \qquad (4.1)$$

$$\overline{e}^j = \beta_s^j \left(\overline{e}^s\right)' = \sum \beta_s^j \left(\overline{e}^s\right)' \qquad (4.2)$$

Якщо розглядається $p-$вимірний простір , то підсумовування ведеться до *р*. При переході до нових базисів компоненти тензорів, взагалі кажучи, змінюються. Для простоти розглянемо зміни компонентів векторів (тензорів першого рангу). Отримаємо:

$\overline{b} = B^j \cdot \overline{e}_j = B^j \cdot \alpha_j^k \cdot \overline{e}_k{}' = \left(B^k\right)' \cdot \overline{e}_k{}'$ тобто $\left(B^k\right)' = \alpha_j^k \cdot B^j$ — закон зміни контраваріантних компонентів вектора.

$\overline{b} = B_i \cdot \overline{e}^i = B_i \cdot \beta_l^i \cdot \overline{e}^{l\prime} = B_l' \cdot \overline{e}^{l\prime}$, тобто $B_l' = \beta_l^k \cdot B_k$ — закон зміни коваріантних компонентів вектора.

Перейдемо до тензора другого рангу $\mathrm{T}_{ij} \overline{e}^i \otimes \overline{e}^j$, який можна представити, як діадик по основному, взаємному й змішаному базисам:

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}^{ji} \overline{e}_i \overline{e}_j, \quad \mathrm{T} = \mathrm{T}_i^j \overline{e}^i \overline{e}_j = \mathrm{T}_{ij} \beta_k^i \overline{e}^{k\prime} \beta_l^j \overline{e}^{l\prime} = \mathrm{T}'_{kl} \overline{e}^{k\prime} \overline{e}^{l\prime}$$ ***, де***

$\mathrm{T}'_{kl} = \beta_k^i \beta_l^j \mathrm{T}_{ij}$ ***— закон зміни коваріантних компонентів тензора II-го рангу.***

$\mathrm{T}^{kl\prime} = \alpha_i^k \alpha_j^l \mathrm{T}^{ij}$ — закон зміни контраваріантних компонентів.

$\mathrm{T}_k^{l\,\prime} = \alpha_i^l \beta_k^j \mathrm{T}_j^i$ — закон зміни змішаних компонентів.

У сучасній науково-технічній літературі використовується два підходи до визначення тензора. Перший (більш традиційний) підхід заснований на використанні закону перетворення його компонентів. Якщо дано якийсь набір величин (з верхніми й нижніми індексами), які при перетворенні базисів змінюються як коваріантні, контраваріантні й змішані компоненти, то говорять, що такий набір визначить відповідний тензор. Наприклад, тензор другого рангу визначається як набір дев'яти компонентів (коваріантних, контраваріантних або змішаних).

Другий підхід є геометричним. Тензори розглядаються як полілінійні добутки (діадики, тріадики, тетрадики) векторів базису. Тоді закони перетворення компонентів задаються перетворенням векторів базису.

Якщо в просторі уведено скалярний добуток, тобто простір є евклідовим, то між коваріантним, контраваріантним і змішаним компонентами тензора можна встановити зв'язок. Нехай у просторі дані основний і взаємний базиси $\overline{e}_i$ та $\overline{e}^j$ $(i, j = 1,2,3)$. Розглянемо добуток базисних векторів

$$g_{ik} = \overline{e}_i \cdot \overline{e}_k$$
$$g^{jk} = \overline{e}^j \cdot \overline{e}^k$$

Якщо розглянути повні набори величин $g_s^r = \overline{e}^r \cdot \overline{e}_s$, то вони будуть змінюватися при зміні базису як компоненти відповідного тензора. По цьому їхній повний набори розглядаються як тензор (дивися підхід 1). Цей тензор називається метричним:

$$G = g^{jl} \overline{e}_j \otimes \overline{e}_l$$
$$G = g_s^r \overline{e}_r \otimes \overline{e}^s$$
$$G = g_{ik} \overline{e}^i \otimes \overline{e}^k$$

Природно розглянути G як той самий тензор, але при використанні векторів основного або взаємного базису.

Метрика простору це:

$$dS^2 = d\overline{r} \cdot d\overline{r} = dx_i \cdot \overline{e}^i \cdot dx_j \cdot \overline{e}^j = g^{ij} \cdot dx_i \cdot dx_j = dx^k \cdot \overline{e}_k \cdot dx^l \cdot \overline{e}_l = g_{kl} \cdot dx^k \cdot dx^l .$$

Користуючись компонентами метричного тензора встановлюємо зв'язок між коваріантними й контраваріантними компонентами.

Якщо дано основний і взаємний базиси, то:

$$B = B^j \cdot \overline{e}_j = B_k \cdot \overline{e}^k \ , \tag{4.3}$$

$$\overline{e}_j \cdot \overline{e}^k = \delta_j^k = \begin{cases} 0, \ j \neq k \\ 1, \ j = k \end{cases}.$$

Якщо обидві частини (4.3) помножити на $\overline{e}^s$, то $B^j \overline{e}_j \cdot \overline{e}^s = B_k \overline{e}^k \cdot \overline{e}^s$,

отже, $B^s = B_k g^{ks}$ — зв'язок між контраваріантними й коваріантними компонентами (перекидання індексів). Аналогічно можна встановити, що $B_r = g_{rt} B^t$.

Для тензора другого й вище рангу компоненти метричного тензора можна використати кілька разів $\mathrm{T}_{ij} = g_{ik} g_{jl} \mathrm{T}^{kl}$, тощо.

***<u>Зауваження</u>**: по формулі перетворення компонентів тензора при переході від старого основного до нового основного схожа на перетворення компонентів при переході від основного до взаємного базису й навпаки. Збіг має місце для базисів у декартових прямокутних системах координат. (Основний і взаємний базиси збігаються). Компоненти метричного тензора в декартовому базисі* $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

§5. Операції з тензорами

Лінійні операції (додавання або віднімання, множення на скаляр) виконуються з тензорами одного рангу. Для визначеності будемо використовувати тензори другого рангу. Для тензора більш високого рангу міркування проводиться по індукції. Для визначеності також будемо використовувати декартові базиси [4], коли контраваріантні, коваріантні й змішані компоненти не розрізняються. *Сума, різниця* (додавання і віднімання) тензорів: $C = A \pm B$, де

$$A = A_{ij} \overline{e}_i \otimes \overline{e}_j = A_{11} \overline{e}_1 \overline{e}_1 + \ldots + A_{12} \overline{e}_1 \overline{e}_2 + \ldots + A_{33} \overline{e}_3 \overline{e}_3,$$

$$B = B_{ij}\overline{e}_i \otimes \overline{e}_j = B_{11}\overline{e}_1\overline{e}_1 + \ldots + B_{33}\overline{e}_3\overline{e}_3 .$$

Тоді $C = A \pm B$ теж буде тензором другого рангу $C = (A_{ij} \pm B_{ij})\overline{e}_i\overline{e}_j$.

Компоненти суми (різниці) тензорів знаходяться підсумовуванням або відніманням компонентів цих тензорів.

При *множенні тензора на скаляр* виходить тензор того ж рангу: $D = \lambda A$; $D_{ij} = \lambda A_{ij}$, зв'язок додавання й множення на скаляр, наприклад, $2A = A + A$.

Якщо розглядати тензори другого рангу, то їх можна характеризувати матрицями компонентів. Уведені лінійні операції з тензорами зводяться до відповідних операцій з матрицями їхніх компонентів.

Крім того, уводяться спеціальні тензорні операції. *Тензорний добуток* (множення) тензорів: $M = AB = A \otimes B$, де $A = A_{ij}\overline{e}_i \otimes \overline{e}_j$, $B = B_{kl}\overline{e}_k \otimes \overline{e}_l$. Тоді

$$M = A_{ij}B_{kl}\, \overline{e}_i \otimes \overline{e}_j \otimes \overline{e}_k \otimes \overline{e}_l = M_{ijkl}\, \overline{e}_i \otimes \overline{e}_j \otimes \overline{e}_k \otimes \overline{e}_l .$$

Тензорним добутком є тензор, ранг якого дорівнює сумі рангів співмножників, а компоненти визначаються за законом:

$$M_{ijkl} = A_{ij} \cdot B_{kl}, \text{ де } i, j, k, l = 1,2,3 .$$

Згортання тензора.

Якщо по парі будь-яких індексів компонентів тензора зробити підсумовування, то така операція називається згортанням тензора. У результаті одержуємо тензор, ранг якого на дві одиниці менше. Згортання можна розглянути як результат скалярного множення тензорів.

Візьмемо, наприклад, тензор другого рангу:

$A = A_{ij}\overline{e}_i \otimes \overline{e}_j$; $\quad B = B_{kl}\overline{e}_k \otimes \overline{e}_l$;

$C = A \cdot B = A_{ij}\overline{e}_i \otimes \overline{e}_j \cdot B_{kl}\overline{e}_k \otimes \overline{e}_l = \mathrm{A}_{ij}B_{kl}\overline{e}_i \otimes \overline{e}_j \cdot \overline{e}_k \otimes \overline{e}_l =$

$= C_{ijkl}\overline{e}_i \otimes \overline{e}_j \cdot \overline{e}_k \otimes \overline{e}_l = D_{il}\overline{e}_i \otimes \overline{e}_l$

$C_{ijkl}\delta_{jk} = D_{il}, \quad \overline{e}_j \cdot \overline{e}_k = \delta_{jk}.$

Якщо дозволяє ранг тензорів, то операцію скалярного множення можна повторити кілька разів. Результат еквівалентний згортці по декількох параметрах індексів. Наприклад, тензори другого рангу можна двічі скалярне перемножувати.

Векторний добуток.

Можна ввести векторний добуток тензорів, маючи на увазі, що при цьому векторне перемножуються сусідні вектори поліад.

Наприклад:

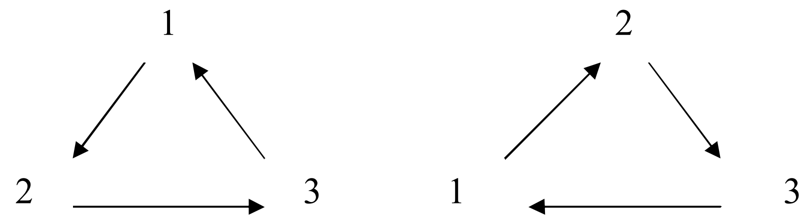
$A = A_{ij}\overline{e}_i \otimes \overline{e}_j; \qquad B = B_{kl}\overline{e}_k \otimes \overline{e}_l;$

$A \times B = A_{ij}\overline{e}_i \otimes \overline{e}_j \times B_{kl}\overline{e}_k \otimes \overline{e}_l = A_{ij}B_{kl}\overline{e}_i \otimes \left(\overline{e}_j \times \overline{e}_k\right) \otimes \overline{e}_l$

Векторний добуток базисних векторів зручно описати за допомогою тензора Леві-Чівіта $\overline{e}_j \times \overline{e}_k = E_{jkm}\overline{e}_m$, де E_{jkm} — компоненти тензора Леві-Чівіта визначаються в такий спосіб:

$$E_{jkm} = \begin{cases} 1 & , j,k,m - \text{права перестановка}, \\ -1 & , j,k,m - \text{ліва перестановка}, \\ 0 & , j,k,m - \text{співпадає деяка пара індексів}. \end{cases}$$

На рисунку 5 наведені випадки правої та лівої перестановок



права перестановка ліва перестановка

Рис. 5

Таким чином,

$$A \times B = A_{ij}B_{kl}E_{jkm}\overline{e}_i \otimes \overline{e}_m \otimes \overline{e}_l.$$

У результаті тензорного добутку двох тензорів одержимо тензор, ранг якого дорівнює сумі рангів співмножників. У результаті векторного добутку виходить тензор, ранг якого на одиницю менше суми рангів співмножників. У результаті скалярного добутку виходить тензор , ранг якого на дві одиниці менше, ніж сума рангів співмножників.

§6. Тензори другого рангу

Крім скалярів і векторів в механіці суцільного середовища і ФТТ найбільше поширення одержали тензори другого рангу. Тензор другого рангу це діадик. Він записується у вигляді

$$A = A_{ij}\overline{e}_i \otimes \overline{e}_j = A_{11}\overline{e}_1 \otimes \overline{e}_1 + A_{12}\overline{e}_1 \otimes \overline{e}_2 + A_{13}\overline{e}_1 \otimes \overline{e}_3 + A_{21}\overline{e}_2 \otimes \overline{e}_1 + ... + A_{33}\overline{e}_3 \otimes \overline{e}_3$$

Передбачається, що використовується базис, у якому контраваріантні і коваріантні компоненти збігаються, тому тензор A представляється матрицею

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

складеною з компонентів тензора.

Не можна ототожнювати тензор другого рангу і матрицю.

Кажуть, що тензор симетричний, якщо при перестановці індексів він не змінюється, тобто $A_{ij} = A_{ji}$, у цьому випадку тензор має тільки 6 незалежних компонентів, його матриця має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Таким чином, матриця компонентів симетрична відносно головної діагоналі.

Зауваження. Якщо дано тензор вище другого рангу, то узагальненням симетричного тензора є тензор симетричний по парі індексів.

Наприклад: якщо $B_{ijl} = B_{ilj}$, то говорять що тензор B симетричний по парі останніх індексів.

Кажуть, що тензор є кососиметричним або антисиметричним, якщо при перестановці індексів змінюється знак компонента:

$$A_{ij} = -A_{ji}.$$

Кососиметричний тензор другого рангу має три незалежних компоненти, тому що діагональні компоненти повинні обертатися в нуль.

$$A_{ii} = -A_{ii} \Rightarrow 2A_{ii} = 0 \Rightarrow A_{ii} = 0 ,$$

а між компонентами, симетричними щодо головної діагоналі, розходження тільки в знаках.

Кососиметричний тензор має вигляд: $\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}.$

Деякий тензор другого рангу можна розкласти на симетричну й антисиметричну частини $A = A_+^* + A_-^*$

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(A_{ij} + A_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(A_{ij} - A_{ji}\right),$$

де $\left(A_+^*\right)_{ij} = \frac{1}{2}\left(A_{ij} + A_{ji}\right)$ — симетрична частина тензора,

$\left(A_-^*\right)_{ij} = \frac{1}{2}\left(A_{ij} - A_{ji}\right)$ — кососиметрична частина тензора.

Виділення симетричної частини тензора називається його *симетруванням*, а виділення антисиметричної частини — *альтернуванням* тензора.

<u>*Зауваження.*</u> Якщо дано тензор високого рангу $(n > 2)$, то говорять про його *антисиметричність* або *кососиметричність* по парі індексів.

§7. Власні вектори і власні значення тензора

Нехай даний тензор Т і вектор $\overline{a}$. Їхній скалярний добуток буде вектором $\overline{b} = \mathrm{T} \cdot \overline{a}$. Взагалі кажучи, вектор $\overline{b}$ відрізняється від вектора $\overline{a}$ величиною і напрямком.

Наприклад, якщо $\mathrm{T}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 6 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\end{pmatrix}$ і $\overline{a}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$, тоді дістаємо, що

$$\mathrm{T}\cdot\overline{a}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 6 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 25\\ 13\end{pmatrix}.$$

Маємо, що $\overline{a}=(3;\ 2;\ 1)$ та $\overline{b}=(3;\ 25;\ 13)$. Тоді $|\overline{a}|=\sqrt{14}$, $|\overline{b}|=\sqrt{803}$ і

$$\cos\left(\overline{a}{}^\wedge Ox\right)=\frac{3}{\sqrt{14}},\qquad \cos\left(\overline{b}{}^\wedge Ox\right)=\frac{3}{\sqrt{803}}.$$

Розрізняються модулі векторів $\overline{a}$ й $\overline{b}$ і направляючі косинуси, тобто вектори не збігаються ні по величині, ні по напрямку. Однак існують такі напрямки в просторі, які під дією тензора не змінюються. Такі напрямки в просторі називаються головними. Якщо взяти вектор головного напрямку, то під дією тензора він переходить у колінеарний. Вектор $\mathrm{T}\cdot\overline{n}=\lambda\cdot\overline{n}$, тобто напрямок у просторі зберігається. Коефіцієнт λ, що характеризує зміну модуля вектора головного напрямку під дією тензора, називається *власним значенням*. Головні напрямки тензора і відповідні власні значення визначаються в такий спосіб:

$\lambda\cdot\overline{n}=\lambda\cdot\mathrm{E}\cdot\overline{n}$ — по властивостях одиничного тензора.

Тоді дістаємо рівняння $(\mathrm{T}-\lambda\mathrm{E})\overline{n}=0,$ де

$$\mathrm{T}=\begin{pmatrix}\mathrm{T}_{11} & \mathrm{T}_{12} & \mathrm{T}_{13}\\ \mathrm{T}_{21} & \mathrm{T}_{22} & \mathrm{T}_{23}\\ \mathrm{T}_{31} & \mathrm{T}_{32} & \mathrm{T}_{33}\end{pmatrix},\qquad \mathrm{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Якщо перейти до скалярної форми, то для визначення власних значень і власних напрямків одержуємо однорідну лінійну систему виду:

$$\begin{cases}(\mathrm{T}_{11}-\lambda)\,n_1+\mathrm{T}_{12}n_2+\mathrm{T}_{13}n_3=0\\ \mathrm{T}_{21}n_1+(\mathrm{T}_{22}-\lambda)\,n_2+\mathrm{T}_{23}n_3=0.\\ \mathrm{T}_{31}n_1+\mathrm{T}_{32}n_2+(\mathrm{T}_{33}-\lambda)\,n_3=0\end{cases}$$

Однорідна система завжди має тривіальний (нульовий) розв'язок, але нульовий вектор ніякого напрямку в просторі не визначає. Тому шукаємо ненульові розв'язки системи. У цьому випадку система буде невизначеною (не одне, а кілька рішень). Тоді визначник системи дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{T}_{11}-\lambda & \mathrm{T}_{12} & \mathrm{T}_{13} \\ \mathrm{T}_{21} & \mathrm{T}_{22}-\lambda & \mathrm{T}_{23} \\ \mathrm{T}_{31} & \mathrm{T}_{32} & \mathrm{T}_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Розкриваючи визначник, отримаємо алгебраїчне рівняння третього степеня, що називається *характеристичним рівнянням*, і приводимо його до виду: $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$, де a_1, a_2, a_3 — коефіцієнти рівняння та

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= f_1\left(\mathrm{T}_{ij}\right) \\ a_2 &= f_2\left(\mathrm{T}_{ij}\right) \\ a_3 &= f_3\left(\mathrm{T}_{ij}\right) \end{aligned}\right\} \text{— різні функції від компонентів тензора } \mathrm{T}_{ij}\ (i, j = 1,2,3).$$

Рівняння третього степеня (або з непарним степенем) має хоча б один дійсний корінь. Якщо два інші корені комплексно – спряжені, то цим власним значенням у просторі ніякі напрямки не відповідають. Багато із застосовуваних у механіці суцільних середовищ і фізиці твердого тіла тензорів симетричні. Установлено, що для симетричних тензорів характеристичне рівняння має вигляд: $\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$, де $I_1 = \mathrm{T}_{11} + \mathrm{T}_{22} + \mathrm{T}_{33}$;

$$I_2 = \begin{vmatrix} \mathrm{T}_{11} & \mathrm{T}_{12} \\ \mathrm{T}_{21} & \mathrm{T}_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathrm{T}_{11} & \mathrm{T}_{13} \\ \mathrm{T}_{31} & \mathrm{T}_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathrm{T}_{22} & \mathrm{T}_{23} \\ \mathrm{T}_{32} & \mathrm{T}_{33} \end{vmatrix}; \quad I_3 = \begin{vmatrix} \mathrm{T}_{11} & \mathrm{T}_{12} & \mathrm{T}_{13} \\ \mathrm{T}_{21} & \mathrm{T}_{22} & \mathrm{T}_{23} \\ \mathrm{T}_{31} & \mathrm{T}_{32} & \mathrm{T}_{33} \end{vmatrix}.$$

Коефіцієнти I_1, I_2, I_3 називаються *головними інваріантами тензора*. ***Інваріант*** – це величина, яка не змінюється при перетворенні координат, наприклад, якщо змінити систему координат, то компоненти вектора змінюються, а його довжина, хоча і є функцією компонентів - не змінюється, тобто є інваріантною. Для симетричних тензорів завжди є три дійсних власних значення.

Вибираємо власні значення $\lambda_{(i)}$ ((i) – не індекс, а номер), йому відповідає $\bar{n}^{(i)}$ — власний вектор, компоненти якого знаходяться як розв'язок системи:

$$\begin{cases} (\mathrm{T}_{11} - \lambda_{(i)})n_1^{(i)} + \mathrm{T}_{12}n_2^{(i)} + \mathrm{T}_{13}n_3^{(i)} = 0 \\ (\mathrm{T}_{21}n_1^{(i)} + (\mathrm{T}_{22} - \lambda_{(i)})n_2^{(i)} + \mathrm{T}_{23}n_3^{(i)} = 0 \\ \mathrm{T}_{31}n_1^{(i)} + \mathrm{T}_{32}n_2^{(i)} + (\mathrm{T}_{33} - \lambda_{(i)})n_3^{(i)} = 0 \end{cases}$$

Система невизначена, тому незалежних рівнянь менше ніж число невідомих, тобто менше трьох. Для одержання відповідей до визначимо систему. Можна, наприклад, зажадати, щоб всі вектори мали одиничний модуль $|\bar{n}^{(i)}| = 1$.

Отже, умова нормування $\left(n_1^{(i)}\right)^2 + \left(n_2^{(i)}\right)^2 + \left(n_3^{(i)}\right)^2 = 1$.

Якщо ж серед власних значень $\lambda_{(j)}$ є кратні (тобто якісь корні можуть збігатися), то додаткова умова ортогональності (взаємної перпендикулярності) векторів головних напрямків має вигляд

$$\lambda_{(i)}, \bar{n}^{(i)} = \left(n_1^{(i)} n_2^{(i)} n_3^{(i)}\right); \quad \lambda_{(j)}, \bar{n}^{(j)} = \left(n_1^{(j)} n_2^{(j)} n_3^{(j)}\right); \qquad \lambda_{(i)} = \lambda_{(j)}$$

$$n_1^{(i)} n_1^{(j)} + n_2^{(i)} n_2^{(j)} + n_3^{(i)} n_3^{(j)} = 0.$$

§8. Приведення тензора до діагонального виду

Нехай дано симетричний тензор другого рангу:

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} \mathrm{T}_{11} & \mathrm{T}_{12} & \mathrm{T}_{13} \\ \mathrm{T}_{21} & \mathrm{T}_{22} & \mathrm{T}_{23} \\ \mathrm{T}_{31} & \mathrm{T}_{32} & \mathrm{T}_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{T}_{ij} = \mathrm{T}_{ji}.$$

Тоді характеристичне рівняння $\left| \mathrm{T}_{ij} - \lambda\delta_{ij} \right| = 0$ має три дійсних корені

$$\lambda_{(1)} \geq \lambda_{(2)} \geq \lambda_{(3)}.$$

Потім можна знайти три вектори головних напрямків $\overline{n}^{(1)}, \overline{n}^{(2)}, \overline{n}^{(3)}$. Ці вектори взаємно перпендикулярні. Якщо серед коренів є кратні $\lambda_{(1)} > \lambda_{(2)} = \lambda_{(3)}$, то взаємної перпендикулярності власних напрямків ми добиваємося за умови $\overline{n}^{(2)} \cdot \overline{n}^{(3)} = 0$. У цьому випадку ми маємо, що вектори $\overline{n}^{(2)}, \overline{n}^{(3)}$ належать площині π, $\overline{n}^{(2)} \perp \overline{n}^{(3)}$ та $\overline{n}^{(1)} \perp \pi$ (рис. 6).

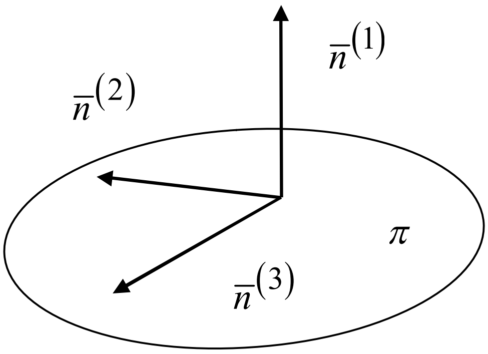


Рис. 6

У площині π будь-який напрямок є головним. Тому вибираємо два будь-яких $\overline{n}^{(2)} \perp \overline{n}^{(3)}$ (рис. 6).

У тривимірному просторі три взаємно перпендикулярних вектори лінійно незалежні і їх можна використати як базис у просторі. Якщо перейти від даної системи координат до базису із власних векторів, то матриця компонентів тензора істотно спрощується і приводиться до діагонального виду.

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)} \end{pmatrix}.$$

Тоді інваріанти будуть мати такий вид:

$$I_1 = \mathrm{T}_{12} + \mathrm{T}_{22} + \mathrm{T}_{33} = \lambda_{(1)} + \lambda_{(2)} + \lambda_{(3)};$$

$$I_2=\begin{vmatrix}\lambda_{(1)} & 0\\ 0 & \lambda_{(2)}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda_{(1)} & 0\\ 0 & \lambda_{(3)}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda_{(2)} & 0\\ 0 & \lambda_{(3)}\end{vmatrix}=\lambda_{(1)}\lambda_{(2)}+\lambda_{(1)}\lambda_{(3)}+\lambda_{(2)}\lambda_{(3)};$$

$$I_3=\lambda_{(1)}\cdot\lambda_{(2)}\cdot\lambda_{(3)}.$$

Розглянемо тепер цілі ступені тензора:

$$\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}=\mathrm{T}^2=\begin{pmatrix}\lambda_{(1)} & 0 & 0\\ 0 & \lambda_{(2)} & 0\\ 0 & 0 & \lambda_{(3)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{(1)} & 0 & 0\\ 0 & \lambda_{(2)} & 0\\ 0 & 0 & \lambda_{(3)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_{(1)}^2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_{(2)}^2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_{(3)}^2\end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^3=\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}^2=\begin{pmatrix}\lambda_{(1)} & 0 & 0\\ 0 & \lambda_{(2)} & 0\\ 0 & 0 & \lambda_{(3)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{(1)}^2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_{(2)}^2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_{(3)}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_{(1)}^3 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_{(2)}^3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_{(3)}^3\end{pmatrix}.$$

За допомогою математичної індукції приходимо до загальної формули

$$\mathrm{T}^n=\begin{pmatrix}\lambda_{(1)}^n & 0 & 0\\ 0 & \lambda_{(2)}^n & 0\\ 0 & 0 & \lambda_{(3)}^n\end{pmatrix}.$$

Кожне із власних значень задовольняє характеристичному рівнянню:

$$\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3=0.$$

Теорема Гамільтона –Келлі. Усякий симетричний тензор другого рангу є розв'язком свого характеристичного рівняння:

$$\mathrm{T}^3-I_1\mathrm{T}^2+I_2\mathrm{T}-I_3\mathrm{E}=0. \qquad (8.1)$$

Доведення. Дійсно,

$$\begin{pmatrix}\lambda_{(1)}^3 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_{(2)}^3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_{(3)}^3\end{pmatrix}-I_1\begin{pmatrix}\lambda_{(1)}^2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_{(2)}^2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_{(3)}^2\end{pmatrix}+I_2\begin{pmatrix}\lambda_{(1)} & 0 & 0\\ 0 & \lambda_{(2)} & 0\\ 0 & 0 & \lambda_{(3)}\end{pmatrix}-I_3\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=0.$$

Після переходу до базису із власних векторів цей тензор приводить до системи рівнянь

$$\begin{cases} \lambda_{(1)}^3 - I_1\lambda_{(1)}^2 + I_2\lambda_{(1)} - I_3 = 0 \\ \lambda_{(2)}^3 - I_1\lambda_{(2)}^2 + I_2\lambda_{(2)} - I_3 = 0, \\ \lambda_{(3)}^3 - I_1\lambda_{(3)}^2 + I_2\lambda_{(3)} - I_3 = 0 \end{cases}$$

кожне з яких перетворюється у тотожність, тому що ми обрали головні значення $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \lambda_{(3)}$.

Наслідок. Скориставшись цією теоремою зводимо визначення будь-якого натурального степеня тензора T до лінійної комбінації одиничного тензора E, а також першого та другого степенів тензора T, T^2.

Отже $\mathrm{T}^0 = \mathrm{E}, \mathrm{T}^1 = \mathrm{T}, \mathrm{T}^2 = \mathrm{T}^2$, (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) — комбінації коефіцієнтів по тензорах $\mathrm{E}, \mathrm{T}, \mathrm{T}^2$.

Маємо $\mathrm{T}^3 = I_1\mathrm{T}^2 - I_2\mathrm{T} + I_3\mathrm{E}$, де $I_1; -I_2; I_3$ — коефіцієнти розкладання. Помножимо обидві частини рівняння (8.1) на T : $\mathrm{T}^4 - I_1\mathrm{T}^3 + I_2\mathrm{T}^2 - I_3\mathrm{T} = 0$.

Звідси маємо

$$\begin{aligned} \mathrm{T}^4 &= I_1\mathrm{T}^3 - I_2\mathrm{T}^2 + I_3\mathrm{T} = I_1(I_1\mathrm{T}^2 - I_2\mathrm{T} + I_3\mathrm{E}) - I_2\mathrm{T}^2 + I_3\mathrm{T} = \\ &= (I_1{}^2 - I_2)\mathrm{T}^2 + (I_3 - I_1I_2)\mathrm{T} + I_1I_3\mathrm{E}, \end{aligned} \tag{8.2}$$

де $(I_1{}^2 - I_2); (I_3 - I_1I_2); I_1I_3$ — коефіцієнти розкладання. Далі можна діяти з індукцією для $\mathrm{T}^5, \mathrm{T}^6$ тощо.

§9. Вектори і тензори в n-мірному просторі

Досить часто при описі фізичних процесів й явищ необхідно використати факторні багатовимірні простори. Наприклад, у теорії відносності використовується чотиривимірний простір подій, з інтервалом

$$ds^2 = C^2dt^2 - dx_1{}^2 - dx_2{}^2 - dx_3{}^2.$$

У класичній механіці для опису руху матеріальної точки використовується шестимірний вектор $(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3)$, де x_1, x_2, x_3 — координати точки, v_1, v_2, v_3 — компоненти швидкості. Тому природно розглянути алгебру векторів і тензорів у деякому $n-$мірному просторі. З фізичних міркувань ці простори повинні бути лінійними, з операціями додавання й множення на число. .

Якщо взяти два елементи із простору векторів або тензорів, то в результаті додавання також виходить елемент простору. Наприклад $n-$мірні вектори
$\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ та $\overline{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ при додаванні дають $n-$мірний вектор:

$$\overline{c} = \overline{a} + \overline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n).$$

Крім того вводитися операція множення на число або скаляр, у результаті якого виходить елемент простору $\lambda\overline{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n)$.

Потім переходимо до розгляду систем лінійно залежних і лінійно-незалежних векторів. Максимальна по кількості система лінійно-незалежних векторів утворює базис простору. Зручно використати простір, коли його розмірність збігається з кількістю векторів базису. Наприклад, якщо розглянути множину компланарних векторів , то у звичайному тривимірному просторі вони мають три компоненти, а базис – дві. Тому переходимо до двокомпонентного запису, у який входять коефіцієнти розкладання по базису.

Далі, як правило, у просторі вводиться метрика. Наприклад, для того, щоб порівнювати вектори по модулю. Найпростіший випадок евклідовий простір, коли вводиться скалярний добуток: $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = a_i b_i$ (декартових базис), та $|\overline{a}| = \sqrt{a_i \cdot a^i}, |\overline{b}| = \sqrt{b_i \cdot b^i}$.

Не завжди в просторі доцільно використовувати евклідову метрику, наприклад простір подій у теорії відносності неевклідовий (простір Мінковського). Проте до використовуваних величин пред'являється вимога тензорності, тобто при припустимих перетвореннях координат компоненти повинні перетворюватися як компоненти тензорів відповідного рангу. Це необхідно для того, щоб закони, записані за допомогою цих величин мали інваріантну форму тобто незалежну від зміни системи координат.

У природній формі цій вимозі відповідає запис тензорів:

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}^{ij}_{\dots ks} \qquad \overline{e}_i \otimes \overline{e}_j \dots \overline{e}^k \otimes \overline{e}^s$$

компоненти i, j — контраваріантні базис $\overline{e}_i, \overline{e}_j$ — основний

k, s — коваріантні $\overline{e}^k, \overline{e}^s$ — взаємний

Перетворення систем координат задаються виразом вектора старого базису через лінійну комбінацію нового базису або навпаки. Підставляючи відповідний вираз в покомпонентний запис тензора, одержуємо відповідний закон зміни компонентів. Саме так повинна змінюватися відповідна тензорна величина.

§10. Тензорні поля

При описі і дослідженні фізичних явищ і процесів у просторі виділяється деяка область V, що має певні властивості й потім розглядається її динаміка: тобто як із часом змінюється як сама область так й її властивості. Властивість описується скалярною, векторною або тензорною величиною. Для того, щоб підкреслити, що ця величина розглядається в деякій області простору, говорять про відповідне тензорне поле [5]. Якщо в кожній точці області V простору задана скалярна функція $\varphi = \varphi(\overline{r}, t)$, де $\overline{r}$ — радіус-вектор, t — час, то говорять, що в цій області задано скалярне поле.

Методами математичного аналізу зміна поля описується за допомогою повної похідної функції φ

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{grad} \varphi \cdot \overline{v}$$

Повна похідна від функції за часом ще іноді називається матеріальною похідною, тому що другий доданок ураховує найшвидшу зміну функції (по частках), а також швидкості самих часток.

Часто розглядають стаціонарні поля, які не змінюється із часом, вони описуються законами виду $\varphi = \varphi(r)$. Зміна поля характеризується зміною градієнта функції й похідній по напрямку (рис.7). Наприклад, поле температур – скалярне поле.

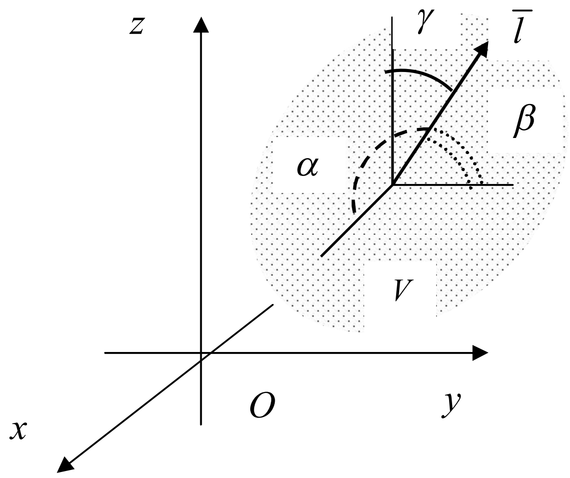


Рис. 7

Маємо,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \operatorname{grad} \varphi \cdot \overline{l}^{0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \gamma$$

$$\overline{l}^{0} = (\cos \alpha\ ; \cos \beta\ ; \cos \gamma), \quad \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \overline{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \overline{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \overline{k}$$

Якщо в кожній точці області V задана деяка вектор-функція $\overline{a}$ то говорять, що задано векторне поле. Наприклад, поле швидкостей і прискорень часток суцільного середовища, поле сил тяжіння, електромагнітне поле, коли задані дві нерозривно зв'язані величини (рівняння Максвелла). Для простоти зупинимося на випадку стаціонарних векторних полів: $\overline{a} = \overline{a}(\overline{r})$.

Зміна стаціонарного векторного поля описується за допомогою дивергенції і ротора векторного поля $\left(\nabla = \overline{i} \frac{\partial}{\partial x} + \overline{j} \frac{\partial}{\partial y} + \overline{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)$:

$$\operatorname{div} \overline{a} = \nabla \cdot \overline{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \nabla \times \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\bar{k}\,.$$

Якщо перейти від векторного аналізу до тензорного, то розглянемо також градієнт вектора

$$\operatorname{grad}\bar{a} = \nabla \otimes \bar{a} = \bar{i} \otimes \frac{\partial \bar{a}}{\partial x} + j \otimes \frac{\partial \bar{a}}{\partial y} + \bar{\kappa} \otimes \frac{\partial \bar{a}}{\partial z} = \bar{i} \otimes \frac{\partial}{\partial x}\left(a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}\right) +$$

$$+\bar{j} \otimes \frac{\partial}{\partial y}\left(a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}\right) + \bar{k} \otimes \frac{\partial}{\partial z}\left(a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}\right) =$$

$$= \bar{i} \otimes \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial a_y}{\partial x}\bar{j} + \frac{\partial a_z}{\partial x}\bar{k}\right) + \bar{j} \otimes \left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\bar{i} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial a_z}{\partial y}\bar{k}\right) +$$

$$+\bar{k} \otimes \left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\bar{i} + \frac{\partial a_y}{\partial z}\bar{j} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\bar{k}\right) = \frac{\partial a_x}{\partial x}\bar{i} \otimes \bar{i} + \frac{\partial a_y}{\partial x}\bar{i} \otimes \bar{j} + \frac{\partial a_z}{\partial x}\bar{i} \otimes \bar{k} +$$

$$+\frac{\partial a_x}{\partial y}\bar{j} \otimes \bar{i} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\bar{j} \otimes \bar{j} + \frac{\partial a_z}{\partial y}\bar{j} \otimes \bar{k} + \frac{\partial a_x}{\partial z}\bar{k} \otimes \bar{i} + \frac{\partial a_y}{\partial z}\bar{k} \otimes \bar{j} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\bar{k} \otimes \bar{k}$$

Отже, дістанемо тензор другого рангу.

У векторному і тензорному аналізі застосовується три основні диференціальні операції першого порядку: **grad(.)** - градієнт, **rot(.)** – ротор, **div(.)** - дивергенція. Застосування операції **grad(.)** підвищує ранг тензора на одиницю. Наприклад градієнт скаляра — це тензор першого рангу. Операція узяття **rot(.)** не змінює ранг тензора. Операція узяття **div(.)** змінює ранг тензора на одиницю.

Формальний запис диференціальних операцій за допомогою оператора Гамільтона ∇ відбиває деякі їхні особливості, наприклад, векторне множення переводить вектор у псевдовектор або аксіальний вектор.

§11. Потенційні векторні поля та соленоїдальні векторні поля

Нехай в області V простору задане векторне поле $\overline{a}=\overline{a}(\overline{r})$ (рис. 8). Досліджуючи диференціальні властивості векторних полів, виділимо їхні два різновиди: *потенційні* векторні поля і *соленоїдальні* векторні поля. Визначимо умови, що характеризують ці поля. Якщо задане векторне поле є полем градієнта деякого скалярного поля, то воно називається *потенційним* векторним полем. Тобто, якщо $\exists u=u(\overline{r}):\overline{a}=\operatorname{grad}u=\nabla u$, тоді маємо, що

$$\overline{a}=\frac{\partial u}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\overline{k},\ \text{де}\ \ a_x=\frac{\partial u}{\partial x};\ a_y=\frac{\partial u}{\partial y};\quad a_z=\frac{\partial u}{\partial z}.$$

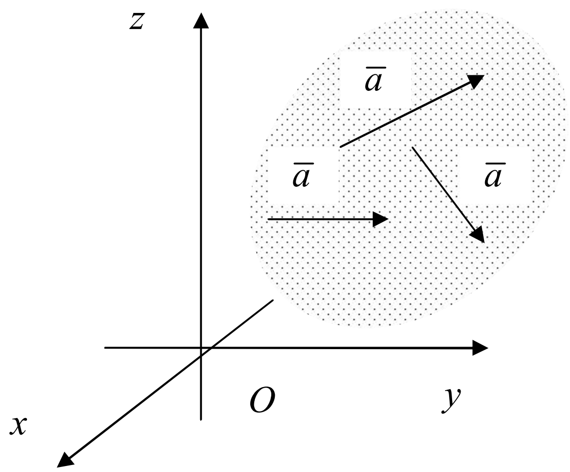


Рис. 8

Знайдемо ротор цього поля:

$$\operatorname{rot}\overline{a}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\overline{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\overline{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\overline{k}.$$

Легко бачити, що $\dfrac{\partial a_z}{\partial y}-\dfrac{\partial a_y}{\partial z}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)-\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=0$.

Аналогічно, $\dfrac{\partial a_x}{\partial z}-\dfrac{\partial a_z}{\partial x}=0$ й $\dfrac{\partial a_y}{\partial x}-\dfrac{\partial a_x}{\partial y}=0$. Отже, ми дістали, що $\operatorname{rot}\overline{a}=0$ та обернено, умова потенційності має вигляд $\operatorname{rot}\overline{a}=\nabla\times(\nabla u)=0$.

У символічному вирахуванні оператор Гамільтона ∇ можна розглянути як вектор. Тоді $\operatorname{rot}\overline{a}=\nabla\times(\nabla u)=(\nabla\times\nabla)u=0$.

Соленоїдальне поле визначається умовою $\bar{a} = \operatorname{rot}\bar{F}$.

Якщо дане векторне поле утворене полем ротора, то воно називається *соленоїдальним* векторним полем. *Соленоїдальне* поле — це також трубчасте поле, тобто поле утворене вихровими трубками. Знайдемо ротор соленоїдального поля

$$\operatorname{rot}\bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\bar{k}$$

де $a_x = \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)$; $a_y = \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)$; $a_z = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$.

Знайдемо тепер дивергенцію цього поля. Маємо

$$\operatorname{div}\bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial^2 F_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 F_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial x \partial y} = 0.$$

Отже, як ми бачимо, дивергенція соленоїдального поля дорівнює нулю.

Таким чином, умовою соленоїдальності векторного поля є рівність нулю його дивергенції.

§12. Диференціальні операції в криволінійних координатах

Нехай у просторі задана декартова система координат $Oxyz$, тоді положення довільної точки простору визначається трійкою координат (x, y, z). Припустимо, що кожну з координат можна розглянути як функцію трьох параметрів *u, v, w,* тобто $x = x\ (u, v, w)$; $y = y\ (u, v, w)$; $z = z\ (u, v, w)$. Ці співвідношення можна трактувати, як закон переходу від однієї системи координат до іншої системи координат. Для того, щоб здійснити переходи потрібно мати й формули зворотного переходу: $u = u\,(x, y, z)$, $v = v\,(x, y, z)$, $w = w\,(x, y, z)$.

За умовою $Oxyz$ — декартова прямокутна система координат. Загалом кажучи u, v, w не можна розглядати як декартові прямокутні координати. Умова $u = const$, тобто $u(x, y, z) = const$ визначає деяку поверхню в просторі, що називається координатною поверхнею й аналогічно визначаються координатні поверхні v, w.

Перетин координатних поверхонь визначає координатні лінії. Такі лінії бувають кривими, тому координатна система називається криволінійною. Між декартовими координатами і точками простору існує взаємно однозначна відповідність. Така ж вимога по можливості переноситься на криволінійні координати. Тоді зрозумілою є відмінність від нуля якобіана перетворення:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{12.1}$$

Надалі припускаємо, що ця умова виконується майже скрізь у просторі.

Перехід до криволінійних координат у застосуваннях пов'язаний, як правило, з деяким спрощенням формулювання задачі. Наприклад, використання циліндричних координат дозволяє простіше врахувати осьову симетрію задачі, сферичних координат — сферичну, центральну симетрію тощо.

Положення точки $M(x, y, z)$ простору у циліндричних координатах визначається впорядкованою трійкою чисел (φ, ρ, z), де (φ, ρ) — полярні координати проекції точки M на площину Oxy, а z — апліката точки M (рис. 9).

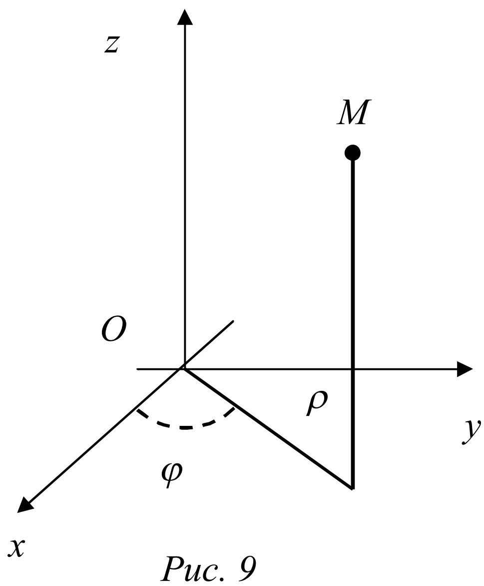


Рис. 9

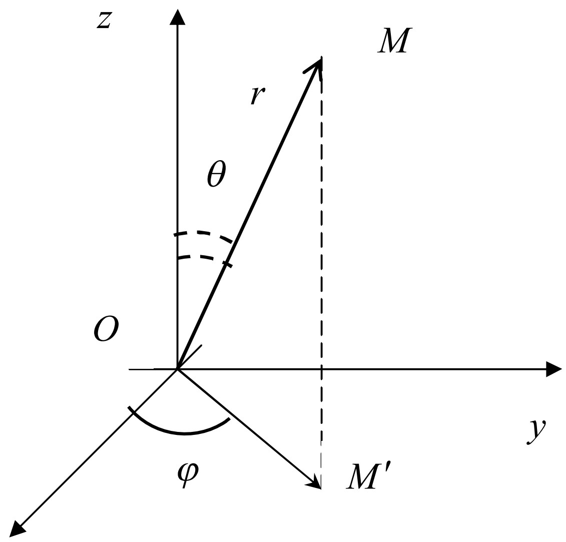


Рис. 10

Нагадаємо формули переходу від декартових координат до циліндричних:

$$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,\ \ z = z \quad (0 \le \rho < +\infty; -\pi < \varphi \le \pi; -\infty < z < +\infty)\,.$$

Якобіан перетворення має вигляд:

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho\,.$$

Розташування точки $M(x,y,z)$ простору у сферичних координатах визначається трійкою чисел (r,φ,θ) (рис. 10), де r — відстань від початку координат до точки M (довжина радіус-вектора $\overline{OM}$), φ — кут, який утворює вектор $\overline{OM'}$ з додатним напрямом осі абсцис, та θ — кут, який утворює вектор $\overline{OM}$ з віссю аплікат.

Формули переходу від декартових координат до сферичних мають вигляд

$$x = r\sin\theta\cos\varphi;\ \ x = r\sin\theta\sin\varphi;\ \ z = r\cos\theta \quad (0 \le r < +\infty; 0 \le \varphi < 2\pi; 0 \le \theta < \pi)\,.$$

Якобіан перетворення має вигляд

$$J = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\sin\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \end{vmatrix} = r^2\sin\theta\,.$$

Для дослідження полів у просторі застосовуються диференціальні операції **div(.)**, **grad(.)**, **rot(.)**. Розглянемо, як вони визначаються в криволінійних координатах. Положення точки в просторі визначається радіус-вектором, тобто

$$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} = x(u,v,w)\overline{i} + y(u,v,w)\overline{j} + z(u,v,w)\overline{k}\,.$$

Зрозуміло, що в криволінійних координатах напрямок у просторі можна визначити за допомогою трьох векторів: $\dfrac{\partial\overline{r}}{\partial u},\ \dfrac{\partial\overline{r}}{\partial v},\ \dfrac{\partial\overline{r}}{\partial w}$.

Для того, щоб визначитися із цими координатами розглянемо відповідні одиничні вектори:

$$\overline{e}_u = \frac{1}{H_u}\cdot\left(\frac{\partial\overline{r}}{\partial u}\right); \qquad \overline{e}_v = \frac{1}{H_v}\cdot\left(\frac{\partial\overline{r}}{\partial v}\right); \qquad \overline{e}_w = \frac{1}{H_w}\cdot\left(\frac{\partial\overline{r}}{\partial w}\right). \tag{12.2}$$

Так як система координат (u,v,w) криволінійна, то ця трійка векторів змінює напрямок у просторі при переході із точки в точку, а самі вектори спрямовані по дотичних до координатних ліній. Якщо вектори базису взаємно перпендикулярні, то відповідна криволінійна система координат називається ортогональною. Введемо позначення

$$H_u = \left|\frac{\partial\overline{r}}{\partial u}\right|, \qquad H_v = \left|\frac{\partial\overline{r}}{\partial v}\right|, \qquad H_w = \left|\frac{\partial\overline{r}}{\partial w}\right|$$ — коефіцієнти *Ламе*.

Обчислимо їх для циліндричної та сферичної системи координат. У циліндричній системі координат $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} = \rho\cos\varphi\cdot\overline{i} + \rho\sin\varphi\cdot\overline{j} + z\cdot\overline{k}$.
Тоді

$$\frac{\partial\overline{r}}{\partial u} = \frac{\partial\overline{r}}{\partial\rho} = \overline{i}\cos\varphi + \overline{j}\sin\varphi; \quad \frac{\partial\overline{r}}{\partial v} = \frac{\partial\overline{r}}{\partial\varphi} = -\overline{i}\rho\sin\varphi + \overline{j}\rho\cos\varphi; \quad \frac{\partial\overline{r}}{\partial w} = \frac{\partial\overline{r}}{\partial z} = \overline{k}\,.$$

Звідси випливає, що

$$H_\rho = \left|\frac{\partial\overline{r}}{\partial\rho}\right| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1;$$

$$H_\varphi = \left|\frac{\partial\overline{r}}{\partial\varphi}\right| = \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = \rho; \quad H_w = \sqrt{1^2} = 1$$

Таким чином

$$\overline{e}_\rho = \frac{\partial\overline{r}}{\partial\rho}; \qquad \overline{e}_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{r}}{\partial\varphi}; \qquad \overline{e}_z = \frac{\partial\overline{r}}{\partial z}. \tag{12.3}$$

Якщо задано скалярне поле $\Phi = \Phi(u, v, w)$, тоді

$$\operatorname{grad}\Phi = \overline{e}_u \frac{1}{H_u} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \overline{e}_v \frac{1}{H_v} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \overline{e}_w \frac{1}{H_w} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial w}. \tag{12.4}$$

Відмінність від форми градієнта в декартових координатах визначається тим, що при переході від точки до точки простору змінюється не тільки функція, але й координатний базис.

У циліндричній системі:

$$\operatorname{grad}\Phi = \overline{e}_\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \overline{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \overline{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\overline{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\overline{e}_\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial w}\overline{e}_z$$ — градієнт поля в циліндричних координатах.

Нехай тепер задано векторне поле $\overline{a} = \overline{a}(u, v, w)$. Розглянемо тепер векторне поле в криволінійних координатах та знайдемо його дивергенцію

$$\overline{a} = a_u \overline{e}_u + a_v \overline{e}_v + a_w \overline{e}_w$$

$$\operatorname{div}\overline{a} = \frac{1}{H_u H_v H_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(a_u H_v H_w\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(a_v H_u H_w\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(a_w H_v H_u\right)\right) \tag{12.5}$$

та ротор

$$\operatorname{rot}\overline{a} = \nabla \times \overline{a} = \frac{1}{H_v H_w}\left(\frac{\partial\left(a_w H_w\right)}{\partial v} - \frac{\partial\left(a_v H_v\right)}{\partial w}\right)\overline{e}_u + \frac{1}{H_u H_w}\left(\frac{\partial\left(a_u H_u\right)}{\partial w} - \frac{\partial\left(a_w H_w\right)}{\partial u}\right)\overline{e}_u$$

$$+\frac{1}{H_u H_v}\left(\frac{\partial\left(a_v H_v\right)}{\partial u} - \frac{\partial\left(a_u H_u\right)}{\partial v}\right)\overline{e}_w. \tag{12.6}$$

§13. Коваріантне диференціювання

Розглянемо простір з уведеною криволінійною системою координат. Характерною рисою криволінійних систем координат є локальність базису, тобто в кожній точці простору свої базисні вектори. У результаті формули диференціювання в криволінійній системі координат відрізняються від формул диференціювання в декартової системі координат. Розглянемо ці відмінності на прикладах: візьмемо вектор $\overline{a}$ та запишемо його розклад

- у декартовому базисі — $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$
- у криволінійному базисі — $\bar{a} = a^1\bar{e}_1 + a^2\bar{e}_2 + a^3\bar{e}_3$.

Диференціал вектора у декартовому базисі має вигляд:

$$d\bar{a} = d\left(a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}\right) = d(a_x)\bar{i} + d(a_y)\bar{j} + d(a_z)\bar{k} \ ,$$

а у криволінійному: $d\bar{a} = \dfrac{d\bar{a}}{dx^k}dx^k$. Дня визначення диференціала вектора нам потрібні похідні $\dfrac{d\bar{a}}{dx^k}$, які називаються коваріантними похідними вектора

$$\frac{\partial\bar{a}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(a^j\bar{e}_j\right) = \frac{\partial a^j}{\partial x^k}\bar{e}_j + a^j\frac{\partial\bar{e}_j}{\partial x^k}. \qquad (13.1)$$

Так як криволінійний базис локальний, то похідні $\dfrac{\partial\bar{e}_j}{\partial x^k}$ відмінні від нуля. Неважко переконатися, що кожна з похідних є вектором, який можна розкласти по базису: $\dfrac{\partial\bar{e}_j}{\partial x^k} = \Gamma^i_{jk}\bar{e}_i$. Коефіцієнт розкладання коваріантної похідної базисного вектора по базису називається *символом Кристоффеля* або коефіцієнтом зв'язності простору. Тоді

$$\frac{\partial\bar{a}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(a^j\bar{e}_j\right) = \frac{\partial a^j}{\partial x^k}\bar{e}_j + a^j\left(\frac{\partial\bar{e}_j}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial a^j}{\partial x^k}\bar{e}_j + a^j\Gamma^l_{jk}\bar{e}_l$$

Зробимо заміну: $l \to j \quad j \to l$. Отримаємо

$$\frac{\partial\bar{a}}{\partial x^k} = \frac{\partial a^j}{\partial x^k}\bar{e}_j + a^l\Gamma^j_{lk}\bar{e}_j = \left(\frac{\partial a^j}{\partial x^k} + a^l\Gamma^j_{lk}\right)\bar{e}_j. \qquad (13.2)$$

Для декартових координат маємо, що $\dfrac{\partial\bar{a}}{\partial x^k} = \dfrac{\partial a_x}{\partial x}\bar{i} + \dfrac{\partial a_y}{\partial y}\bar{j} + \dfrac{\partial a_z}{\partial z}\bar{k}$.

Для криволінійних систем дістанемо

$$\frac{d\bar{a}}{dx^i} = \left(\frac{da^j}{dx^i} + a^l \Gamma^j_{li} \right) \bar{e}_j = \nabla_i \bar{a} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Отже, ми бачимо, що з'являється доданок $a^l \Gamma^j_{li}$, що обумовлено локальністю криволінійного базису.

Кожна із трьох отриманих похідних характеризує зміну вектора $\bar{a}$ й називається коваріантною похідною, тому що розкладання вектора виконується по основному базису.

Якщо взяти скалярну функцію, то видно, що її коваріантні похідні збігаються із частинними похідними функції φ. Нехай задано скалярне поле $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$. Тоді $\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = \nabla_k \varphi$ — для скалярної величини.

Розглянемо тензорне поле тензора другого рангу в криволінійній системі координат: $\mathrm{T} = \mathrm{T}^{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$. Тоді $d\mathrm{T} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x^k} dx_k$

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x^k} = \left(\frac{\partial \mathrm{T}^{ij}}{\partial x^k} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j + \mathrm{T}^{ij} \frac{\partial \bar{e}_i}{\partial x^k} \bar{e}_j + \mathrm{T}^{ij} \bar{e}_i \frac{\partial \bar{e}_j}{\partial x^k} \right) = \frac{\partial \mathrm{T}^{ij}}{\partial x^k} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j + \mathrm{T}^{ij} \Gamma^l_{ik} \bar{e}_l \otimes \bar{e}_j +$$

$$+ \mathrm{T}^{ij} \Gamma^s_{jk} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_s = \left(\frac{\partial \mathrm{T}^{ij}}{\partial x^k} + \mathrm{T}^{lj} \Gamma^i_{lk} + \mathrm{T}^{is} \Gamma^j_{sk} \right) \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$$

Символи Кристоффеля визначаються за допомогою компонентів метричного тензора і їхніх похідних:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{js}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} \right).$$

§14. Оператор Лапласа

У математичній фізиці широко використаються диференціальні оператори не тільки першого, але й другого порядку.

Таким диференціальним оператором другого порядку є оператор Лапласа.

Нехай дане скалярне поле $p = p(x, y, z)$.

Диференціальний оператор Лапласа визначається формулою:

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}. \tag{14.1}$$

Подання оператора Лапласа в декартових координатах:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

З урахуванням можливості використання криволінійних координат знайдемо інваріантне подання оператора Лапласа: $\Delta p = \operatorname{div}(\operatorname{grad} p) = \nabla^2 p$, тому що в декартових координатах

$$\operatorname{grad} p = \frac{\partial p}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\bar{k}; \quad \operatorname{div}\bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Далі $\operatorname{div}(\operatorname{grad} p) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \Delta p$,

тобто приходимо до оператору Лапласа.

У криволінійних координатах:

$$\bar{b} = \operatorname{grad} p = \bar{e}_u \underbrace{\frac{1}{H_u}\frac{\partial p}{\partial u}}_{b_u} + \bar{e}_v \underbrace{\frac{1}{H_v}\frac{\partial p}{\partial v}}_{b_v} + \bar{e}_w \underbrace{\frac{1}{H_w}\frac{\partial p}{\partial w}}_{b_w}. \tag{14.2}$$

Тоді

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} p) = \operatorname{div}\bar{b} = \frac{1}{H_u H_v H_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(b_u H_v H_w\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(b_v H_u H_w\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(b_w H_u H_v\right)\right)$$

$$= \frac{1}{H_u H_v H_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial p}{\partial u}\cdot\frac{H_v H_w}{H_u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial p}{\partial v}\cdot\frac{H_u H_w}{H_v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial p}{\partial w}\cdot\frac{H_u H_v}{H_w}\right)\right) \tag{14.3}$$

У циліндричній системі координат маємо: $H_u = H_\rho = 1$; $H_v = H_\varphi = \rho$; $H_w = H_z = 1$. Тоді дістанемо, що

$$\Delta p=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\cdot\rho\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial p}{\partial\varphi}\cdot\frac{1}{\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\cdot\rho\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\rho}\left[\rho\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial\rho^2}+\frac{\partial p}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}+\rho\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right]=\frac{\partial^2 p}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial\rho}$$

Отже, запис оператора Лапласа в циліндричних координатах такий:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}. \qquad (14.4)$$

У сферичних координатах $u=r, v=\varphi, w=\theta$. Звідси маємо

$$H_u=H_r=1; \quad H_v=H_\varphi=r\sin\varphi; \quad H_w=H_\theta=r,$$

$$\Delta p=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\cdot r^2\sin\theta\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial p}{\partial\varphi}\cdot\frac{1}{\sin\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial p}{\partial\theta}\cdot\sin\theta\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}\cdot r^2\sin\theta+2r\sin\theta\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial\theta^2}\cdot\sin\theta+\cos\theta\frac{\partial p}{\partial\theta}\right]=$$

$$=\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial p}{\partial\theta}\cdot ctg\theta$$

Отже, запис оператора Лапласа в сферичних координатах має вид:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot ctg\theta\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}. \qquad (14.5)$$

§15. Інтегральні теореми векторного й тензорного аналізу

15.1. Циркуляція вектора. Теорема Стокса

Нехай в області V простору задане векторне поле: $\overline{a}=\overline{a}(\overline{r},t)$, де момент часу t виступає як параметр і $\overline{r}=x\cdot\overline{i}+y\cdot\overline{j}+z\cdot\overline{k}$. Нехай усередині області V розташований контур L і поверхня S, обмежена цим контуром (рис. 11).

Розглянемо також контур $l\subset L$.

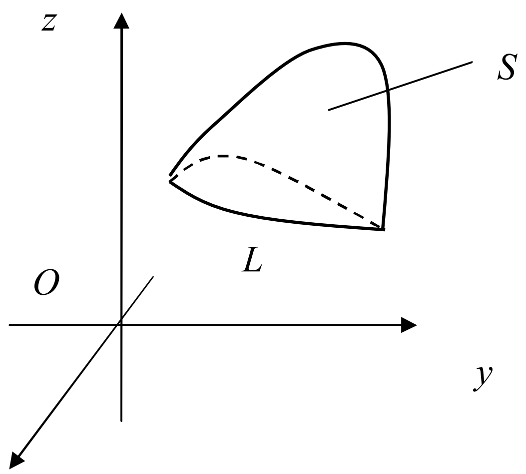


Рис. 11

Циркуляцією вектора $\overline{a}$ по контуру l називається криволінійний інтеграл

$$\int_l \overline{a} \cdot d\overline{r} = \int_l a_x dx + a_y dy + a_z dz. \qquad (15.1)$$

Відома теорема векторного аналізу, що встановлює зв'язок між поверхневими і криволінійними інтегралами.

Теорема Стокса: Циркуляція вектора $\overline{a}$ по замкненому контуру L дорівнює потоку $\operatorname{rot}\overline{a}$ даного вектора через поверхню S із границею – контуром L (рис 11):

$$\int_L \overline{a} \cdot d\overline{r} = \iint_S \overline{n} \cdot \left(\nabla \times \overline{a}\right) ds = \iint_S \overline{n} \cdot \operatorname{rot} \overline{a} ds\,. \qquad (15.2)$$

Окремий випадок: коли контур і поверхня плоскі (рис. 12). Тоді $\overline{a} = a_x \overline{i} + a_y \overline{j} = P(x, y)\overline{i} + Q(x, y)\overline{j}$, $\overline{n} = \overline{k}$ — зовнішня нормаль.

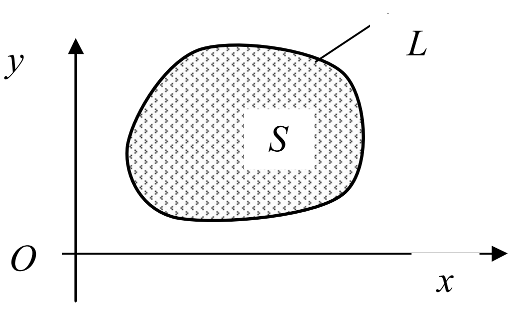


Рис. 12

Отже,

$$\int\limits_L \overline{a}\cdot d\overline{r} = \oint\limits_L Pdx + Qdy\,. \tag{15.3}$$

Обчислимо у цьому випадку ротор векторного поля. Маємо

$$\nabla\times\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = -\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial z}}_{0}\cdot\overline{i} + \underbrace{\frac{\partial P}{\partial z}}_{0}\cdot\overline{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot\overline{k}.$$

Тоді $\mathrm{rot}\,\overline{a} = \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot\overline{k}$, $\quad ds = dx\,dy$. Теорема Стокса для площини

$$\iint\limits_S \overline{n}\cdot\mathrm{rot}\,\overline{a}\;ds = \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Для плоскої області S й її контуру L з теореми Стокса випливає

формула Гріна:

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_S \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) dx\,dy. \tag{15.4}$$

15.2. Теорема Остроградського - Гаусса

Нехай усередині області V простору з поверхнею S задане векторне поле: $\overline{a} = \overline{a}(\overline{r}, t)$ (рис.13).

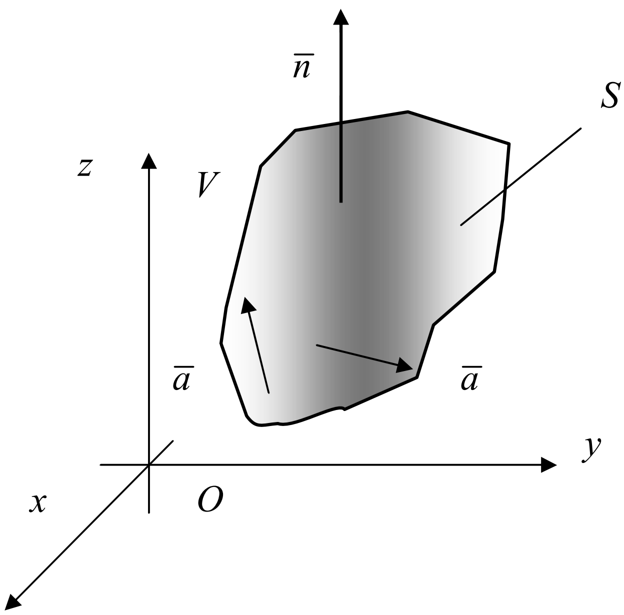


Рис. 13

Буде вірною наступна теорема.

Теорема Остроградського – Гаусса.

Інтеграл від дивергенції вектора $\overline{a}$ по об'єму V дорівнює потоку вектора $\overline{a}$ через поверхню S, що обмежує об'єм V ($\overline{n}$ – вектор зовнішньої нормалі).

$$\iiint\limits_V div\overline{a}\; dv = \oiint\limits_S \overline{n}\cdot\overline{a}\, ds\,. \qquad (15.5)$$

Якщо розписати формулу (15.5) більш докладніше, вона прийме вид

$$\iiint\limits_V\left(\frac{da_x}{dx}+\frac{da_y}{dy}+\frac{da_z}{dz}\right)dx\,dy\,dz = \oiint\limits_S\left(a_x n_x + a_y n_y + a_z n_z\right)ds\,.$$

Зауваження.

Теорема Остроградського – Гаусса поширюється й на тензори більш високого рангу (чим вектори).

Нехай, наприклад, усередині об'єму V задане тензорне поле, тензора другого рангу:

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}(\overline{r}, t)$$

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}^{ij}\overline{e}_i \otimes \overline{e}_j$$

Тоді формулювання теореми Остроградського – Гаусса має вигляд:

$$\iiint\limits_V \underbrace{\nabla\cdot\mathrm{T}}_{\mathrm{divT}}dv = \oiint\limits_S \overline{n}\cdot\mathrm{T}ds\,. \qquad (15.5)$$

§16. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Дано тензор напружень матрицею компонентів

$$\mathrm{T}_\sigma = \begin{pmatrix} 15 & -8 & 10 \\ -8 & -10 & 5 \\ 10 & 5 & 25 \end{pmatrix}, \text{ МПа.}$$

Знайти кульову T_0 та девіаторну D_σ складові тензора.

Розв'язання: Розклад тензора на кульову та девіаторну складові має вигляд $\mathrm{T}_\sigma = \mathrm{T}_0 + \mathrm{D}_\sigma$, де $\mathrm{T}_0 = \sigma_0 \mathrm{E}$, $\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}\right)$, та

$$D_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}-\sigma_0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{11}-\sigma_0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\sigma_0 \end{pmatrix}.$$

Тоді маємо $\sigma_0 = \frac{1}{3}(15-10+25)=10$, МПа.

$$T_0 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \text{— кульовий тензор,} \quad D_{\sigma} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 10 \\ -8 & -20 & 5 \\ 10 & 5 & 15 \end{pmatrix} \text{— девіатор.}$$

Наведемо тепер розв'язок цієї задачі за допомогою пакету MathCAD.

$\text{ORIGIN} := 1$

$i := 1..3 \qquad j := 1..3$

Тензор напружень

Середня напруга

$$T\sigma := \begin{pmatrix} 15 & -8 & 10 \\ -8 & -10 & 5 \\ 10 & 5 & 25 \end{pmatrix} \qquad T\sigma 0 := \frac{1}{3}\cdot\sum_{i=1}^{3} T\sigma_{i,i} \qquad T\sigma 0 = 10$$

Девіатор напружень (тензорний запис)

$$DT\sigma_{i,j} := T\sigma_{i,j} - \delta(i,j)\cdot T\sigma 0 \qquad DT\sigma = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 10 \\ -8 & -20 & 5 \\ 10 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

Кульовий тензор (матричний запис)

$$T0_{i,j} := \delta(i,j)\cdot T\sigma 0 \qquad T0 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Девіатор напружень (матричний запис)

$$DT\sigma := T\sigma - T0 \qquad DT\sigma = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 10 \\ -8 & -20 & 5 \\ 10 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

З прикладу видно, що тензорний запис більш коротший та простіший, ніж матричний. Існує багато посібників до роботи з пакетом MathCAD, наприклад [6].

Приклад 2. У точці M тіла тензор напружень має матрицю компонентів

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 18 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ МПа.}$$

Для площадки, що задана нормаллю $\bar{n} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{k}$, знайти: а) вектор напруження $\bar{\sigma}$, б) нормальну σ_{nn} і дотичну $\sigma_{n\tau}$ складові $\bar{\sigma}$, повне напруження σ_n.

Розв'язання: Вектор напруження на обраній площадці обчислюється за формулою $[7]$ $\bar{\sigma} = \mathrm{T} \cdot \bar{n}$, або за співвідношеннями Коші

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \mathrm{T}_{11}n_1 + \mathrm{T}_{12}n_2 + \mathrm{T}_{13}n_3 \\ \sigma_2 &= \mathrm{T}_{21}n_1 + \mathrm{T}_{22}n_2 + \mathrm{T}_{23}n_3 . \\ \sigma_3 &= \mathrm{T}_{31}n_1 + \mathrm{T}_{32}n_2 + \mathrm{T}_{33}n_3 \end{aligned}$$

Маємо

$$\sigma_1 = 18 \cdot 0 + 6 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}, \text{ МПа.}$$

$$\sigma_2 = 6 \cdot 0 + 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}, \text{ МПа.}$$

$$\sigma_1 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ МПа.}$$

Вектор напруження

$$\bar{\sigma} = -3\sqrt{2}\,\bar{i} - \sqrt{2}\,\bar{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{k}, \text{ МПа.}$$

Нормальне напруження на площадці

$$\sigma_{nn} = \bar{\sigma} \cdot \bar{n} = \sigma_1 n_1 + \sigma_2 n_2 + \sigma_3 n_3 .$$

Повне напруження на площадці

$$\sigma_n = |\overline{\sigma}| = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}\,.$$

Дотичне напруження на площадці

$$\sigma_{n\tau} = \sqrt{\sigma_n^2 - \sigma_{nn}^2}\,.$$

Остаточно маємо

$$\sigma_{nn} = \frac{3}{2} = 1{,}5\,\text{МПа},\ \sigma_n = \sqrt{20{,}5} \approx 4{,}53\,\text{МПа},\ \sigma_{n\tau} = \sqrt{18{,}25} \approx 4{,}27\,\text{МПа}.$$

$$\mathrm{T} := \begin{pmatrix} 18 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathrm{MPa} \qquad \mathrm{n} := \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\sigma := \mathrm{T}\cdot\mathrm{n} \qquad \sigma \rightarrow \begin{pmatrix} -3\cdot\sqrt{2}\cdot\mathrm{MPa} \\ -\sqrt{2}\cdot\mathrm{MPa} \\ \frac{\sqrt{2}\cdot\mathrm{MPa}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\sigma\mathrm{nn} := \sigma\cdot\mathrm{n} = 1.5\,\mathrm{MPa} \qquad \sigma\mathrm{n} := |\sigma| = 4.528\,\mathrm{MPa}$$

$$\sigma\mathrm{n}\tau := \sqrt{\sigma\mathrm{n}^2 - \sigma\mathrm{nn}^2} = 4.272\,\mathrm{MPa}$$

Приклад 3. Тензор питомої електропровідності кристала дорівнює (в одиницях $10^{-7}\,Ом^{-1}м^{-1}$):

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3\sqrt{3} \\ 0 & -3\sqrt{3} & 8 \end{bmatrix}.$$

Для орта вектора напруженості електричного поля $\overline{n} = \frac{1}{2}\overline{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{k}$ (E = 2В/м)

знайти: а) вектор $\overline{j}$ густини струму та тензор питомого опору P.

Розв'язання. Вектор напруженості електричного поля

$$\overline{E} = E \cdot \overline{n} = 2\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(1; 0; \sqrt{3}\right), \text{ або } \overline{E} = \overline{i} + \sqrt{3}\,\overline{k}.$$

Вектор густини струму $\overline{j} = \mathrm{T} \cdot \overline{E}$, тоді

$$\mathrm{T} \cdot \overline{E} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3\sqrt{3} \\ 0 & -3\sqrt{3} & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \\ 8\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

або $\overline{j} = 15\overline{i} + 9\overline{j} + 8\sqrt{3}\overline{k}$ (в одиницях $10^{-7}\,ам^{-2}$).

Тензор питомого опору $P = \mathrm{T}^{-1}$ за умови $P \cdot \mathrm{T} = E$, тоді

$$P = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}, \quad \text{де } \Delta = \begin{vmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3\sqrt{3} \\ 0 & -3\sqrt{3} & 8 \end{vmatrix} = 1245$$

(в одиницях $10^{-21}Ом^{-3}м^{-3}$). Знайдемо елементи A_{ij} матриці P:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 7 & 3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 8 \end{vmatrix} = 83; \quad A_{12} = 0; \quad A_{13} = 0; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3\sqrt{3} & 8 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 120; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 15 & 0 \\ 0 & -3\sqrt{3} \end{vmatrix} = 45\sqrt{3}; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 3\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{3} \end{vmatrix} = -45\sqrt{3}; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 105$$

в одиницях $10^{-4}Ом^{-2}м^{-2}$.

Остаточно маємо $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{83} & -\frac{3\sqrt{3}}{83} \\ 0 & \frac{3\sqrt{3}}{83} & \frac{7}{83} \end{bmatrix}$ в одиницях $10^{7}\,Ом \cdot м$.

$$\mathrm{Tk} := \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3\sqrt{3} \\ 0 & -3\sqrt{3} & 8 \end{pmatrix} 10^{-7}\mathrm{ohm}^{-1}\mathrm{m}^{-1} \qquad \mathrm{n} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^{T} \qquad \mathrm{E0} := 2\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

$$\mathrm{E} := \mathrm{E0}\cdot\mathrm{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1.732 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}\cdot\mathrm{kg}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}^3}$$

$$\mathrm{j} := \mathrm{Tk}\cdot\mathrm{E} \qquad \mathrm{j} = \begin{pmatrix} 1.5\times 10^{-6} \\ 9\times 10^{-7} \\ 1.386\times 10^{-6} \end{pmatrix} \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$$

$$\mathrm{P} := \mathrm{Tk}^{-1}$$

$$\mathrm{P} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2\times 10^{6}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{ohm}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8\times 10^{7}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{ohm}}{83} & -\frac{3\times 10^{7}\cdot\sqrt{3}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{ohm}}{83} \\ 0 & \frac{3\times 10^{7}\cdot\sqrt{3}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{ohm}}{83} & \frac{7\times 10^{7}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{ohm}}{83} \end{pmatrix}$$

Приклад 4. Дано $|\bar{e}_1| = 1,5$; $|\bar{e}_2| = \sqrt{2}$ та кут $\varphi = \pi/4$ основного базису (рис. 14), розклад вектора $\bar{b} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$ в основному базисі. Знайти: 1) взаємний базис $\bar{e}^1, \bar{e}^2$; 2) метричний тензор. Встановити зв'язок контра- і коваріантних компонентів вектора $\bar{b}$.

Розв'язання. За умовами задачі $\bar{b} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 = B^1\bar{e}_1 + B^2\bar{e}_2$. Тобто $B^1 = 1$; $B^2 = 2$. У взаємному базисі маємо $\bar{b} = B_1\bar{e}^1 + B_2\bar{e}^2$, причому $\bar{e}^1 \perp \bar{e}_2$, $\widehat{\bar{e}^1\bar{e}_1} = \pi/4$, $\bar{e}^2 \perp \bar{e}_1$, $\widehat{\bar{e}^2\bar{e}_2} = \pi/4$. Тоді

$$|\bar{e}^1| = \frac{1}{|\bar{e}_1|\cdot\cos\frac{\pi}{4}} \approx \frac{1}{1,5\cdot 0,707} \approx 0,94 \text{ та } |\bar{e}^2| = \frac{1}{|\bar{e}_2|\cdot\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}/2} = 1.$$

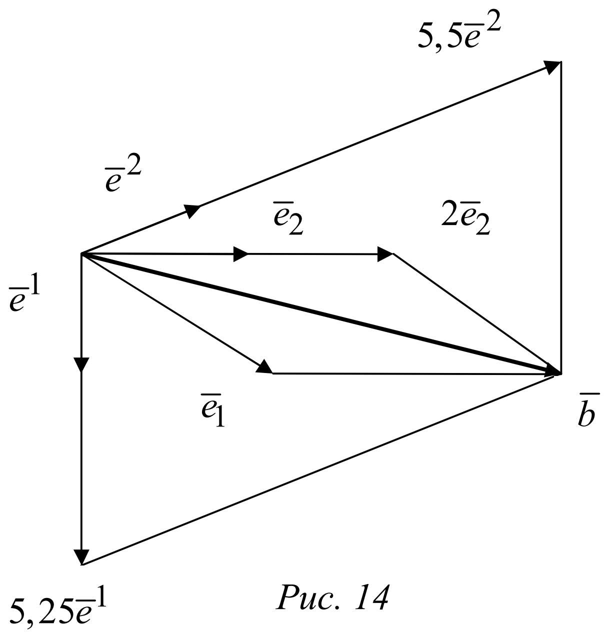


Рис. 14

Знаходимо компоненти метричного тензора

$$g_{11} = \overline{e}_1 \cdot \overline{e}_1 = |\overline{e}_1|^2 = 1{,}5^2 = 2{,}25;$$

$$g_{12} = g_{21} = \overline{e}_1 \cdot \overline{e}_2 = |\overline{e}_1| \cdot |\overline{e}_2| \cos\frac{\pi}{4} =$$

$$= 1{,}5 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1{,}5;$$

$$g_{22} = \overline{e}_2 \cdot \overline{e}_2 = |\overline{e}_2|^2 = \sqrt{2}^2 = 2.$$

Коваріантні компоненти вектора $\overline{b}$ знаходимо за формулами:

$$B_1 = g_{11}B^1 + g_{12}B^2; \quad B_2 = g_{21}B^1 + g_{22}B^2.$$

Після підстановки відповідних значень маємо:

$$B_1 = 2{,}25 \cdot 1 + 1{,}5 \cdot 2 = 5{,}25; \quad B_2 = 1{,}5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5{,}5.$$

Остаточно отримаємо

$$\overline{b} = B_1\overline{e}^1 + B_2\overline{e}^2 = 5{,}25\overline{e}^1 + 5{,}5\overline{e}^2.$$

Модульна контрольна робота

Основи векторного та тензорного аналізу

Варіант № 1

Перший рівень. У завданнях 1 — 7 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку(листі) відповідей.

1. Вектор $\vec{e}^3$ взаємного базису визначається за формулою

а	б	в	г
$\dfrac{\vec{e}^1\times\vec{e}_2}{\vec{e}^1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)}$	$\dfrac{\vec{e}^2\times\vec{e}_1}{\vec{e}^1\cdot(\vec{e}^2\times\vec{e}_3)}$	$\dfrac{\vec{e}^1\times\vec{e}^2}{\vec{e}^1\cdot(\vec{e}^2\times\vec{e}^3)}$	$\dfrac{\vec{e}_1\times\vec{e}_2}{\vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)}$

2. Знайти значення $\delta_{2j}\cdot A_{ij}$

а	б	в	г
$A_{11}+A_{22}-A_{33}$	$A_{11}+A_{22}+A_{33}$	A_{i2}	$-A_{11}-A_{22}-A_{33}$

3. Піднімання індексів компонентів T_{ik} тензору другого рангу T виконується за формулами

а	б	в	г
$T^{ml}=g^{ik}T_{ik}$	$T^{ij}=g^{im}g_{jk}T_{mk}$	$T^{jm}=g^{ji}g^{mk}T_{ik}$	$T^{ij}=g^{ik}T_{jk}$

4. Знайти компоненту T'_{11} тензору T з матрицею $\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & 5 & 1\\ -2 & 1 & 4\end{bmatrix}$, якщо система координат $Ox'_1x'_2x'_3$ повернута відносно $Ox_1x_2x_3$ на кут $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ відносно осі Ox_1.

а	б	в	г
2	$2\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	6

5. Знайти алгебраїчну суму компонентів $4C_{1122}-3C_{2121}$ добутку $A\otimes B$ тензорів з матрицями $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 10 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & 3 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 6 & -1\end{bmatrix}$

а	б	в	г
0	12	– 10	– 18 ?

6. Згорнути тензор T_{ijkl} за останніх двох індексів.

а	б	в	г
$T_{i1k1}+T_{i2k2}-T_{i3k3}$	$T_{i111}+T_{i222}+T_{i333}$	$T_{ij11}+T_{ij22}+T_{ij33}$	$T_{11}+T_{22}+T_{33}$

7. Обрати формулу для знаходження дивергенції векторного поля $\vec{a}=u\cdot \operatorname{grad} u$

а	б	в	г
$(\nabla u)^2+0{,}5u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2-u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2+u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2-2u\cdot\Delta u$

Розв'язання задач 8-10 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні та математичні дії з поясненнями. Якщо потрібно проілюструйте розв'язання завдань схемами. Перенесіть відповідь до бланку(листу) відповідей.

<u>Другий рівень</u>.

8. Знайти головний напрямок $\vec{n}$ тензора T з матрицею T_{ij}, який відповідає власному значенню k: $T=\begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $k=-2$.

9. Використовуючи теорему Остроградського – Гаусса знайти потік векторного поля $\vec{a}=2x\vec{i}+(3-y)\vec{j}+4z\vec{k}$ через поверхню призми, яка обмежена площинами: $x=0$; $x=a$; $y=0$; $y=c$; $z=0$; $\frac{y}{c}+\frac{z}{d}=1$.

<u>Третій рівень</u>.

10. Для векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(x_1,x_2,x_3)$ знайти градієнт $\nabla\otimes\vec{a}$, дивергенцію $\nabla\cdot\vec{a}$ і ротор $\nabla\times\vec{a}$ векторного поля $\vec{a}=x_1^2\vec{e}_1+2x_1x_2\vec{e}_2+x_1x_3^2\vec{e}_3$.

Модульна контрольна робота

Основи векторного та тензорного аналізу

Варіант № 2

Перший рівень. У завданнях 1 — 7 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку(листі) відповідей.

1. Вектор $\vec{e}^1$ взаємного базису визначається за формулою

а	б	в	г
$\dfrac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}{\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)}$	$\dfrac{\vec{e}^2 \times \vec{e}_3}{\vec{e}^1 \cdot (\vec{e}^2 \times \vec{e}_3)}$	$\dfrac{\vec{e}^2 \times \vec{e}^3}{\vec{e}^1 \cdot (\vec{e}^2 \times \vec{e}^3)}$	$\dfrac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)}$

2. Знайти значення $\delta_{i1} \cdot \delta_{j2} \cdot A_{ij}$

а	б	в	г
A_{21}	$A_{11} + A_{12} + A_{13}$	$A_{12} + A_{13} + A_{11}$	A_{12}

3. Опускання індексів компонентів T^{ij} тензору другого рангу T виконується за формулами

а	б	в	г
$T_{ij} = g_{ik} T^{ij}$	$T_{ij} = g^{ik} g_{jm} T^{mk}$	$T_{km} = g_{ki} g_{mj} T^{ij}$	$T_{ij} = g^{ik} T^{jk}$

4. Знайти компоненту T'_{13} тензору T з матрицею $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, якщо система координат $Ox'_1x'_2x'_3$ повернута відносно $Ox_1x_2x_3$ на кут $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ відносно осі Ox_1.

а	б	в	г
$1{,}5\sqrt{2}$	2	$-\sqrt{2}$	3

5. Знайти алгебраїчну суму компонентів $C_{2112} - 3C_{2333}$ добутку $A \otimes B$ тензорів з матрицями $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

а	б	в	г
10	0	– 15	23

6. Згорнути тензор T^{klm} за останніх двох індексів.

а	б	в	г
$\mathrm{T}^{k11}+\mathrm{T}^{k22}+\mathrm{T}^{k33}$	$\mathrm{T}^{k11}+\mathrm{T}^{k22}-\mathrm{T}^{k33}$	$\mathrm{T}^{111}+\mathrm{T}^{222}+\mathrm{T}^{333}$	$\mathrm{T}^{11k}-\mathrm{T}^{22k}+\mathrm{T}^{33k}$

7. Обрати формулу для знаходження дивергенції векторного поля $\vec{a}=u\cdot \mathrm{grad}\,u$

а	б	в	г
$(\nabla u)^2+0{,}5u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2-u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2+u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2-2u\cdot\Delta u$

Розв'язання задач 8-10 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні та математичні дії з поясненнями. Якщо потрібно проілюструйте розв'язання завдань схемами. Перенесіть відповідь до бланку(листу) відповідей.

Другий рівень.

8. Знайти головний напрямок $\vec{n}$ тензора T з матрицею T_{ij}, який відповідає власному значенню k: $\mathrm{T}=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$, $k=1$.

9. Використовуючи теорему Остроградського – Гаусса знайти потік векторного поля $\vec{a}=5\vec{i}+2y\vec{j}-3z\vec{k}$ через поверхню призми, яка обмежена площинами:

$x=0$; $x=a$; $y=0$; $y=b$; $z=0$; $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1$.

Третій рівень.

10. Для векторного поля $\overline{a}=\overline{a}(x_1,x_2,x_3)$ знайти градієнт $\nabla\otimes\vec{a}$, дивергенцію $\nabla\cdot\vec{a}$ і ротор $\nabla\times\vec{a}$ векторного поля $\vec{a}=(x_1+x_2)\vec{e}_1+\sqrt{x_1x_2}\,\vec{e}_2+x_3^3\vec{e}_3$.

Модульна контрольна робота

Основи векторного та тензорного аналізу

Варіант № 3

Перший рівень. У завданнях 1 — 7 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку(листі) відповідей.

1. Вектор $\vec{e}_1$ основного базису визначається за формулою

а	**б**	**в**	**г**
$\dfrac{\vec{e}^1 \times \vec{e}_2}{\vec{e}^1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)}$	$\dfrac{\vec{e}^2 \times \vec{e}^3}{\vec{e}^1 \cdot (\vec{e}^2 \times \vec{e}^3)}$	$\dfrac{\vec{e}^1 \times \vec{e}^2}{\vec{e}^1 \cdot (\vec{e}^2 \times \vec{e}^3)}$	$\dfrac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)}$

2. Знайти значення $\delta_{ij} \cdot A_{ijk}$

а	**б**	**в**	**г**
$A_{11k} + A_{22k} + A_{33k}$	$A_{1kk} + A_{2kk} + A_{3kk}$	$A_{12k} + A_{23k} + A_{31k}$	$A_{11k} - A_{22k} - A_{33k}$

3. Перекидання індексів компонентів $\mathrm{T}_m^{\cdot k}$ тензору другого рангу Т виконується за формулами

а	**б**	**в**	**г**
$\mathrm{T}_{\cdot j}^{i} = g^{ik}\mathrm{T}_j^{k}$	$\mathrm{T}_{\cdot j}^{i} = g^{im}g_{jk}\mathrm{T}_m^{\cdot k}$	$\mathrm{T}_{\cdot j}^{i} = g^{ik}g^{jm}\mathrm{T}_m^{\cdot k}$	$\mathrm{T}_{\cdot j}^{i} = g^{ik}\mathrm{T}_k^{\cdot j}$

4. Знайти компоненту T'_{22} тензору Т з матрицею $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, якщо система координат $Ox'_1x'_2x'_3$ повернута відносно $Ox_1x_2x_3$ на кут $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ відносно осі Ox_1.

а	**б**	**в**	**г**
2	$2\sqrt{2}$	0	3

5. Знайти алгебраїчну суму компонентів $\alpha C_{1133} + \beta C_{1223}$ добутку $A \otimes B$ тензорів з матрицями $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$.

а	**б**	**в**	**г**
$-\alpha + 2\beta$	$3\alpha - 2\beta$	$-3\alpha + \beta$	$-3\alpha + 2\beta$

6. Згорнути тензор T_{ij} за останніх двох індексів.

а	**б**	**в**	**г**
$T_{i11}+T_{i22}+T_{i33}$	$T_{11}-T_{22}+T_{33}$	$T_{i1}+T_{i2}+T_{i3}$	$T_{11}+T_{22}+T_{33}$

7. Обрати формулу для знаходження дивергенції векторного поля $\vec{a}=u\cdot\operatorname{grad}u$

а	**б**	**в**	**г**
$(\nabla u)^2+0{,}5u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2-u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2+u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2-2u\cdot\Delta u$

Розв'язання задач 8-10 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні та математичні дії з поясненнями. Якщо потрібно проілюструйте розв'язання завдань схемами. Перенесіть відповідь до бланку(листу) відповідей.

Другий рівень.

8. Знайти головний напрямок $\vec{n}$ тензора T з матрицею T_{ij}, який відповідає власному значенню k: $T=\begin{bmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{bmatrix}$, $k=0$.

9. Використовуючи теорему Остроградського – Гаусса знайти потік векторного поля $\vec{a}=(2+3x)\vec{i}+6\vec{j}+(z-2)\vec{k}$ через поверхню призми, яка обмежена площинами: $x=a$; $x=b$; $y=0$; $y=c$; $z=0$; $\dfrac{y}{c}+\dfrac{z}{d}=1$.

Третій рівень.

10. Для векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(x_1,x_2,x_3)$ знайти градієнт $\nabla\otimes\vec{a}$, дивергенцію $\nabla\cdot\vec{a}$ і ротор $\nabla\times\vec{a}$ векторного поля $\vec{a}=(x_1^2+x_2^2)\vec{e}_1-x_2\vec{e}_2+x_3\sqrt{x_1}\,\vec{e}_3$.

Модульна контрольна робота

Основи векторного та тензорного аналізу

Варіант № 4

Перший рівень. У завданнях 1 — 7 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку(листі) відповідей.

1. Вектор $\vec{e}^2$ взаємного базису визначається за формулою

а	б	в	г
$\dfrac{\vec{e}^1\times\vec{e}_2}{\vec{e}^1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)}$	$\dfrac{\vec{e}^2\times\vec{e}_1}{\vec{e}^1\cdot(\vec{e}^2\times\vec{e}_3)}$	$\dfrac{\vec{e}^1\times\vec{e}^2}{\vec{e}^1\cdot(\vec{e}^2\times\vec{e}^3)}$	$\dfrac{\vec{e}_3\times\vec{e}_1}{\vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)}$

2. Знайти значення $\delta_{ij}\cdot a_i\cdot a_j$

а	б	в	г
$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$	$a_1^2+a_2^2+a_3^2$	$a_1a_2-a_2a_3+a_3a_1$	$a_1{}^2-a_2{}^2+a_3{}^2$

3. Опускання індексів компонентів T^{km} тензору другого рангу T виконується за формулами

а	б	в	г
$T_{ij}=g^{ik}T^{jk}$	$T_{ij}=g_{ik}g_{jm}T^{mk}$	$T_{ij}=g^{ik}g^{jm}T^{km}$	$T_{ij}=g_{ik}T^{jk}$

4. Знайти компоненту T'_{31} тензору T з матрицею $\begin{bmatrix}1&3&2\\3&5&1\\-2&1&4\end{bmatrix}$, якщо система координат $Ox_1'x_2'x_3'$ повернута відносно $Ox_1x_2x_3$ на кут $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ відносно осі Ox_1.

а	б	в	г
2	$-0{,}5\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	3

5. Знайти алгебраїчну суму компонентів $3C_{1212}+4C_{2112}$ добутку $A\otimes B$ тензорів з матрицями $A=\begin{bmatrix}3&2&3\\-1&0&1\\1&10&-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5&3&2\\-1&0&1\\2&6&-1\end{bmatrix}$

а	б	в	г
– 30	6	12	– 10

6. Згорнути тензор $T_{ij}^{\cdot\cdot k}$ за останніх двох індексів.

а	б	в	г
$T_{i1}^{\cdot 1} + T_{i2}^{\cdot 2} + T_{i3}^{\cdot 3}$	$T_{i1}^{\cdot 1} - T_{i2}^{\cdot 2} + T_{i3}^{\cdot 3}$	$T_{i11} + T_{i22} + T_{i33}$	$T_{21}^{\cdot 1} + T_{22}^{\cdot 2} + T_{23}^{\cdot 3}$

7. Обрати формулу для знаходження дивергенції векторного поля $\vec{a} = u \cdot \mathrm{grad}\, u$

а	б	в	г
$(\nabla u)^2 + 0{,}5u \cdot \Delta u$	$(\nabla u)^2 - u \cdot \Delta u$	$(\nabla u)^2 + u \cdot \Delta u$	$(\nabla u)^2 - 2u \cdot \Delta u$

Розв'язання задач 8-10 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні та математичні дії з поясненнями. Якщо потрібно проілюструйте розв'язання завдань схемами. Перенесіть відповідь до бланку(листу) відповідей.

Другий рівень.

8. Знайти головний напрямок $\vec{n}$ тензора T з матрицею T_{ij}, який відповідає власному значенню k: $T = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$, $k = 7$.

9. Використовуючи теорему Остроградського – Гаусса знайти потік векторного поля $\vec{a} = -x\vec{i} + 2(x+y)\vec{j} + 3z\vec{k}$ через поверхню призми, яка обмежена площинами: $x = 0$; $x = a$; $y = 0$; $z = c$; $z = 0$; $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

Третій рівень.

10. Для векторного поля $\overline{a} = \overline{a}(x_1, x_2, x_3)$ знайти градієнт $\nabla \otimes \vec{a}$, дивергенцію $\nabla \cdot \vec{a}$ і ротор $\nabla \times \vec{a}$ векторного поля $\vec{a} = \sqrt[3]{x_1}\,\vec{e}_1 + (x_1^2 - x_2^2)\vec{e}_2 - x_3^2\vec{e}_3$.

Модульна контрольна робота

Основи векторного та тензорного аналізу

Варіант № 5

Перший рівень. У завданнях 1 — 7 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку(листі) відповідей.

1. Вектор $\vec{e}_3$ основного базису визначається за формулою

а	б	в	г
$\dfrac{\vec{e}^1\times\vec{e}_2}{\vec{e}^1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)}$	$\dfrac{\vec{e}^2\times\vec{e}_1}{\vec{e}^1\cdot(\vec{e}^2\times\vec{e}_3)}$	$\dfrac{\vec{e}^1\times\vec{e}^2}{\vec{e}^1\cdot(\vec{e}^2\times\vec{e}^3)}$	$\dfrac{\vec{e}_1\times\vec{e}_2}{\vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)}$

2. Знайти значення $\delta_{ij}\cdot a_i\cdot b_j$

а	б	в	г
$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$	$3a_ib_i$	$a_1b_1-a_2b_2+a_3b_3$	$a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1$

3. Перекидання індексів компонентів $T^{k}_{.m}$ тензору другого рангу Т виконується за формулами

а	б	в	г
$T_i^{\cdot j}=g^{ik}T^{j}_{.k}$	$T_i^{\cdot j}=g^{ik}g_{jm}T^{k}_{.m}$	$T_i^{\cdot j}=g_{ik}g^{jm}T^{k}_{.m}$	$T^{i}_{.j}=g^{ik}T_k^{\cdot j}$

4. Знайти компоненту T'_{33} тензору Т з матрицею $\begin{bmatrix}1&3&2\\3&5&1\\-2&1&4\end{bmatrix}$, якщо система координат $Ox_1'x_2'x_3'$ повернута відносно $Ox_1x_2x_3$ на кут $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ відносно осі Ox_1.

а	б	в	г
4	$1{,}2\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	3

5. Знайти алгебраїчну суму компонентів $-C_{2233}+3C_{3113}$ добутку $A\otimes B$ тензорів з матрицями $A=\begin{bmatrix}3&2&3\\-1&0&1\\1&10&-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5&3&2\\-1&0&1\\2&6&-1\end{bmatrix}$

а	б	в	г
4	12	–3	6

6. Згорнути тензор $\mathrm{T}^{i}_{\cdot jk}$ за останніх двох індексів.

а	б	в	г
$\mathrm{T}_{i11}+\mathrm{T}_{i22}+\mathrm{T}_{i33}$	$\mathrm{T}^{i}_{\cdot 11}+\mathrm{T}^{i}_{\cdot 22}+\mathrm{T}^{i}_{\cdot 33}$	$\mathrm{T}^{i}_{\cdot 11}-\mathrm{T}^{i}_{\cdot 22}+\mathrm{T}^{i}_{\cdot 33}$	$\mathrm{T}^{1}_{\cdot 11}+\mathrm{T}^{2}_{\cdot 22}+\mathrm{T}^{3}_{\cdot 33}$

7. Обрати формулу для знаходження дивергенції векторного поля $\vec{a}=u\cdot \mathrm{grad}\,u$

а	б	в	г
$(\nabla u)^2+0{,}5u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2-u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2+u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2-2u\cdot\Delta u$

Розв'язання задач 8-10 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні та математичні дії з поясненнями. Якщо потрібно проілюструйте розв'язання завдань схемами. Перенесіть відповідь до бланку(листу) відповідей.

<u>Другий рівень</u>.

8. Знайти головний напрямок $\vec{n}$ тензора T з матрицею T_{ij}, який відповідає власному значенню k: $\mathrm{T}=\begin{bmatrix}5 & 6 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$, $k=2$.

9. Використовуючи теорему Остроградського – Гаусса знайти потік векторного поля $\vec{a}=2x\vec{i}+(3-y)\vec{j}+4z\vec{k}$ через поверхню призми, яка обмежена площинами:

$x=0$; $x=a$; $y=0$; $y=c$; $z=0$; $\dfrac{y}{c}+\dfrac{z}{d}=1$.

<u>Третій рівень</u>.

10. Для векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(x_1,x_2,x_3)$ знайти градієнт $\nabla\otimes\vec{a}$, дивергенцію $\nabla\cdot\vec{a}$ і ротор $\nabla\times\vec{a}$ векторного поля $\vec{a}=\sqrt{x_1}\,\vec{e}_1+(x_1+x_2^2)\vec{e}_2+x_2\sqrt{x_3}\,\vec{e}_3$.

Модульна контрольна робота

Основи векторного та тензорного аналізу

Тестове завдання № 6

Перший рівень. У завданнях 1 — 6 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку відповідей.

1. Вектор $\overline{e}_2$ основного базису визначається за формулою

а	б	в	г
$\dfrac{\vec{e}^1 \times \vec{e}_2}{\vec{e}^1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)}$	$\dfrac{\vec{e}^3 \times \vec{e}^1}{\vec{e}^1 \cdot (\vec{e}^2 \times \vec{e}^3)}$	$\dfrac{\vec{e}^1 \times \vec{e}^2}{\vec{e}^1 \cdot (\vec{e}^2 \times \vec{e}^3)}$	$\dfrac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)}$

2. Знайти значення $\delta_{ij} \cdot A_{ij}$

а	б	в	г
$A_{11} + A_{22} - A_{33}$	$A_{11} + A_{22} + A_{33}$	$A_{12} + A_{23} + A_{31}$	$-A_{11} - A_{22} - A_{33}$

3. Піднімання (опускання) індексів компонентів T_{km} тензору другого рангу T виконується за формулами

а	б	в	г
$\mathrm{T}^{ij} = g^{ik}\mathrm{T}_{jk}$	$\mathrm{T}^{ij} = g^{ik} g_{jm}\mathrm{T}_{km}$	$\mathrm{T}^{ij} = g^{ik} g^{jm}\mathrm{T}_{km}$	$\mathrm{T}^{ij} = g^{ik}\mathrm{T}_{jm}$

4. Знайти компоненту T'_{12} тензору T з матрицею $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, якщо система координат $Ox'_1x'_2x'_3$ повернута відносно $Ox_1x_2x_3$ на кут $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ відносно осі Ox_1.

а	б	в	г
2	$2\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	3

5. Знайти алгебраїчну суму компонентів $\lambda C_{1221} + \mu C_{1122}$ добутку $A \otimes B$ тензорів з матрицями $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

а	б	в	г
-2λ	$-2\lambda+3\mu$	$2\lambda+3\mu$	7μ

6. Згорнути тензор T_{ijk} за останніх двох індексів.

а	б	в	г
$\mathrm{T}_{i11}+\mathrm{T}_{i22}-\mathrm{T}_{i33}$	$\mathrm{T}_{111}+\mathrm{T}_{222}+\mathrm{T}_{333}$	$\mathrm{T}_{i11}+\mathrm{T}_{i22}+\mathrm{T}_{i33}$	$\mathrm{T}_{111}-\mathrm{T}_{222}+\mathrm{T}_{333}$

7.Обрати формулу для знаходження дивергенції векторного поля $\vec{a}=u\cdot\mathrm{grad}\,u$

а	б	в	г
$(\nabla u)^2+0{,}5u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2-u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2+u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2-2u\cdot\Delta u$

Розв'язання задач 8-10 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення. Якщо потрібно проілюструйте розв'язання завдань схемами, графіками, таблицями. Перенесіть відповідь до бланку відповідей.

Другий рівень.

8. Знайти головний напрямок $\vec{n}$ тензора T з матрицею T_{ij}, який відповідає власному значенню k: $\mathrm{T}=\begin{bmatrix}0 & 7 & 4\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 13 & 0\end{bmatrix}$, $k=1$.

9. Використовуючи теорему Остроградського – Гаусса, знайти потік векторного поля $\overline{a}=2x\overline{i}-(3y+5)\overline{j}+(4z-3)\overline{k}$ через поверхню призми , яка обмежена площинами: $x=0$; $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$; $y=0$; $y=b$; $z=0$; $z=c$.

Третій рівень.

10. Для векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(x_1,x_2,x_3)$ знайти градієнт $\nabla\otimes\vec{a}$, дивергенцію $\nabla\cdot\vec{a}$ і ротор $\nabla\times\vec{a}$ векторного поля $\vec{a}=x_1\vec{e}_1+x_1x_2\vec{e}_2+x_1^2x_3^2\vec{e}_3$.

КОМЕНТАР ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

Завдання 1. Правильна відповідь: б.

(*Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням*: основний та взаємний базиси .)

Завдання 2. Правильна відповідь: б.

$$\delta_{ij}A_{ij} = A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}.$$

(*Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням*: правило А. Ейнштейна запису сум).

Завдання 3. Правильна відповідь: в.

Розв'язання. Піднімання індексів виконується за допомогою основного метричного тензора $\mathrm{T}^{mn} = g^{mi}g^{nk}\mathrm{T}_{ik}$. Так само можна опускати індекси.

(*Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням*: перекидання індексів.)

Завдання 4. Правильна відповідь: а.

Розв'язання. На підставі відомих формул маємо

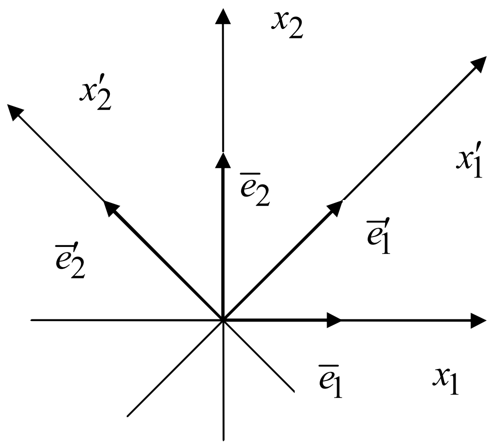


Рис.15

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}'_{ik}\,\bar{e}'_i\,\bar{e}'_k = \mathrm{T}_{mn}\,\bar{e}_m\,\bar{e}_n = \mathrm{T}_{mn}\alpha^i_m\alpha^k_n\bar{e}'_i\,\bar{e}'_k,$$

де $\bar{e}_m = \alpha^i_m\bar{e}'_m$; $\bar{e}_n = \alpha^k_n\bar{e}'_k$.

Так як $\mathrm{T}'_{ik} = \alpha^i_m\alpha^n_k\mathrm{T}_{mn}$, тоді

$$\mathrm{T}'_{12} = \alpha^1_m\alpha^2_n\mathrm{T}_{mn} = \alpha^1_1\alpha^2_1\mathrm{T}_{11} + \alpha^1_1\alpha^2_2\mathrm{T}_{12} +$$
$$+\alpha^1_1\alpha^2_3\mathrm{T}_{13} + \alpha^1_2\alpha^2_1\mathrm{T}_{21} + \alpha^1_2\alpha^2_2\mathrm{T}_{22} + \alpha^1_2\alpha^2_3\mathrm{T}_{23} +$$
$$+\alpha^1_3\alpha^2_1\mathrm{T}_{31} + \alpha^1_3\alpha^2_2\mathrm{T}_{32} + \alpha^1_3\alpha^2_3\mathrm{T}_{33}$$

Маємо

$$\bar{e}_1 = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\alpha^1_1}e'_1 - \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\alpha^2_1}e'_2 + \underbrace{0}_{\alpha^3_1}\cdot e'_3;\quad \bar{e}_2 = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\alpha^1_2}e'_1 + \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\alpha^2_2}e'_2 + \underbrace{0}_{\alpha^3_2}\cdot e'_3;\quad \bar{e}_3 = \underbrace{0}_{\alpha^1_3}e'_1 + \underbrace{0}_{\alpha^2_3}e'_2 + \underbrace{1}_{\alpha^3_3}\cdot e'_3$$

$$\alpha^1_1 = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \alpha^2_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2};\ \alpha^3_1 = 0;\ \alpha^1_2 = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \alpha^2_2 = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \alpha^3_2 = 0;\ \alpha^1_3 = \alpha^2_3 = 0;\ \alpha^3_3 = 1.$$

Отже,

$$\mathrm{T}'_{12}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 3+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 3+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 5=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=2$$

(*Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням*: зміна компонентів тензора при перетворенні координат)

Завдання 5. Правильна відповідь: а.

Розв'язання. Для заданих матриць $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 10 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & 3 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 6 & -1\end{bmatrix}$

маємо: $C_{1221}=A_{12}B_{21}=2\cdot(-1)=-2; C_{1122}=A_{11}B_{22}=3\cdot 0$. Таким чином,

$$\lambda C_{1221}+\mu C_{1122}=-2\lambda .$$

(*Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням*: правило тензорного множення тензорів)

Завдання 6. Правильна відповідь: в.

Розв'язання. $\mathrm{T}_{ijj}=\mathrm{T}_{i11}+\mathrm{T}_{i22}+\mathrm{T}_{i33}$.

(*Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням*: знаходження згортки тензорів)

Завдання 7. Правильна відповідь: в.

Розв'язання. Для векторного поля $\overline{a}=u\cdot \mathrm{grad}u$ маємо

$$\mathrm{div}\overline{a}=\nabla\cdot(u\nabla u)=\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+$$

$$+u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+u\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(\mathrm{grad}u\right)^2+u\cdot\Delta u=\left(\nabla u\right)^2+u\cdot\Delta u$$

Завдання 8.

Розв'язання. Для вектора $\overline{n}=\left(n_1;n_2;n_3\right)$ маємо

$$\begin{cases}-n_1+7n_2+4n_3=0\\ 0=0\\ n_1+13n_2-n_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}20n_2+3n_3=0\\ n_2=n_2\\ n_1=7n_2+4n_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n_1=59\\ n_2=-3\\ n_3=20\end{cases}.$$

Перевірка: $\begin{bmatrix}0 & 7 & 4\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 13 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}59\\ -3\\ 20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-21+80\\ -3\\ 59-39\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}59\\ -3\\ 20\end{pmatrix}$, тобто $\mathrm{T}\cdot\overline{n}=k\cdot\overline{n}$.

Відповідь: $\overline{n}=\left(59;-3;20\right)$

Завдання 9.

Розв'язання. За формулою Остроградського-Гаусса маємо

$$\iiint\limits_V \mathrm{div}\overline{a}dV = \iint\limits_S \overline{a}\cdot\overline{n}dS .$$

Знайдемо дивергенцію поля $\overline{a} = 2x\overline{i} - (3y+5)\overline{j} + (4z-3)\overline{k}$.

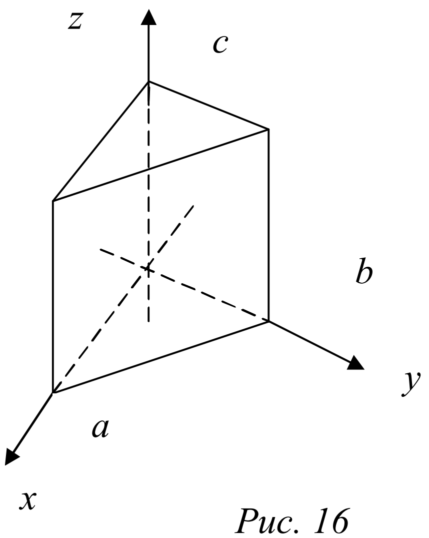


Рис. 16

$$\mathrm{div}\overline{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(2x) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}(-5-3y) + \frac{\partial}{\partial z}(4z-3) = 2-3+4=3$$

Тоді

$$\iiint\limits_V \mathrm{div}\overline{a}dV = 3\iiint\limits_V dV = 3V = 3\cdot\frac{abc}{2} = \frac{3}{2}abc$$

<u>Відповідь</u>: $\frac{3}{2}abc$.

Завдання 10.

Розв'язання. Складаємо таблицю компонентів та їх похідних.

$a_1 = x_1$	$a_2 = x_1x_2$	$a_3 = x_1^2x_3^2$
$\frac{\partial a_1}{\partial x_1} = 1$	$\frac{\partial a_2}{\partial x_1} = x_2$	$\frac{\partial a_3}{\partial x_1} = 2x_1x_3^2$
$\frac{\partial a_1}{\partial x_2} = 0$	$\frac{\partial a_2}{\partial x_2} = x_1$	$\frac{\partial a_3}{\partial x_2} = 0$
$\frac{\partial a_1}{\partial x_3} = 0$	$\frac{\partial a_2}{\partial x_3} = 0$	$\frac{\partial a_3}{\partial x_3} = 2x_1^2x_3$

Знайдемо градієнт поля

$$\nabla\otimes\overline{a} = \left(\overline{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \overline{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \overline{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\otimes\left(a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2 + a_3\overline{e}_3\right) =$$

$$= \frac{\partial a_1}{\partial x_1}\overline{e}_1\otimes\overline{e}_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\overline{e}_2\otimes\overline{e}_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3}\overline{e}_3\otimes\overline{e}_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_1}\overline{e}_1\otimes\overline{e}_2 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\overline{e}_2\otimes\overline{e}_2 +$$

$$+\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\overline{e}_3\otimes\overline{e}_2+\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\overline{e}_1\otimes\overline{e}_3+\frac{\partial a_3}{\partial x_2}\overline{e}_2\otimes\overline{e}_3+\frac{\partial a_3}{\partial x_3}\overline{e}_3\otimes\overline{e}_3=\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\overline{e}_1\otimes\overline{e}_1+$$

$$+\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\overline{e}_1\otimes\overline{e}_2+\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\overline{e}_1\otimes\overline{e}_3+\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\overline{e}_2\otimes\overline{e}_1+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}\overline{e}_2\otimes\overline{e}_2+\frac{\partial a_3}{\partial x_2}\overline{e}_2\otimes\overline{e}_3+$$

$$+\frac{\partial a_1}{\partial x_3}\overline{e}_3\otimes\overline{e}_1+\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\overline{e}_3\otimes\overline{e}_2+\frac{\partial a_3}{\partial x_3}\overline{e}_3\otimes\overline{e}_3=\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\overline{e}_i\otimes\overline{e}_j=\overline{e}_1\otimes\overline{e}_1+x_2\overline{e}_2\otimes\overline{e}_1+$$

$$+x_1\overline{e}_2\otimes\overline{e}_2+2x_1x_3^2\overline{e}_3\otimes\overline{e}_1+2x_1^2x_3\overline{e}_3\otimes\overline{e}_3,$$

його дивергенцію $\nabla\cdot\overline{a}=\frac{\partial a_1}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}+\frac{\partial a_3}{\partial x_3}=1+x_1+2x_1^2x_3$ та його ротор

$$\nabla\times\overline{a}=\mathrm{rot}\,\overline{a}=\begin{vmatrix}\overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)\overline{e}_1+\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)\overline{e}_2+$$

$$+\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\overline{e}_3=(0-0)\overline{e}_1+(0-2x_1x_3^2)\overline{e}_2+(x_2-0)\overline{e}_3=-2x_1x_3^2\overline{e}_2+x_2\overline{e}_3.$$

БЛАНК ВІДПОВІДЕЙ

1) ☐ **2)** ☐ **3)** ☐ **4)** ☐

5) ☐ **6)** ☐ **7)** ☐

Завдання 8

Розв'язання

Відповідь **:** ______________________

Завдання 9

Розв'язання

Відповідь **:** ______________________

Завдання 10

Розв'язання

Відповідь **: ____________________**

Завдання	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Сума**
Набрані бали											

Індивідуальні завдання

Задача 1. Дані $|\vec{e}_1|, |\vec{e}_2|$ та кут φ основного базису (рис.14), розклад вектора $\overline{b} = 2e_1 - e_2$ в основному базисі. Знайти: 1) взаємний базис $\overline{e}^1, \overline{e}^2$; 2) метричний тензор. Встановити зв'язок контра- і коваріантних компонентів $\overline{b}$.

№	$\lvert \overline{e}_1 \rvert$	$\lvert \overline{e}_2 \rvert$	φ	№	$\lvert \overline{e}_1 \rvert$	$\lvert \overline{e}_2 \rvert$	φ
1	1	1	π / 6	13	1	1	2π / 3
2	1	2	5π / 6	14	1	2	π / 3
3	2	1	2π / 3	15	2	1	π / 6
4	2	2	π / 3	16	2	2	5π / 6
5	1	1	π / 4	17	1	1	3π / 4
6	1	2	3π / 4	18	1	2	π / 4
7	2	1	π / 3	19	2	1	3π / 4
8	2	2	π / 4	20	2	2	2π / 3
9	1	1	π / 3	21	1	1	5π / 6
10	1	2	2π / 3	22	1	2	π / 6
11	2	1	π / 4	23	2	1	5π / 6
12	2	2	π / 6	24	2	2	3π / 4

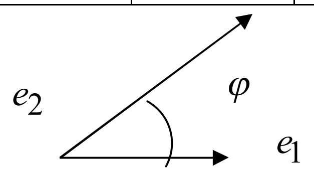


Рис. 17

Задача 2. У точці М тіла тензор напруження має матрицю компонентів Т. Визначити вектор напруження $\overline{p}$ у точці M на площі з вектором нормалі $\overline{n}$, нормальне і дотичне напруження на площині.

N	**Умова**		**Умова**		**Умова**
1.	$T = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};$ $\overline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_1 + \frac{1}{2}\overline{e}_2 + \frac{1}{2}\overline{e}_3$	10.	$T = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix};$ $\overline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_1 - \frac{1}{2}\overline{e}_2 + \frac{1}{2}\overline{e}_3$	19.	$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix};$ $\overline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_1 + \frac{1}{2}\overline{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_3$

2	$T=\begin{bmatrix}-6 & 0 & 5\\ 0 & -2 & 0\\ 5 & 0 & 6\end{bmatrix};$ $\bar{n}=\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{e}_1-\frac{1}{2}\bar{e}_3$	11.	$T=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix};$ $\bar{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}_2$	20.	$T=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix};$ $\bar{n}=\frac{1}{2}\bar{e}_1-\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{e}_3$
3	$T=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix};$ $\bar{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_1+\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_2+\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_3$	12.	$T=\begin{bmatrix}10 & 4 & 0\\ 4 & 10 & 6\\ 0 & 6 & 10\end{bmatrix};$ $\bar{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_1-\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_2+\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_3$	21.	$T=\begin{bmatrix}1 & 0 & -4\\ 0 & 4 & 0\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix};$ $\bar{n}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_1+\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_2-\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_3$
4	$T=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 4\end{bmatrix};$ $\bar{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}_1-\frac{1}{2}\bar{e}_2+\frac{\bar{e}_3}{2}$	13.	$T=\begin{bmatrix}1 & 4 & -2\\ 4 & 1 & -2\\ -2 & 2 & 3\end{bmatrix};$ $\bar{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}_3$	22.	$T=\begin{bmatrix}2 & -5 & 1\\ -5 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix};$ $\bar{n}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}_2$
5	$T=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 7 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix};$ $\bar{n}=-\frac{1}{2}\bar{e}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}_2+\frac{\bar{e}_3}{2}$	14.	$T=\begin{bmatrix}0 & 4 & 3\\ 4 & 0 & 4\\ 3 & 4 & 0\end{bmatrix};$ $\bar{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}_3$	23.	$T=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 3 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{bmatrix};$ $\bar{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}_2-\frac{\bar{e}_3}{2}$
6	$T=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 2\\ 3 & 2 & 2\end{bmatrix};$ $\bar{n}=\frac{1}{2}\bar{e}_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{e}_3$	15.	$T=\begin{bmatrix}5 & 1 & 0\\ 1 & 5 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix};$ $\bar{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_1+\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_2+\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_3$	24.	$T=\begin{bmatrix}5 & 1 & 8\\ 1 & 3 & 0\\ 8 & 0 & 5\end{bmatrix};$ $\bar{n}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_1-\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_2+\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{e}_3$
7	$T=\begin{bmatrix}5 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix};$ $\bar{n}=\frac{1}{2}\bar{e}_1-\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{e}_3$	16.	$T=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix};$ $\bar{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}_3$	25.	$T=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 2\\ 0 & -5 & 0\\ 2 & 0 & -3\end{bmatrix};$ $\bar{n}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}_3$

8	$T=\begin{bmatrix}2&5&1\\5&2&1\\1&1&4\end{bmatrix}$; $\overline{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_1-\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{e}_3$	17.	$T=\begin{bmatrix}0&3&0\\3&5&4\\0&4&0\end{bmatrix}$; $\overline{n}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{e}_2+\frac{1}{2}\overline{e}_3$	26.	$T=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&8&8\\0&8&8\end{bmatrix}$; $\overline{n}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{e}_2+\frac{1}{2}\overline{e}_3$
9	$T=\begin{bmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{bmatrix}$; $\overline{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{e}_2$	18	$T=\begin{bmatrix}-2&0&3\\0&1&0\\3&0&2\end{bmatrix}$; $\overline{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_1+\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_2+\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_3$	27	$T=\begin{bmatrix}7&0&2\\0&7&0\\2&0&7\end{bmatrix}$; $\overline{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_1+\frac{1}{2}\overline{e}_2+\frac{1}{2}\overline{e}_3$

Задача 3. Дано тензор Т питомої електропровідності кристала в одиницях $10^{-7}Ом^{-1}\cdot м^{-1}$ і вектор напрямку електричного поля $\overline{n}$. Знайти тензор опору K та вектор $\overline{j}$ густини струму, якщо електричне поле $\overline{E}=E\cdot\overline{n}\,(E=2В/м)$.

N	**Умова**		**Умова**		**Умова**
1.	$T=\begin{bmatrix}-3&5&0\\-5&-3&0\\0&0&2\end{bmatrix}$; $\overline{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_1+\frac{1}{2}\overline{e}_2+\frac{1}{2}\overline{e}_3$	10.	$T=\begin{bmatrix}3&-6&0\\6&3&0\\0&0&5\end{bmatrix}$; $\overline{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_1-\frac{1}{2}\overline{e}_2+\frac{1}{2}\overline{e}_3$	19.	$T=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-5&2\\0&-2&-5\end{bmatrix}$; $\overline{n}=\frac{1}{2}\overline{e}_1+\frac{1}{2}\overline{e}_2-\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_3$
2	$T=\begin{bmatrix}-6&0&5\\0&-2&0\\-5&0&6\end{bmatrix}$; $\overline{n}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{e}_1-\frac{1}{2}\overline{e}_3$	11.	$T=\begin{bmatrix}0&2&3\\-2&0&1\\-3&1&2\end{bmatrix}$; $\overline{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_2$	20.	$T=\begin{bmatrix}1&-2&2\\2&1&-2\\-2&2&1\end{bmatrix}$; $\overline{n}=\frac{1}{2}\overline{e}_1-\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{e}_3$
3	$T=\begin{bmatrix}3&1&-1\\-1&0&2\\1&2&0\end{bmatrix}$; $\overline{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_1+\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_2+\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_3$	12.	$T=\begin{bmatrix}10&4&0\\-4&10&6\\0&-6&10\end{bmatrix}$; $\overline{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_1-\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_2+\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_3$	21.	$T=\begin{bmatrix}1&0&-4\\0&4&0\\4&0&1\end{bmatrix}$; $\overline{n}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_1+\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_2-\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_3$

4	$T=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 4\end{bmatrix};$ $\overline{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_1-\frac{1}{2}\overline{e}_2+\frac{\overline{e}_3}{2}$	13.	$T=\begin{bmatrix}1 & 4 & -2\\ -4 & 1 & -2\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix};$ $\overline{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_3$	22.	$T=\begin{bmatrix}2 & -5 & 1\\ 5 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix};$ $\overline{n}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_2$
5	$T=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 7 & 2\\ 0 & -2 & 4\end{bmatrix};$ $\overline{n}=-\frac{1}{2}\overline{e}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_2+\frac{\overline{e}_3}{2}$	14.	$T=\begin{bmatrix}0 & 4 & -3\\ -4 & 0 & 4\\ 3 & -4 & 0\end{bmatrix};$ $\overline{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_3$	23.	$T=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 1 & -2\\ 2 & 2 & 4\end{bmatrix};$ $\overline{n}=\frac{1}{2}\overline{e}_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_2-\frac{\overline{e}_3}{2}$
6	$T=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 2\\ -3 & -2 & 2\end{bmatrix};$ $\overline{n}=\frac{1}{2}\overline{e}_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{e}_3$	15.	$T=\begin{bmatrix}5 & 1 & 0\\ -1 & 5 & 2\\ 0 & -2 & 3\end{bmatrix};$ $\overline{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_1+\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_2+\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_3$	24.	$T=\begin{bmatrix}5 & 1 & -8\\ -1 & 3 & 0\\ 8 & 0 & 5\end{bmatrix};$ $\overline{n}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_1-\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_2+\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_3$
7	$T=\begin{bmatrix}5 & 2 & 0\\ -2 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 3\end{bmatrix};$ $\overline{n}=\frac{1}{2}\overline{e}_1-\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{e}_3$	16.	$T=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix};$ $\overline{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_3$	25.	$T=\begin{bmatrix}-3 & 0 & -2\\ 0 & -5 & 0\\ 2 & 0 & -3\end{bmatrix};$ $\overline{n}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_3$
8	$T=\begin{bmatrix}2 & 5 & 1\\ -5 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix};$ $\overline{n}=\frac{1}{2}\overline{e}_1-\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{e}_3$	17.	$T=\begin{bmatrix}0 & 3 & 0\\ -3 & 5 & 4\\ 0 & -4 & 0\end{bmatrix};$ $\overline{n}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{e}_2+\frac{1}{2}\overline{e}_3$	26.	$T=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 8\\ 0 & -8 & 8\end{bmatrix};$ $\overline{n}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{e}_2+\frac{1}{2}\overline{e}_3$
9	$T=\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ -2 & 2 & 2\\ -2 & -2 & 2\end{bmatrix};$ $\overline{n}=\frac{1}{2}\overline{e}_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{e}_2$	18	$T=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 2\end{bmatrix};$ $\overline{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_1+\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_2+\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{e}_3$	27	$T=\begin{bmatrix}7 & 0 & 2\\ 0 & 7 & 0\\ -2 & 0 & 7\end{bmatrix};$ $\overline{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{e}_1+\frac{1}{2}\overline{e}_2+\frac{1}{2}\overline{e}_3$

Довідка з векторної алгебри

Вектором називається напрямлений відрізок. Довжина вектора $\overline{a}$ (його модуль $|\overline{a}|$) — це відстань між його початком і кінцем. Для будь-яких двох точок простору $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$ декартові координати вектора $\overline{AB} = (X, Y, Z)$ визначаються рівностями $X = x_2 - x_1; Y = y_2 - y_1; Z = z_2 - z_1$.

Скалярним добутком $\overline{a} \cdot \overline{b}$ двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається число, що дорівнює $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi$, де φ — кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

Якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ задано своїми координатами $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z), \overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то їх скалярний добуток визначається формулою $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Кут φ *між векторами* $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$ *і* $\overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$ визначається рівністю

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Векторним добутком вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ називається третій вектор $\overline{a} \times \overline{b}$, який визначається трьома умовами:

Довжина вектора $\overline{a} \times \overline{b}$ дорівнює $|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \sin\varphi$, де φ —кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$;

Вектор $\overline{a} \times \overline{b}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$;

Вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{a} \times \overline{b}$ утворюють праву тройку векторів.

Якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ задано своїми координатами $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z), \overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то їх векторний добуток дорівнює символічному визначнику третього порядку

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Мішаним добутком трьох векторів називається число, що дорівнює скалярному добутку вектора $\overline{c}$ на векторний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, тобто $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$

Якщо вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ задано своїми координатами $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z), \overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\overline{c} = (c_x, c_y, c_z)$, то їх мішаний добуток обчислюється за формулою:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

А		
альтернування	альтернирование	alternation
Б		
базис	базис	basis
—, основний	—, основной	—, fundamental
—, взаємний	—, взаимный	—, inverse
В		
вектор	вектор	vector
Г		
головне значення	главное значение	principal value
градієнт	градиент	gradient
Д		
девіатор	девиатор	deviator
дельта Кронекера	дельта Кронекера	Kronecker delta
діада	диада	dyad
дивергенція	дивергенция	divergence
додавання тензорів	сложение тензоров	addition of the tensors
Е		
еквівалентність	эквивалентность	equivalence
З		
згода про підсумовування	соглашение о суммировании	summation convention
згортка	свертка	convolution
змінна з індексами	переменная с индексами	subscripted variable
І		
інваріант	инвариант	invariant
інваріантність	инвариантность	invariance
індекс	индекс	index
—, коваріантний	—, ковариантный	—, covariant
—, контраваріантний	—, контравариантный	—, contravariant
К		
компоненти	компоненты	components
координати	координаты	coordinates
—, декартові	—, декартовы	—, Cartesian
—, сферичні	—, сферические	—, spherical
—, циліндричні	—, цилиндрические	—,cylindrical
коефіцієнти Ламе	коэффициенты Ламе	Lame coefficients
Л		
Лапсасіан	Лапласиан	Laplacian
М		
матриця тензора	матрица тензора	matrix of a tensor
множення тензорів	перемножение тензоров	multiplication of the

		tensors
Н		
напрям головний	направление главное	principal direction
напруження	напряжение	stress
—, нормальне	—, нормальное	—, normal
—, тангенціальне (дотичне)	—, касательное	—, shear
О		
область	область	area (domain)
оператор Гамільтона	оператор Гамильтона	Hamilton operator
П		
перекидання індексів	жонглирование индексами	juggling of the indexes
поля тензорні	поля тензорные	tensor fields
похідна за напрямом	производная по направлению	derivative on the direction
—, коваріантна	—, ковариантная	—, covariant
—, повна	—, полная	—, total
Р		
радіус-вектор	радиус-вектор	radius vector
рівняння характеристичне	уравнение характеристическое	characteristic equation
ротор	ротор	rotation, curl
С		
символи Кристоффеля	символы Кристоффеля	Cristophel symbols
симетрування	симметрирование	symmetrization
скаляр	скаляр	scalar
Т		
тензор	тензор	tensor
—, кульовий	—, шаровой	—, spherical
—, $n-$го рангу	—, $n-$го ранга	—, of order n
Ф		
формула Гріна	формула Грина	Green formula
—, Остроградського-Гаусса	—, Остроградського-Гаусса	—, Gauss-Green
—, Стокса	—, Стокса	—, Stocks
Ц		
циркуляція вектора	циркуляция вектора	circulation of a vector
Ч		
чотиривимірний вектор	четырехмерный вектор	four-dimensional vector
Я		
Якобіан	Якобиан	Jacobian

Список літератури

1. Кованцов М.І. Диференціальна геометрія: Навч. посібник. – К.: «Вища школа», 1973. – 276 с.
2. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. – Харьков: «Вища школа», 1978. – 216с.
3. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. – М.: «Мир», 1974. – 318с.
4. Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ: Сб. задач/ Н.И. Кованцов, Г.М. Зражевская, В.Г. Кочаровский, В.И. Михайловский. – 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Вища школа, 1989. – 398 с.
5. Валь О.Д., Королюк С.Л., Мельничук С. В. Основи векторного та тензорного аналізу: Навч. посібник. – Чернівці: Книги – XXI, 2006. – 228с.
6. Макаров Е.Г. Инженерные расчеты в Mathcad 14 (+CD) . – СПб.: Питер, 2007. – 592 с.
7. Stouffer, Donald C. Inelastic deformation of metals: models, mechanical properties and metallurgy /by Donald C. Stouffer and L. Thomas Dame. – John Wiley @ Sons, inc, 1996. – 502 p.

Навчальне видання

Нікулін Олександр Вікторович
Наконечна Тетяна Всеволодівна

ОСНОВИ ВЕКТОРНОГО ТА ТЕНЗОРНОГО ЧИСЛЕННЯ: ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ТЕСТИ

Підписано до друку _______ 2011
Формат 60 84 1/16, 4 ум. – друк. арк.
Тираж 100 прим. Замовлення

Надруковано
м. Дніпропетровськ