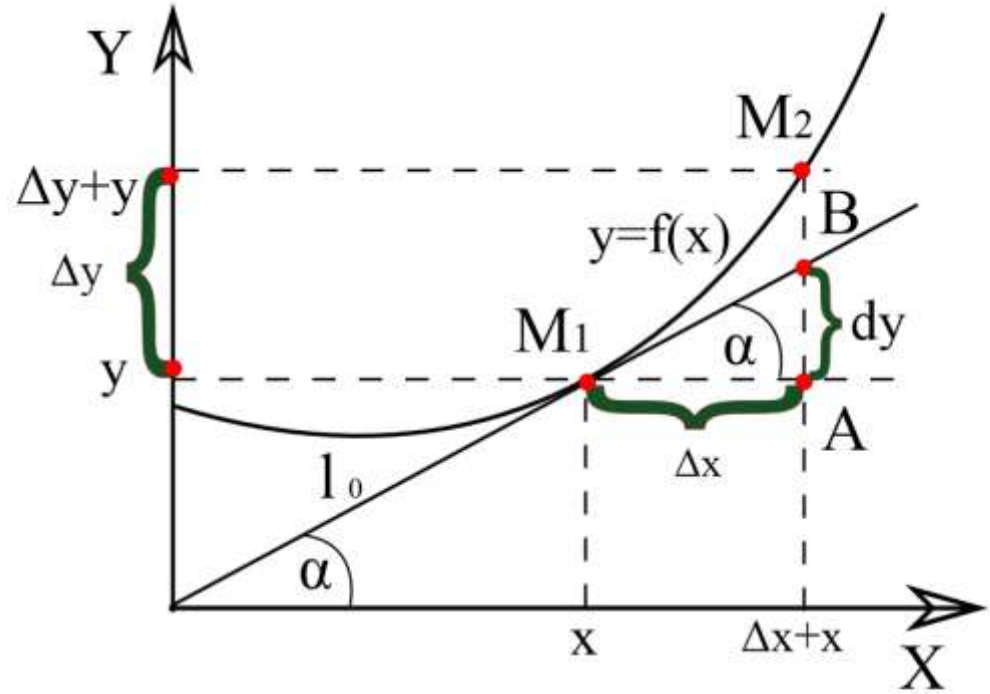
Нікулін О. В.

Наконечна Т. В.

МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник для технічних університетів



Дніпропетровськ
Видавець Біла К.О.
2014

УДК 517.5
ББК 22.1
Н 65

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів*
(*лист* № 1/11-2756 *від* 19.02.2014 р.)

Рецензенти:

Бабенко В. Ф., проф., д-р фіз.-мат. наук (Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара)

Гук Н. А., проф. д-р фіз.-мат. наук (Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара)

Тіман М. П., проф., д-р фіз.-мат. наук (Дніпропетровський державний аграрний університет)

Нікулін О.В.

Н 65 Математика: навч. посібник для технічних університетів / О. В. Нікулін, Т.В. Наконечна. – Дніпропетровськ: Біла К.О., 2014. – 104 с.

ISBN 978-617-645-164-8

Посібник написано відповідно до програми зовнішнього незалежного оцінювання з математики, що затверджується Міністерством науки і освіти.

В посібнику викладені основні теоретичні факти і формули шкільної математики (алгебри, геометрії, початків аналізу та елементів теорії ймовірностей). Наводяться приклади розв’язання тестових завдань, які можуть бути застосовані для підготовки до ЗНО з математики.

УДК 517.5
ББК 22.1

ISBN 978-617-645-164-8

Зміст

ВСТУП

Автори вважають, що навчання на курсах повинно орієнтуватися на підготовку до успішної здачі ЗНО. Тому спочатку розглянемо характеристику зовнішнього незалежного оцінювання з математики (ЗНОм).

Зміст математичного тесту визначається на основі Програми ЗНОм (затверджується Міністерством освіти і науки України на кожний наступний рік).

Тест із математики складається із завдань трьох форм:

1. Завдання з вибором однієї правильної відповіді. До кожного завдання подано п'ять варіантів відповіді, з яких лише один правильний. Завдання вважається виконаним, якщо абітурієнт вибрав і позначив правильну відповідь у бланку відповідей А.

2. Завдання на встановлення відповідності **(логічні пари)**. До кожного завдання подано інформацію, позначену цифрами (ліворуч) і буквами (праворуч). Щоб виконати завдання, необхідно встановити відповідність інформації, позначеної цифрами та буквами (утворити логічні пари). Завдання вважається виконаним, якщо абітурієнт правильно зробив позначки на перетинах рядків (цифри від 1 до 4) і колонок (букви від А до Д) у таблиці бланка А.

3. Завдання відкритої форми з короткою відповіддю. Під час виконання цих завдань потрібно вписати отриманий числовий результат тієї розмірності, яка вказана в умові завдання, до бланка відповідей.

Схеми оцінювання завдань тесту з математики:

1.1. Завдання з вибором однієї правильної відповіді оцінюється в **0** або **1** тестовий бал: **1** бал, якщо вказано правильну відповідь; **0** балів, якщо вказано неправильну відповідь, або вказано більше однієї відповіді, або відповіді не надано.

1.2. Завдання на встановлення відповідності (логічні пари) оцінюється в **0, 1, 2, 3** або **4** тестових бали: **1** бал за кожну правильно встановлену відповідність (логічну пару); **0** балів, якщо не вказано жодної правильної логічної пари або відповіді на завдання не надано.

1.3. Завдання відкритої форми з короткою відповіддю оцінюється **0** або **2** тестовими балами: **2** бали, якщо зазначено правильну відповідь; **0** балів, якщо зазначено неправильну відповідь або завдання взагалі не виконано.

Тестовий матеріал поділяється на тематичні блоки згідно таблиці.

Тематичні блоки	**Кількість завдань**
Алгебра і початки аналізу Числа і вирази	7 - 8
Алгебра і початки аналізу Рівняння і нерівності	5 - 6
Алгебра і початки аналізу Функції	5 - 6
Алгебра і початки аналізу Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики	2 - 3
Геометрія Планіметрія	6
Геометрія Стереометрія	7
Загальна кількість завдань	32 - 36
Тривалість тестування	150 хвилин

- Максимальна кількість тестових балів — 52 – 54.
- Максимальний рейтинговий бал — 200.

При підготовці до атестації та тестування ЗНОм пропонується пройти комплексний тест, проаналізувати свої розв’язання. Підсумкове тестування з математики на підготовчих курсах має тривалість 90 хв. Орієнтуючись на характеристику ЗНОм, зберігаємо структуру тесту, кількість завдань зменшується пропорційно тривалості тестування до 14 завдань трьох форм. Зберігається тематичний розподіл матеріалу тесту.

Автори щиро сподіваються, що посібник буде корисним як для самостійної підготовки з математики абітурієнтів технічного університету, так і при проведенні занять на підготовчих курсах.

Тема 1. Дійсні числа, їх порівняння та дії з ними. Числові множини та співвідношення між ними

Множини, елементами яких є числа, називаються *числовими*. Прикладами таких множин є:

1) множина натуральних чисел $N = \{1;\ 2; \dots;\ n; \dots\}$;

2) множина цілих чисел $Z = \{0;\ \pm 1;\ \pm 2; \dots;\ \pm n; \dots\}$;

3) множина раціональних чисел $Q = \{p/q \mid p \in Z, q \in N\}$;

4) множина дійсних чисел $R = \{x \mid x = \alpha, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots\}$, де $\alpha \in Z$, α_i — цифри десяткової системи числення.

Між цими множинами існує зв'язок: $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Множина дійсних чисел містить раціональні, ірраціональні (алгебраїчні та трансцендентні) числа. Всяке раціональне число є або цілим числом, або скінченим чи періодичним десятковим дробом. Ірраціональне число – це нескінченний неперіодичний десятковий дріб. Так $\frac{2}{5} = 0,4; \frac{1}{3} = 0,333\dots$ — раціональні числа; $\sqrt{2} = 1,4142\dots; \pi = 3,1415\dots$ — ірраціональні числа.

На множині дійсних чисел завжди виконуються операції додавання, віднімання, множення і ділення (крім ділення на 0).

Натуральні числа — числа, які використовуються природним чином для лічби або рахунку окремих об'єктів. Зазвичай той факт, що число $a = 4$ є натуральним означають так — $a \in N$.

Множина цілих чисел визначається як замикання множини натуральних чисел відносно арифметичних операцій додавання ($+$), множення ($\times$) і віднімання ($-$). Це означає, що сума, різниця і добуток двох цілих чисел є знову цілі числа. Воно складається з додатних чисел $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, чисел виду $\{-n\}$ $(n \in N)$ і числа нуль. Зазвичай той факт, що число a є цілим означають так — $a \in Z$.

Дільником числа $a\left(a \in Z\right)$ називається таке число $q\left(q \in Z\right)$, на яке ділиться число a без остачі. Тобто $a = bq\left(b \in Z\right)$.

Число $p\left(p \in Z\right)$ називається простим, якщо воно ділиться лише на 1 і на само себе.

Загальним дільником чисел a і b $\left(a,b \in Z\right)$ називається число $d\left(d \in Z\right)$, на яке діляться обидва числа a і b.

Найбільшим спільним дільником (НСД) чисел a і b $\left(a,b \in Z\right)$ називається їх загальний дільник $d\left(d \in Z\right)$, який ділиться на будь-який інший загальний дільник a і b. Наприклад, НСД(4, 16) = 4.

Числа a і b $\left(a,b \in Z\right)$ є взаємно простими, тоді і тільки тоді, коли

НСД(*a, b*) = 1.

Найменше спільне кратне (НСК) двох цілих чисел a і b $\left(a,b \in Z\right)$ — це найменше натуральне число, яке ділиться на a і b. Наприклад, НСК(6, 21) = 42. Для будь-якого a і b $\left(a,b \in Z\right)$ виконується наступне співвідношення:

НСД(*a, b*) · НСК(*a, b*) = $a \cdot b$.

Приклад. Знайти НСД та НСК чисел 126 і 54.

Розв'язання. Розкладемо кожне з чисел на прості множники:

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Спільними дільниками чисел 126 і 54 є числа 2, 3, 3.

Тоді НСД (126, 54) = 2·3·3 = 18; НСК (126, 54) = 2·3·3·3·7 = 378.

Ознаки подільності на 2, 4, 8, 3, 9, 6, 5, 25, 10, 100, 1000, 11.

Ознака подільності на 2. Число ділиться на 2, якщо його остання цифра — нуль або ділиться на 2. Числа, що діляться на два, називаються парними, які не діляться на два — непарними.

Ознака подільності на 4. Число ділиться на 4, якщо дві його останні цифри — нулі чи утворюють число, яке ділиться на 4.

Ознака подільності на 8. Число ділиться на 8, якщо три його останні цифри — нулі чи утворюють число, яке ділиться на 8.

Ознаки подільності на 3 і 9. Число ділиться на 3, якщо його сума цифр ділиться на 3. Число ділиться на 9, якщо його сума цифр ділиться на 9.

Ознака подільності на 6. Число ділиться на 6, якщо воно ділиться на і на 2 і на 3.

Ознака подільності на 5. Число ділиться на 5, якщо його остання цифра — нуль або 5.

Ознака подільності на 25. Число ділиться на 25, якщо дві його останні цифри — нулі чи утворюють число, яке ділиться на 25.

Ознака подільності на 10. Число ділиться на 10, якщо його остання цифра — нуль.

Ознака подільності на 100. Число ділиться на 100, якщо дві його останні цифри — нулі.

Ознака подільності на 1000. Число ділиться на 1000, якщо три його останні цифри — нулі.

Ознака подільності на 11. На 11 діляться ті числа, у яких сума цифр, що стоять на непарних місцях, або дорівнює сумі цифр, що стоять на парних місцях, або відрізняється від неї на число, яке ділиться на 11.

Дії зі звичайними дробами

Розширення дробу. Значення дробу не змінюється, якщо помножити його чисельник і знаменник на одне і те ж число, відмінне від нуля. Це перетворення називається розширенням дробу. Наприклад,

$$\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 6}{5\cdot 6}=\frac{12}{30};\quad \frac{5}{18}=\frac{5\cdot 5}{18\cdot 5}=\frac{25}{90}.$$

Скорочення дробу. Значення дробу не змінюється, якщо розділити його чисельник і знаменник на одне і те ж число, відмінне від нуля. Це перетворення називається скороченням дробу. Наприклад,

$$\frac{9}{12}=\frac{3\cdot 3}{3\cdot 4}=\frac{3}{4};\quad \frac{18}{28}=\frac{2\cdot 9}{2\cdot 14}=\frac{9}{14}.$$

Порівняння дробів. З двох дробів з однаковими чисельниками той більше, знаменник якого менше. З двох дробів з однаковими знаменниками той більше, чисельник якого більше:

$$\frac{3}{7}<\frac{3}{5};\quad \frac{7}{9}>\frac{5}{9}.$$

Для порівняння дробів, у яких чисельник і знаменник різні, необхідно розширити їх, щоб привести до спільного знаменника.

Приклад. Порівняти два дробу: $\frac{2}{5}$ і $\frac{7}{18}$.

Розв'язання. Розширимо перший дріб на знаменник другого, а другий — на знаменник першого:

$$\frac{2}{5}=\frac{36}{90};\quad \frac{7}{18}=\frac{35}{90},\ \text{тоді маємо}\ \frac{2}{5}>\frac{7}{18},\ \text{тому що}\ \frac{36}{90}>\frac{35}{90}.$$

Використане тут перетворення називається приведенням дробів до спільного знаменника.

Додавання і віднімання дробів. Якщо знаменники дробів однакові, то для того, щоб скласти дроби, треба скласти їх чисельники, а для того, щоб відняти дроби, треба знайти різницю їх чисельників (у тому ж порядку). Отримана сума або різниця буде чисельником результату; знаменник залишиться тим же. Якщо знаменники дробів різні, необхідно спочатку привести дроби до спільного знаменника. При додаванні змішаних чисел їх цілі і дробові частини складаються окремо. При відніманні змішаних чисел ми рекомендуємо спочатку перетворити їх до виду неправильних дробів, потім відняти від однієї іншу, а після цього знову привести результат, якщо потрібно, до виду змішаного числа.

Приклад. $6\frac{3}{8}+2\frac{3}{12}=6+2+\frac{3}{8}+\frac{3}{12}=8+\frac{9}{24}+\frac{6}{24}=8+\frac{15}{24}=8\frac{5}{8}$;

$$7\frac{1}{9}-3\frac{7}{8}=7-3+\frac{1}{9}-\frac{7}{8}=4+\frac{8}{72}-\frac{63}{72}=3+\frac{72}{72}+\frac{8-63}{72}=3+\frac{72+8-63}{72}=3\frac{17}{72}.$$

Множення дробів. Помножити деяке число на дріб означає помножити його на чисельник і розділити добуток на знаменник. Отже, ми маємо загальне правило множення дробів: для перемноження дробів необхідно перемножити окремо їх чисельники і знаменники і розділити перший добуток на другій.

Приклад. $\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{8}=\frac{2\cdot 7}{9\cdot 8}=\frac{7}{36}$.

Ділення дробів. Для того, щоб розділити деяке число на дріб, необхідно помножити це число на зворотний дріб.

Приклад. $\frac{2}{5}:\frac{12}{25}=\frac{2}{5}\cdot\frac{25}{12}=\frac{2\cdot 25}{5\cdot 12}=\frac{5}{6}$.

Дійсні числа зображають точками на координатній осі або числовій прямій. Це означає, що кожному числу $x\in R$ відповідає певна точка прямої і, навпаки, кожній точці прямої відповідає певне число. Із двох дійсних чисел меншим (більшим) є те число, яке при зображенні чисел точками на числовій прямій розташовано лівіше (правіше).

Нехай a і b — дійсні числа, причому $a<b$. Розглянемо числові множини:

$$[a;b]=\{\,x\,|\,a\le x\le b\,\};\quad (a;+\infty)=\{\,x\,|\,a<x\,\};$$
$$(a;b]=\{\,x\,|\,a<x\le b\,\};\quad (-\infty;b)=\{\,x\,|\,x<b\,\};$$
$$(a;b)=\{\,x\,|\,a<x<b\,\};\quad [a;+\infty)=\{\,x\,|\,a\le x\,\};$$
$$[a;b)=\{\,x\,|\,a\le x<b\,\};\quad (-\infty;b]=\{\,x\,|\,x\le b\,\};$$
$$(-\infty;+\infty)=\{\,x\,|\,-\infty<x<+\infty\,\}.$$

Усі ці множини називаються числовими *проміжками,* причому $[a;b]$ — відрізок (*сегмент*), $(a;b)$, $(-\infty;b)$, $(a;+\infty)$, $(-\infty;+\infty)$ — інтервали, $(a;b]$, $[a;b)$, $[a;+\infty)$, $(-\infty,b]$ — піввідрізки (півінтервали).

Проміжки $[a;b], (a;b), (a;b], [a;b)$ — називаються скінченими і позначаються спільним символом $\langle a;b \rangle$; точки a і b називають відповідно лівим і правим кінцем цих проміжків. Останні з наведених проміжків називаються нескінченними. Символи $-\infty$ і $+\infty$ в цих проміжках не треба розглядати як числа; це символічне позначення процесу необмеженого віддалення точок числової осі від її початку вліво і вправо. Арифметичні операції над символами $-\infty$ і $+\infty$ неприпустимі. Вважають, що будь-яке дійсне число x більше, ніж $-\infty$, і менше, ніж $+\infty$: $-\infty < x < +\infty$.

Розглянемо розв'язання тестових завдань рівня ЗНО для наведеної теми.

У завданні 1 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку відповідей.

1.1. Укажіть, скільки можна скласти різних правильних дробів, чисельниками і знаменниками яких є числа 3, 5, 6, 7, 8, 9 .

а	**б**	**в**	**г**	**д**
15	28	50	120	34

Розв'язання. Кількість правильних дробів N=5+4+3+2+1=15. Обираємо п. 1.1а.

У завданні 2 до кожного з рядків інформації, позначених цифрами, виберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою. Поставте позначки в таблицях відповідей до завдань на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

1.2. Установіть відповідність між числом (1– 4) та множиною, до якої воно належіть (А–Д).

Число	**Множина**
1. 29	**А** множина ірраціональних чисел
2. 1,85	**Б** множина цілих чисел, що не є натуральними числами
3. $\sqrt{8,1}$	**В** множина простих чисел
4. -23	**Г** множина парних натуральних чисел
	Д множина раціональних чисел, що не є цілими числами

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1			**Х**		
2					**Х**
3	**Х**				
4		**Х**			

Розв′язання. 29 – просте число. 1,85 – раціональне, що не є цілим, число. $\sqrt{8,1}$ – ірраціональне число. – 23 – ціле, що не є натуральним, число.

Розв′язання задачі 3 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення до бланку відповідей.

1.3. Знайдіть натуральне, одноцифрове число N , якщо відомо, що сума 501+N ділиться на 9 без остачі.

Розв′язання: за ознакою подільності сума цифр 5+0+1+N ділиться на 9. Тоді N = 3.

Відповідь.			3	,	0		

Тема 2. Відношення та пропорції. Основні задачі на відсотки

Відношення — частка від ділення однієї величини на іншу.

Приклад. Студент вивчив 40 з 50 питань програми. Яке відношення кількості засвоєних питань до загальної кількості питань? Шукане відношення

$$\frac{40}{50} = 0,8 .$$

Пропорція — це рівність між двома різними відношеннями $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ або $a : b = c : d$ за умови, що жодна із величин, які складають пропорцію, не дорівнюють нулю.

При цьому b і c — середні члени пропорції; a і d — крайні члени. *Основна властивість пропорції* $a \cdot d = b \cdot c$, тобто добуток крайніх членів пропорції дорівнює добутку середніх її членів.

Відсоток — це сота частина одиниці. Запис 1% від a означає 0,01a. Існує три основних типи задач на відсотки:

<u>*Задача 1.*</u> Знайти вказаний відсоток від заданого числа. Задане число множиться на вказане число відсотків, а потім добуток ділиться на 100.

Приклад. Вклад у банку має річний приріст 6%. Початкова сума вкладу дорівнювала 100000 грн. На скільки зросте сума вкладу в кінці року?

Розв'язання. 100000 · 6 : 100 = 6000 грн.

<u>*Задача 2.*</u> Знайти число за заданим іншим числом та його величиною у відсотках від шуканого числа. Задане число ділиться на його процентний вираз і результат множиться на 100.

Приклад. Зарплата в січні дорівнювала 2500 грн., що склало 5% від річної зарплати. Яка була річна зарплата?

Розв'язання. 2500: 5 · 100 = 50000 грн.

<u>*Задача 3.*</u> Знайти процентне вираження одного числа від іншого. Перше число ділиться на друге і результат множиться на 100.

Приклад. Завод виготовив за рік 20000 автомобілів, а в наступному році — тільки 18000 автомобілів. Скільки відсотків це склало по відношенню до випуску попереднього року?

Розв'язання. 18000: 20000 · 100 = 90%.

Збільшення (зменшення) на $p\%$: якщо число a збільшити (зменшити) на $p\%$, то ми отримаємо число $a\left(1+\frac{p}{100}\right)$ після збільшення, та $a\left(1-\frac{p}{100}\right)$ після зменшення.

Формула складних відсотків. Якщо a — початковий вклад на депозит, p — річний відсоток, то в кінці першого року ми отримаємо $a\left(1+\frac{p}{100}\right)$, в кінці другого року $a\left(1+\frac{p}{100}\right)+\frac{p}{100}a\left(1+\frac{p}{100}\right)=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ і таке інше. Отже в кінці $n-$го року депозит становитиме $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$.

Приклад. Від шматка проводу відрізали спочатку 55%, а потім ще 40% остачі. Скільки відсотків шматка залишилося.

Розв'язання. $(100-55)-0,4\cdot 45=45\cdot 0,6=27$.

Розглянемо розв'язання тестових завдань рівня ЗНО для наведеної теми.

У завданні 1 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку відповідей.

2.1. Знайдіть $\frac{1}{a}$, якщо $\frac{2}{b} = 6 \cdot a$.

а	б	в	г	д
$\frac{3}{b}$	$\frac{1}{3}$	$3b$	$\frac{1}{3b}$	$\frac{1}{3} + b$

Розв'язання. $\frac{2}{b} = 6 \cdot a \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{6}{2} \cdot b \Rightarrow \frac{1}{a} = 3b$.Обираємо п. 2.1в.

У завданні 2 до кожного з рядків інформації, позначених цифрами, виберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою. Поставте позначки в таблицях відповідей до завдань на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

2.2. Установіть відповідність між значеннями відношень (1 – 4) при $m = 2$ і проміжками (А – Д), яким вони належать .

Відношення	Інтервал
1. $\frac{m}{3-4}$	**А** $(1; 3)$
2. $(5-3)\cdot(3-m)$	**Б** $(-3;-1)$
3. $\frac{m-m}{3+4}$	**В** $(-1;1)$
4. $(1+3)\cdot(1-m)$	**Г** $(3; 5)$
	Д $(-5;-3)$

	А	Б	В	Г	Д
1		**Х**			
2	**Х**				
3			**Х**		
4					**Х**

Розв'язання. 1. $\frac{m}{3-4} = \frac{2}{-1} = -2$, обираємо інтервал $(-3;-1)$. **2.** $(5-3)(3-m) = 2 \cdot 1 = 2$, обираємо інтервал $(1; 3)$. **3.** $\frac{m-m}{3+4} = \frac{0}{7} = 0$, обираємо інтервал $(-1;1)$.

4. $(1+3)\cdot(1-m) = 4\cdot(-1) = -4$**,** обираємо інтервал $(-5;-3)$**.**

Розв'язання задачі 3 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення до бланку відповідей.

2.3. За видачу свідоцтва про право на майно стягується мито в розмірі 0,5% від вартості. Скільки державного мита треба сплатити спадкоємцю, якщо вартість майна становить 48000 грн.? .

Розв'язання. $\frac{0{,}5}{100} \cdot 48000 = 240$ грн.

Відповідь.

2	4	0	,	0		

Тема 3. Раціональні, ірраціональні, степеневі, показникові, логарифмічні, тригонометричні вирази та їхні перетворення

Математичний вираз — це запис, що складається з чисел, змінних та знаків дії між ними. Вираз може містити дужки, знаки модуля, логарифма тощо, але не може містити знаки відношень.

Значення змінних, при яких можливі усі математичні дії, записані в виразі, називають допустимими значеннями змінних.

Наприклад: $2+x-x\sqrt{x}$; $\dfrac{x^2+4}{x-4}$ — алгебраїчні вирази. У першому виразі допустимі значення змінної x — це невід'ємні значення $(x \geq 0)$; для другого виразу допустимими є всі дійсні значення x, крім $x=4$.

Тотожність — це рівність, справедлива при всіх допустимих значеннях змінних, які входять до неї. Наприклад: $a^2+2ab=a\cdot(a+2b)$.

Тотожне перетворення виразу — це заміна одного виразу іншим, тотожно рівним йому.

Раціональні вирази. Деякі важливі формули

1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

2) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

3) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

4) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

5) $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$.

6) $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$.

7) $(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n, n \in N$.

8) $a^{2n} - b^{2n} = \left(a^n - b^n\right)\left(a^n + b^n\right)$.

9) $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$, $n-$непарне.

10) $a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$, $n-$непарне.

Приклад. Спростити вираз $\dfrac{a^6+b^6}{a^4-b^4} - a^2 + b^2$.

Розв'язання.

$$\frac{a^6+b^6}{a^4-b^4} - a^2 + b^2 = \frac{\left(a^2\right)^3 + \left(b^2\right)^3}{\left(a^2\right)^2 - \left(b^2\right)^2} - a^2 + b^2 = \frac{\left(a^2+b^2\right)\left(a^4 - a^2b^2 + b^4\right)}{\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2\right)} - a^2 + b^2 =$$

$$= \frac{a^4 - a^2b^2 + b^4}{a^2-b^2} - a^2 + b^2 = \frac{a^2b^2}{a^2-b^2}$$

Арифметичний корінь

Число c називається арифметичним коренем $n-$го степеня $(n \in N)$ числа $a > 0$, якщо виконується рівність $c^n = a$, тобто $c = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow c^n = a$.

Основні властивості арифметичного кореня:

Нехай $a, b \in Q,\ m, n, k \in N,\ a \geq 0, b \geq 0$. Тоді

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, 2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ b > 0$, 3) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$

4) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a^{m-n}},\ a > 0$, 5) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$, 6) $\sqrt[k]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mk]{a}$,

7) $\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[nm]{a^{km}}$, 8) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, 9) $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$,

10) $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$, 11) $b > a > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{b} > \sqrt[n]{a}$.

Приклад. Порівняти числа $\sqrt[4]{3}$ і $\sqrt[6]{5}$.

Розв'язання. $\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27}$; $\sqrt[6]{5} = \sqrt[12]{5^2} = \sqrt[12]{25}$. Оскільки $25 < 27$, то $\sqrt[4]{3} > \sqrt[6]{5}$.

Узагальнене поняття степеня з раціональним показником

Степенем числа $a>0$ з раціональним показником $r=\frac{m}{n}$, де $m\in Z, n\in N$, $(n>1)$ називається число $\sqrt[n]{a^m}$.

Для степеня з раціональним показником зберігаються всі властивості степенів з цілими показниками, тобто для будь-яких раціональних чисел r і s та будь-яких додатних чисел a і b виконуються рівності

1) $a^r\cdot a^s=a^{r+s}$, 2) $a^r:a^s=a^{r-s}$, 3) $\left(a^r\right)^s=a^{rs}$, 4) $\left(ab\right)^r=a^rb^r$,

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}$, 6) $\frac{1}{a^r}=a^{-r}$, 7) $a^0=1$, 8) $\left(\frac{a}{b}\right)^r=\left(\frac{b}{a}\right)^{-r}$.

Логарифми

Логарифмом *c* додатного числа *a* за основою $b\left(b>0, b\neq 1\right)$ називається показник степеня, до якого треба піднести основу *b*, щоб дістати число a:

$$\log_b a=c\Leftrightarrow b^c=a.$$

Основні властивості логарифмів:

1) $b^{\log_b a}=a$ — *основна логарифмічна тотожність*, де $b>0$, $b\neq 1$, $a>0$.

2) $\log_c ab=\log_c|a|+\log_c|b|$, $ab>0, c>0, c\neq 1$.

3) $\log_c\frac{a}{b}=\log_c|a|-\log_c|b|$, $ab>0, c>0, c\neq 1$.

4) $\log_c a^p=p\log_c a$, $a>0, c>0, c\neq 1$, якщо p — непарне;

$\log_c a^p=p\log_c|a|$, $a\neq 0, c>0, c\neq 1$, якщо p — парне.

5) $\log_{c^q} a=\frac{1}{q}\log_c a, a>0, c>0, c\neq 1$.

6) $\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}, a>0, b>0, c>0, c\neq 1$.

7) $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}, a>0, b>0, a\neq 1, b\neq 1$.

8) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$, $a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1$.

Якщо $c = 10$ ми дістаємо *десятковий* логарифм, тобто $\log_{10} a = \lg a$, якщо $c = e\,(e = 2{,}718....)$, то ми приходимо до *натурального* логарифму $\log_e a = \ln a$.

Приклад. Обчислити $\left(\frac{1}{25}\right)^{6\log_{125} 2}$.

Розв′язання. $\left(\frac{1}{25}\right)^{6\log_{125} 2} = 5^{-12\log_{5^3} 2} = 5^{-\frac{12}{3}\log_5 2} = \left(5^{\log_5 2}\right)^{-4} = 2^{-4} = \frac{1}{16}$.

Логарифмування — операція знаходження логарифма величини, зворотна відносно піднесення до степеня.

Приклад. Прологарифмувати вираз $\frac{a^2b^7}{c^8}$, якщо $a > 0, b > 0, c < 0$.

Розв′язання.

$$\ln\left(\frac{a^2b^7}{c^8}\right) = \ln a^2 + \ln b^7 - \ln c^8 = 2\ln|a| + 7\ln b - 8\ln|c| = 2\ln a + 7\ln b - 8\ln(-c).$$

Тригонометричні вирази

У прямокутному трикутнику ΔABC визначимо синус, косинус, тангенс і котангенс кута α (рис. 1):

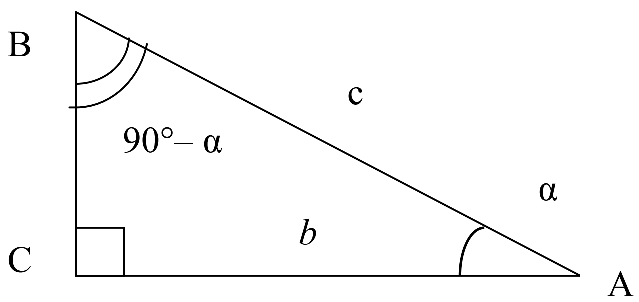


Рис. 1

$$\sin\alpha = \frac{a}{c};\quad \cos\alpha = \frac{b}{c};\quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b};\quad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a},$$

де a — катет, що лежить навпроти кута α, b — катет, прилеглий до кута α, c — гіпотенуза.

Зв'язок між тригонометричними функціями одного аргументу :

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ — *основна тригонометрична тотожність*

2) $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

3) $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1 \ \left(\alpha \ne k\pi, \alpha \ne \pi/2 + k\pi, k \in Z\right)$

4) $\sin(\pi/2 \pm \alpha) = \cos\alpha$; $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha, \cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin\alpha$.

5) $\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos\alpha$; $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$.

6) $\cos(2\pi \pm \alpha) = \cos\alpha$; $\sin(2\pi \pm \alpha) = \pm\sin\alpha$.

7) $\mathrm{tg}(\pi/2 - \alpha) = \mathrm{ctg}\alpha$, $\mathrm{tg}(\pi/2 + \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$; $\mathrm{tg}(\pi \pm \alpha) = \pm\mathrm{tg}\alpha$

Формули суми і різниці кутів

1) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

2) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

3) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

4) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

5) $\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$.

6) $\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$.

Формули для функцій подвійного, потрійного та половинного кутів

1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}$.

2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}$.

3) $\mathrm{tg}\, 2\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$.

4) $\sin 3\alpha = \sin\alpha\left(3 - 4\sin^2\alpha\right)$.

5) $\cos 3\alpha = \cos\alpha\left(4\cos^2\alpha - 3\right)$.

6) $\mathrm{tg}3\alpha = \mathrm{tg}\alpha \cdot \dfrac{3-\mathrm{tg}^2\alpha}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha}$.

7) $\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$; $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Формули перетворення суми і різниці у добуток

1) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

2) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

3) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

4) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

5) $\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

6) $\mathrm{ctg}\alpha \pm \mathrm{ctg}\beta = \dfrac{\pm\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

Формули перетворення добутку в суму

1) $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$.

2) $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$.

3) $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$.

Приклад. Обчисліть $\cos\alpha\sin\beta$, якщо $\sin(\alpha+\beta) = 0,5; \sin(\alpha-\beta) = -0,5$.

Розв'язання.

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\left(\frac{(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)}{2}\right)\cos\left(\frac{(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)}{2}\right) =$$

$$= 2\sin\beta\cos\alpha.$$

$$2\sin\beta\cos\alpha = 0,5 + 0,5 = 1 \Rightarrow \cos\alpha\sin\beta = 0,5.$$

Розглянемо розв'язання тестових завдань рівня ЗНО для наведеної теми.

У завданні 1 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку відповідей.

3.1. Знайдіть значення виразу $\dfrac{\sqrt{16+y^2-8y}}{y-4}$, якщо $y=3{,}5$.

а	б	в	г	д
– 0,5	– 1	0	0,5	1

Розв'язання: $\dfrac{\sqrt{16+y^2-8y}}{y-4}=\dfrac{\sqrt{(y-4)^2}}{y-4}=\dfrac{|y-4|}{y-4}$, при $y=3{,}5$ маємо $\dfrac{|3{,}5-4|}{3{,}5-4}=-1$, обираємо п. 1.б.

У завданні 2 до кожного з рядків інформації, позначених цифрами, виберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою. Поставте позначки в таблицях відповідей до завдань на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

3.2. Установіть відповідність між виразами (1– 4) та їх числовими значеннями (А–Д).

Вираз	Значення
1. $\log_5\sqrt{5}$	**А** 1
2. $\log_5\left(\dfrac{50}{10}\right)$	**Б** – 1
3. $\log_{\sqrt{5}}\left(\sqrt{4}-1\right)$	**В** 0,5
4. $\log_{\sqrt{5}}5$	**Г** 2
	Д 0

	А	Б	В	Г	Д
1			**Х**		
2	**Х**				
3					**Х**
4				**Х**	

Розв'язання: 1. $\log_5\sqrt{5}=\log_5 5^{1/2}=\dfrac{1}{2}$, обираємо 1.В. **2.** $\log_5\left(\dfrac{50}{10}\right)=\log_5 5=1$, обираємо 2.А. **3.** $\log_{\sqrt{5}}\left(\sqrt{4}-1\right)=\log_{\sqrt{5}}1=0$, обираємо 3.Д. **4.** $\log_{\sqrt{5}}5=\log_{\sqrt{5}}\sqrt{5}^2=2$**,** обираємо 4.Г.

Розв'язання задачі 3 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення до бланку відповідей.

3.3. Обчисліть $\sqrt[5]{0{,}00032\cdot 32^5}$.

Розв'язання: $\sqrt[5]{0{,}00032\cdot 32^5}=\sqrt[5]{(0{,}2)^5}\cdot\sqrt[5]{32^5}=0{,}2\cdot 32=6{,}4$.

Відповідь.

		6	,	4		

Тема 4. Рівняння, нерівності та їх системи. Застосування рівнянь, нерівностей та їх систем до розв'язування текстових задач

Рівність, яка містить одну або кілька змінних, позначених буквами, називають рівнянням.

За характером операцій, що виконуються над змінними, розрізняють алгебраїчні, тригонометричні, показникові, логарифмічні та інші рівняння.

Алгебраїчні рівняння типу $ax+b=0,\ ax+by+c=0$, тощо називаються лінійними (першого порядку), рівняння типу $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$, $a_0\neq 0,\ a_i\in R,\ i=\overline{0,n}$ називається рівнянням $n-$го порядку (степеня). Рівняння, які містять змінну під знаком арифметичного кореня, називаються *ірраціональними*.

Областю допустимих значень (ОДЗ) рівняння або ж областю визначення рівняння називається множина значень невідомої, для яких мають сенс обидві частини рівняння. ОДЗ виразу $f(x)$ будемо позначати $D(f(x))=D(f)$.

Коренями рівняння називають ті значення змінних, при яких рівняння перетворюється на правильну числову рівність. Розв'язати рівняння – означає знайти всі його корені або встановити, що їх немає.

Якщо корні рівняння **I** є коренями рівняння **II**, то рівняння **II** є наслідком рівняння **I**. Будемо писати $\mathrm{I}\Rightarrow\mathrm{II}$.

Два рівняння називаються *еквівалентними* (рівносильними) якщо вони мають одні й ті самі корені, тобто кожне рівняння є наслідком іншого: $\mathrm{I}\Leftrightarrow\mathrm{II}$.

Перетворення, що приводять до рівняння рівносильного початковому, називаються еквівалентними (рівносильними) перетвореннями.

До еквівалентних перетворень відносяться наступні перетворення:

1) До обох частин рівняння можна додати (відняти) будь-який вираз, що має сенс при всіх допустимих значеннях змінної.

2) Обидві частини рівняння можна помножити (поділити) на один і той самий відмінний від нуля вираз, який має сенс при всіх допустимих значеннях змінної.

Розглянемо квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Величина $D = \sqrt{b^2 - 4ac}$ називається дискримінантом цього рівняння. З курсу шкільної математики відомо, що у випадку, коли $D < 0$ квадратне рівняння не має дійсних коренів, якщо $D = 0$, то рівняння має єдиний корінь, якщо $D > 0$, то квадратне рівняння має два дійсних кореня, що знаходяться за формулою $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

У деяких випадках доцільно користуватися теоремою Вієта для приведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, згідної якої сума коренів x_1 та x_2 рівняння дорівнює $-p$, а добуток коренів дорівнює q.

Приклад. Розв’яжіть рівняння $\left|x^2 + 2x - 3\right| = x + 3$. Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має більш ніж один корінь, то у відповідь запишіть суму коренів.

Розв’язання.

$$\left|x^2 + 2x - 3\right| = x + 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + 2x - 3 \ge 0 \\ x^2 + 2x - 3 = x + 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 2x - 3 < 0 \\ x^2 + 2x - 3 = -x - 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty; -3] \cup [1; +\infty) \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-3; 1) \\ x^2 + 3x = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty; -3] \cup [1; +\infty) \\ x = -3; x = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-3; 1) \\ x = -3; x = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 2 \\ x = 0 \end{array}\right.$$

Отже, рівняння має три корені, сума яких дорівнює -1.

Приклад. Знайти найменший розв’язок рівняння $\dfrac{1}{x(x+2)} - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{12}$.

Розв′язання. Запишемо рівняння у вигляді $\frac{1}{x^2+2x}-\frac{1}{x^2+2x+1}=\frac{1}{12}$ та зробимо заміну $x^2+2x=t$. Отримаємо наступне рівняння:

$$\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}=\frac{1}{12}\Leftrightarrow\frac{1}{t^2+t}=\frac{1}{12}\Leftrightarrow\begin{cases}t^2+t-12=0\\ t\neq 0, t\neq -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t=3\\ t=-4\end{array}\right.\\ t\neq 0, t\neq -1\end{cases}.$$

Повертаючись до старої змінної, дістанемо:

$$\left[\begin{array}{l}x^2+2x=3\\ x^2+2x=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+2x-3=0\\ x^2+2x+4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1, x=-3\\ x\in\varnothing\end{array}\right..$$

Отже, найменший розв’язок рівняння дорівнює -3.

Нагадаємо декілька прийомів розв’язання простіших *ірраціональних* рівнянь.

1. $\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geq 0\\ f(x)=g(x)^2\\ x\in D(f)\cap D(g)\end{cases}$; 2) $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geq 0 \text{ або } g(x)\geq 0\\ f(x)=g(x)\\ x\in D(f)\cap D(g)\end{cases}$

Приклад. Розв’язати рівняння $\sqrt{3-2x}-\sqrt{1-x}=1$. У відповідь запишіть добуток коренів.

Розв′язання.

$$\sqrt{3-2x}-\sqrt{1-x}=1\Leftrightarrow\sqrt{3-2x}=1+\sqrt{1-x}\Leftrightarrow\begin{cases}3-2x\geq 0\\ 1-x\geq 0\\ \left(\sqrt{3-2x}\right)^2=\left(1+\sqrt{1-x}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq\frac{3}{2}\\ x\leq 1\\ 3-2x=1+2\sqrt{1-x}+1-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 1\\ 1-x=2\sqrt{1-x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 1\\ \sqrt{1-x}\left(\sqrt{1-x}-2\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{1-x} = 0 \\ \sqrt{1-x} = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right..$$

Добуток коренів дорівнює -3.

Показниковим рівнянням називається рівняння, у якому невідома величина знаходиться у показнику степеня.

Простіше показникове рівняння має вид $a^x = b$, та при $a > 0, b > 0, a \ne 1$ існує розв'язок цього рівняння, який знаходиться логарифмуванням обох частин рівняння за основою a.

Рівняння типу $a^{f(x)} = b^{g(x)}, a > 0, b > 0, a \ne 1, b \ne 1$ має розв'язок, який належить області $D^* = D(f) \cap D(g)$ та знаходиться логарифмувaванням обох частин рівняння за основою $p(p > 0, p \ne 1)$. Зокрема, якщо $a = b$ приходимо до рівняння $b^{f(x)-g(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$. Якщо $f(x) = g(x)$, ми приходимо до рівняння $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = 0$.

Рівняння типу $P_n\left(a^{f(x)}\right) = 0$, де $P_n(.)$ — поліном $n-$го порядку, за допомогою підстановки $a^{f(x)} = t\left(t > 0\right)$ приводиться до алгебраїчного рівняння $P_n(t) = 0$.

Приклад. Знайти найбільший корінь рівняння $4^{\sqrt{9-x^2}} = 0,25^{x-3}$.

Розв'язання.

$$4^{\sqrt{9-x^2}} = 0,25^{x-3} \Leftrightarrow 4^{\sqrt{9-x^2}} = \left(4^{-1}\right)^{x-3} \Leftrightarrow \sqrt{9-x^2} = -x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} -x+3 \ge 0 \\ 9-x^2 = \left(-x+3\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ 9-x^2 = x^2-6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ x^2-3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Найбільший корінь рівняння дорівнює 3.

Приклад. Розв'язати рівняння $5^{2x}-4\cdot 5^{x}-5=0$.

Розв′язання. Зробимо заміну $5^{x}=t(t>0)$. Приходимо до квадратного рівняння $t^{2}-4t-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=5 \end{array}\right.$. Корінь $t=-1$ — зайвий корінь. Вертаючись до старої змінної дістаємо $5^{x}=5 \Leftrightarrow x=1$.

Логарифмічним рівнянням називається рівняння, в якому невідома величина знаходиться під знаком логарифму.

Простіше логарифмічне рівняння має вид $\log_{a} x=b, a>0, a\neq 1, x>0$. Операція, яка дозволяє знайти x з даного рівняння називається *потенціюванням* і зводиться до піднесення числа a у степінь b, тобто розв'язок цього рівняння має вид $x=a^{b}$.

Розглянемо ще декілька типів простих логарифмічних рівнянь:

1) $\log_{a} f(x)=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a^{g(x)}=f(x) \\ x\in D^{*} \end{cases};$

2) $\log_{a} f(x)=\log_{a} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \text{ або } g(x)>0 \\ f(x)=g(x) \\ x\in D^{*} \end{cases}.$

Приклад. Розв'яжіть рівняння $\log_{6}(x+3)+\log_{6}(x+8)=2$.

Розв′язання.

$$\log_{6}(x+3)+\log_{6}(x+8)=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3>0 \\ x+8>0 \\ \log_{6}(x+3)(x+8)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x^{2}+11x+24=6^{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x^{2}+11x-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-12 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Приклад. Знайти найбільший розв'язок рівняння $x^{\log_{2} x}=16$.

Розв′язання. Прологарифмуємо обидві частини рівняння за основою 2.

$$x^{\log_2 x}=16 \Leftrightarrow \log_2\left(x^{\log_2 x}\right)=\log_2 16 \Leftrightarrow \left(\log_2 x\right)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=2\\ \log_2 x=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\ x=\dfrac{1}{4}\end{array}\right..$$

Отже, найбільший розв'язок рівняння дорівнює 4.

Рівняння, які містять невідому в якості аргументу тригонометричних функцій, називаються *тригонометричними рівняннями*.

Розглянемо простіші тригонометричні рівняння.

$\sin x=0;\quad x=\pi n,\ n\in Z;$

$\sin x=\pm 1;\quad x=\pm\dfrac{\pi}{2}+2\pi n.$

$\sin x=a;\ 0<|a|<1;\quad x=(-1)^n\arcsin a+\pi n;\ n\in Z.$

$\cos x=0;\quad x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$

$\cos x=-1;\quad x=\pi+2\pi n;$

$\cos x=1;\quad x=2\pi n;\ n\in Z;$

$\cos x=a;\ 0<|a|<1;\quad x=\pm\arccos a+2\pi n;\ n\in Z.$

$\mathrm{tg}x=a;\quad x=\mathrm{arctg}a+\pi n;\ n\in Z;$

$\mathrm{ctg}x=a;\quad x=\mathrm{arcctg}a+\pi n;\ n\in Z;$

Треба зауважити, що область визначення тригонометричного рівняння цілого типа, яке містить тільки синуси і косинуси є вся дійсна вісь. Отже, під час розв'язування зазначених рівнянь область їх допустимих значень не визначається.

Приклад. Знайти корені рівняння $8\cos^2 x+6\sin x-3=0$, які належать інтервалу $\left(-\pi/3;2\pi/3\right)$.

Розв'язання. На підставі основної тригонометричної тотожності маємо, що $\cos^2 x=1-\sin^2 x$. Тоді початкове рівняння можна переписати у еквівалентному вигляді:

$$8\cos^2 x+6\sin x-3=0 \Leftrightarrow 8\left(1-\sin^2 x\right)+6\sin x-3=0 \Leftrightarrow 8\sin^2 x-6\sin x-5=0.$$

Покладемо $\sin x=t, |t|\le 1$. Приходимо до квадратного рівняння

$$8t^2-6t-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1/2\\ t=5/4\end{array}\right..$$

Корінь $t=5/4$ — зайвий корінь. Отже,

$$\sin x=-1/2\Leftrightarrow x=(-1)^k\arcsin(-1/2)+k\pi,k\in Z\Leftrightarrow x=(-1)^{k+1}\pi/6+k\pi,k\in Z$$

Тепер з'ясуємо, які з розв'язків рівняння належать інтервалу $\left(-\pi/3;2\pi/3\right)$.

Нехай спочатку $k=2n-1,n\in Z$. Тоді

$$-\frac{\pi}{3}<(-1)^{2n-1+1}\frac{\pi}{6}+(2n-1)\pi<\frac{2\pi}{3},n\in Z$$
$$-\frac{1}{3}<\frac{1}{6}+2n-1<\frac{2}{3},n\in Z\Leftrightarrow\frac{1}{4}<n<\frac{3}{4},n\in Z\Rightarrow n\in\varnothing$$

Нехай тепер $k=2n,n\in Z$. Тоді

$$-\frac{\pi}{3}<(-1)^{2n+1}\frac{\pi}{6}+2n\pi<\frac{2\pi}{3},n\in Z$$
$$-\frac{1}{3}<-\frac{1}{6}+2n<\frac{2}{3},n\in Z\Leftrightarrow-\frac{1}{12}<n<\frac{5}{12},n\in Z\Rightarrow n=0$$

Отже, для $k=0$ дістаємо розв'язок рівняння $-\pi/6\in\left(-\pi/3;2\pi/3\right)$.

Розглянемо декілька прикладів застосування алгебраїчних рівнянь при розв'язуванні текстових задач.

Задача 1. Змішали 30%-ий розчин соляної кислоти з 10%-им й отримали 600 г 15%-го розчину. Яку кількість кожного розчину було взято?

Розв'язання. Нехай першого розчину було узято x грамів, тоді другого розчину було узято $\left(600-x\right)$ г. Тоді

$$0{,}3x+0{,}1\cdot(600-x)=0{,}15\cdot600\Leftrightarrow0{,}2x=30\Leftrightarrow x=150.$$

Отже, першого розчину було взято 150 г , а другого – 450 г.

Задача 2. Товарний потяг затримано в дорозі на 12 хв. Потім на відстані 60 км він наздоганяв втрачений час, збільшивши швидкість на 15 км/год. Знайти початкову швидкість потяга.

Розв'язання. Нехай x км/год — початкова швидкість потяга. Після збільшення його швидкість стала $x+15$ км/год. Час, за який потяг проходить

60 км до і після збільшення швидкості дорівнює $60/x$ та $60/(x+15)$ годин. За умовою задачі $\frac{60}{x}-\frac{60}{x+15}=\frac{12}{60}\Leftrightarrow x^2+15x-4500=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=60\\x=-75\end{array}\right.$.

Отже початкова швидкість потяга дорівнює 60 км/год.

Нерівності різних типів та методи їх розв'язання

Два вирази, з’єднані знаком «більше»($>$), «менше»($<$), «не більше»($\le$), «не менше» ($\ge$), дають нерівність.

Числовими називаються нерівності, в яких обидві частини є числами. Якщо хоча б одна частина нерівності є виразом із змінними, така нерівність називається нерівністю із змінними.

Доводять ті нерівності, які є висловленнями. Щоб довести нерівність $A<B$, де A і B — числа, достатньо показати, що $B-A$ додатне число. Якщо A і B — вирази зі змінними, то щоб довести, що $A<B$, достатньо переконатися в тому, що для кожного значення із заданої множини значень $B-A$ має додатне числове значення.

Розв’язком нерівності називають значення змінної (змінних) при яких нерівність перетворюється на правильну числову нерівність.

Приклад 1. Розв’язати нерівність $\frac{x^2-3x+2}{x-4}\ge 0$.

Розв'язання.

$$\frac{x^2-3x+2}{x-4}\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-3x+2\ge 0\\x-4>0\end{cases}\\\begin{cases}x^2-3x+2\le 0\\x-4<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-\infty;1]\cup[2;+\infty)\\x\in(4;\infty)\end{cases}\\\begin{cases}x\in[1;2]\\x\in(-\infty;4)\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in[1;2]\cup(4;\infty).$$

Розглянемо декілька типів ірраціональних нерівностей

$$1)\ \sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\ge 0\\f(x)>g(x)\\x\in D^*\end{cases}\quad 2)\ \sqrt{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\ge 0\\f(x)\ge 0\\f(x)<g^2(x)\\x\in D^*\end{cases}$$

3) $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \ge 0 \\ x \in D^* \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) > g^2(x) \\ x \in D^* \end{cases} \end{array} \right.$ 4) $\sqrt[3]{f(x)} > \sqrt[3]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ x \in D^* \end{cases}$.

Приклад. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+25} < x+6$.

Розв′язання.

$$\sqrt{x+26} < x+6 \Leftrightarrow \begin{cases} x+26 \ge 0 \\ x+6 \ge 0 \\ x+26 < (x+6)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -6 \\ x^2 + 11x + 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -6 \\ x \in (-\infty; -10) \cup (-1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1; +\infty)$$

Показникова нерівність простішого типу має вигляд: $a^{f(x)} > a^{g(x)}$.

1) якщо $a > 1$, то $f(x) > g(x), x \in D^*$;

2) якщо $0 < a < 1$, то $f(x) < g(x), x \in D^*$.

Приклад. Розв'язати нерівність $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$.

Розв′язання.

$$4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = t, t > 0 \\ t^2 - 6t + 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = t, t > 0 \\ 2 < t < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < 2^x < 4 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Логарифмічна нерівність простішого типу має вигляд:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x).$$

1) якщо $a > 1$, то $\begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \\ x \in D^* \end{cases}$; 2) $0 < a < 1$, то $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \\ x \in D^* \end{cases}$.

Приклад. Розв'язати нерівність $\log_{0,5}(x^2 + x) \ge -1$.

Розв'язання.

$$\log_{0,5}(x^2+x)\ge -1 \Leftrightarrow \log_{0,5}(x^2+x)\ge \log_{0,5}0,5^{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x>0 \\ x^2+x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)>0 \\ x^2+x-2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty) \\ x\in[-2;1] \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-2;-1)\cup(0;1]$$

Приклад. Розв'язати тригонометричну нерівність $\sin x>0,5$.

Розв'язання. Пряма, яка є графіком функції $y=0,5$ на періоді $[-\pi;\pi]$ перетинає синусоїду в точках $x=\dfrac{\pi}{6}$ і $x=\dfrac{5\pi}{6}$. На інтервалі $\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right)$ синусоїда розміщена вище ніж графік прямої. Отже, на періоді нерівність має розв'язок $x\in\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right)$. Зважаючи на те, що функція $\sin x$ є $2\pi-$періодичною, остаточно дістаємо, що $x\in\bigcup\limits_{k\in Z}\left(\dfrac{\pi}{6}+2k\pi;\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\right)$.

Системи рівнянь з двома змінними

Якщо треба знайти множину спільних розв'язків кількох рівнянь з однаковими змінними, то кажуть, що ці рівняння утворюють систему.

Розв'язком системи рівнянь з кількома змінними називають упорядковану послідовність чисел (за кількістю невідомих), що є розв'язком кожного з рівнянь, які входять в систему.

Система, яка має розв'язки, називається *сумісною*, і *несумісною* – навпаки. Якщо сумісна система має єдиний розв'язок, то вона називається *визначеною*. Якщо розв'язків нескінчена кількість, то система називається *невизначеною*.

Система, у яку всі невідомі входять у першому степені, називається *лінійною*.

Розглянемо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}.$$

З геометричної точки зору кожне рівняння даної системи визначає деяку пряму на площині. Отже кількість розв'язків даної системи залежить від розташування прямих на площині. Можливі три випадки:

1) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ — прямі перетинаються. Отже, система сумісна і визначена.

2) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ — прямі співпадають. Отже. система сумісна і невизначена.

3) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ — прямі паралельні. Отже, система несумісна.

Приклад. Розв'язати систему $\begin{cases} 5x + 8y = 3 \\ 2x - 7y = -9 \end{cases}$.

Розв'язання. Так як $\frac{5}{2} \neq -\frac{8}{7}$ то система сумісна і визначена.

$$\begin{cases} 5x + 8y = 3 \\ 2x - 7y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 16y = 6 \\ 10x - 35y = -45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 16y = 6 \\ -51y = -51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Отже, розв'язком системи є впорядкована пара чисел (–1;1).

Наведемо ще декілька прикладів розв'язання різноманітних систем.

Приклад. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3^{x-2y} = 1/3 \\ 3^x + 3^{2y} = 4\sqrt{3} \end{cases}$. Для одержаного розв'язку $(x_0; y_0)$ системи обчисліть добуток $x_0 \cdot y_0$.

Розв'язання.

$$\begin{cases} 3^{x-2y} = 1/3 \\ 3^x + 3^{2y} = 4\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \cdot 3^{-2y} = 1/3 \\ 3^x + 3^{2y} = 4\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 3^x = u \\ 3^{2y} = v \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} u/v = 1/3 \\ u + v = 4\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3u \\ 4u = 4\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 3\sqrt{3} \\ u = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2y} = 3^{3/2} \\ 3^x = 3^{1/2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{3}{4} \end{cases}.$$

Тоді $x_0 \cdot y_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} = 0{,}375$.

Застосування систем рівнянь для розв′язання текстових задач

Задача. Перший робітник виготовив 60 виробів на 3 години швидше, ніж другий робітник. За який час другий робітник виготовить 90 виробів, якщо працюючи разом, вони виготовили 30 виробів?

Розв′язання. Нехай продуктивність першого робітника x виробів в годину, а другого — y виробів в годину. Приходимо до системи

$$\begin{cases}\dfrac{60}{y}-\dfrac{60}{x}=3\\ x+y=30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=30\\ 20(x-y)=xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=30-y\\ y^2-70y+600=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=30-y\\ \left[\begin{array}{l}y=10\\ y=60\end{array}\right.\end{cases}.$$

Отже, наша система має два розв’язки: $x=20, y=10$ та $x=-30, y=60$. Зрозуміло, що другий розв’язок не задовольняє фізичному змісту задачі. Тоді другий робітник виготовить 90 виробів за $90:10=9$ годин.

Графічний розв′язок рівнянь, нерівностей та систем рівнянь і нерівностей

Графічне подання функцій дозволяє наближено розв’язати будь-яке рівняння з одним невідомим і систему двох рівнянь з двома невідомими. Щоб розв'язати систему двох рівнянь з двома невідомими *x* і *y*, ми розглядаємо кожне з рівнянь як функціональну залежність між змінними *x* і *y* та будуємо графіки цих двох функцій. Координати точок перетину графіків дають нам шукані значення невідомих x і y (тобто розв’язок цієї системи рівнянь).

Графічне подання функцій дозволяє наближено вирішувати нерівності з одним невідомим і системи нерівностей з одним і двома невідомими. Щоб вирішити графічно нерівність з одним невідомим, необхідно перенести всі його члени в одну частину, тобто привести до вигляду: $f(x)>0$, і побудувати графік функції $y=f(x)$. Після цього, використовуючи побудований графік, можна знайти нулі функції, які розділять вісь OX на кілька інтервалів. На основі цього визначаються інтервали *x*, всередині яких знак функції відповідає знаку нерівності.

Розглянемо розв’язання тестових завдань рівня ЗНО для наведеної теми.

У завданні 1 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у

бланку відповідей.

4.1. Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{\pi}{5}\right)^x < \left(\frac{5}{\pi}\right)^4$.

а	б	в	г	д
$(4;+\infty)$	$(-4;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;-4)$	$(-\infty;4)$

Розв'язання: $\left(\frac{\pi}{5}\right)^x < \left(\frac{5}{\pi}\right)^4 \rightarrow \left(\frac{\pi}{5}\right)^x < \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-4} \rightarrow x > -4$, обираємо п.1.б.

У завданні 2 до кожного з рядків інформації, позначених цифрами, виберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою. Поставте позначки в таблицях відповідей до завдань на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

4.2. Розв'яжіть рівняння (1– 4). Установіть відповідність між кожним рівнянням та кількістю його коренів (А–Д) на відрізку $[-6; 6]$.

Рівняння	Кількість коренів
1. $x^4 + 6x^2 + 5 = 0$	**А** один
2. $\log_2 x = -7$	**Б** два
3. $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$	**В** чотири
4. $\frac{x^3 - 9x}{x^3 + 27} = 0$	**Г** жодного
	Д три

	А	Б	В	Г	Д
1				X	
2	X				
3					X
4		X			

Розв'язання: 1. $x^4 + 6x^2 + 5 = 0 \rightarrow (x^2 + 1)\cdot(x^2 + 5) = 0$, отже жодного дійсного кореня обираємо 1.Г. **2.** $\log_2 x = -7 \rightarrow x = 2^{-7} = 1/128$ — один корінь, обираємо 2.А.

3. $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$, $\cos 2x = 1 \rightarrow 2x = 2\pi k$ — три корені, обираємо 3.Д.

4. $\frac{x^3 - 9x}{x^3 + 27} = 0 \rightarrow \frac{(x+3)\cdot x\cdot(x-3)}{(x+3)\cdot(x^2 - 3x + 9)} = 0$ — два корені, обираємо 4.Б.

Розв'язання задачі 3 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення до бланку відповідей.

4.3. Розв'язати систему рівнянь $x - y = 12$; $\frac{y+8}{2x-5} = 2$. Запишіть у відповідь добуток $x_0 \cdot y_0$, якщо пара $(x_0; y_0)$ є розв'язком цієї системи рівнянь.

Розв′язання: $\begin{cases} x-y=12; \\ \dfrac{y+8}{2x-5}=2; \end{cases} \to \begin{cases} y=x-12; \\ \dfrac{x-4}{2x-5}=2; \end{cases} \to \begin{cases} y=x-12; \\ x-4=4x-10; \end{cases} \to \begin{cases} 3x=6; \\ y=x-12. \end{cases} \to \begin{cases} x=2; \\ y=-10. \end{cases}$

Перевірка: $\begin{cases} 2-(-10)=12; \\ \dfrac{-10+8}{2\cdot 2-5}=2. \end{cases}$. У відповідь запишіть $x_0\cdot y_0=2\cdot(-10)=-20.$

Відповідь.

–	2	0	,	0		

Тема 5. Функції, їх основні властивості. Числові послідовності

Нехай задано дві не порожні множини X і Y з елементами $x\in X$ і $y\in Y$ і нехай перетворення f переводить x в y. Тоді це перетворення f (правило, закон, відповідність, відображення, залежність) називають функцією і пишуть $X\xrightarrow{f}Y$ або $f:X\to Y$, де X та Y — множини деяких елементів, не обов'язково числові.

У цьому випадку, як і у випадку числових множин X та Y, ці множини називають *областю визначення* $X=D(f)$ і *множиною значень функції* $Y=E(f)$.

Дві взаємно перпендикулярні прямі OX і OY (рис. 2) утворюють систему координат, які називають декартовими координатами. Прямі OX і OY називаються осями координат. Вісь OX називається віссю абсцис, вісь OY — віссю ординат. Точка O їх перетину називається початком координат. На осях координат вибирається довільний масштаб.

Знайдемо проекції P і Q точки M на осі координат OX і OY. Відрізок OP на осі OX' і число x, що вимірює його довжину у відповідності з обраним масштабом, називається абсцисою точки M; відрізок OQ на осі OY і число y, що виміряє його довжину — ординатою точки M. Величини $x = OP$ і $y = OQ$ називаються декартовими координатами (або просто координатами) точки M.

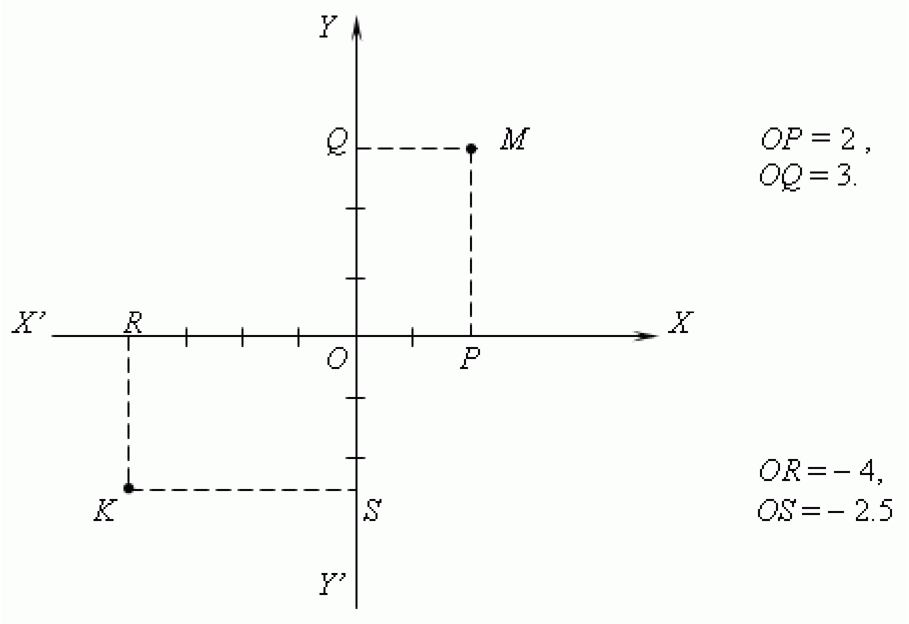


Рис. 2

Вони спираються додатними або від'ємними залежно від вибраного напряму осей координат. Додатні абсциси зазвичай розташовуються на осі OX праворуч від початку координат; додатні ординати — вгору по осі OY від початку координат.

На рис. 2 видно: точка M має абсцису $x = 2$ і ординату $y = 3$; точка K має абсцису $x = -4$ і ординату $y = -2{,}5$. Записується так: $M(2;3), K(-4;-2{,}5)$. В цілому, кожній точці на площині відповідає пара чисел $(x; y)$, і навпаки, кожній парі чисел $(x; y)$ відповідає одна точка на площині.

Познайомимося з графічним представленням функцій.

Щоб надати функцію $y = f(x)$ у вигляді графіка, потрібно:

1) Записати ряд значень функції і її аргументу в таблицю:

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y	y_1	y_2	y_3	…	y_n

2) Перенести координати точок графіка функції з таблиці в систему координат, зазначивши у відповідності з обраним масштабом значення абсцис на осі X і значення ординат на осі Y (рис. 3). У результаті в нашій системі координат буде побудований ряд точок *A, B, C,. . . , F.*

3) З'єднуючи точки *A, B, C,. . . , F* плавною кривою, одержуємо графік

заданої функціональної залежності.

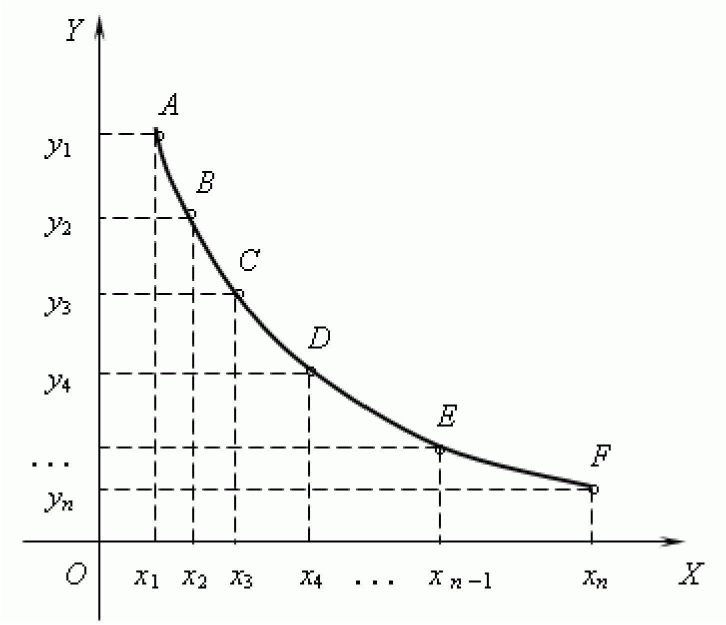


Рис. 3

Таке графічне представлення функції дає наочне уявлення про характер її поведінки, але досягається при цьому точність недостатня. Можливо, що проміжні точки, не побудовані на графіку, лежать далеко від проведеної плавною кривою. Хороші результати в значній мірі залежать також від вдалого вибору масштабів. Тому слід визначити графік функції як геометричне місце точок, координати яких $M(x;y)$ пов'язані заданою функціональною залежністю.

Основні властивості функцій

1) *Парність*. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на симетричній множині. Якщо виконується рівність $f(-x) = f(x)$, то функція називається *парною*, якщо виконується рівність $f(-x) = -f(x)$, то функція називається *непарною*. Якщо функція $f(x)$ не є ні парною, ні непарною, то говорять, що вона загального типу.

2) *Періодичність*. Функція $f(x)$ називається періодичної з періодом $T > 0$, якщо для $\forall x \in D(f)$ виконується рівність $f(x) = f(x+T)$.

3) *Монотонність*. Функція $y = f(x)$ називається *зростаючою* на проміжку $\langle a;b \rangle$, якщо для $a < x_1 < x_2 < b$ виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$. Функція

$y=f(x)$ називається *спадною* на проміжку $\langle a;b\rangle$, якщо для $a<x_1<x_2<b$ виконується нерівність $f(x_1)>f(x_2)$.

4) *Обернені функції.* Нехай функція $y=f(x)$ однозначна, строго монотонна на відрізку $[a;b]$ і приймає значення з відрізку $[c;d]$. Функція $x=f^{-1}(y)$ називається оберненою для функції f, якщо кожному $y\in[c;d]$ функція f^{-1} ставить у відповідність $x\in[a;b]$, таке, що $y=f(x)$. В такому разі функції f і f^{-1} називаються взаємно оберненими.

Деякі елементарні функції

Лінійна функція. Функція виду $y=kx+b$ називається лінійною. Вона визначена на всій дійсній осі. Геометричним образом цього рівняння є пряма лінія на площині OXY. Якщо $k>0$ — функція зростаюча, $k<0$ — функція спадна на всій області визначення.

Квадратична функція. Квадратичною функцією називається функція виду $y=ax^2+bx+c$. Геометричним образом цього рівняння є парабола, вершина якої знаходитися в точці з абсцисою $x=-\dfrac{b}{2a}$. Якщо $a>0$ то вітки параболи прямують вгору, якщо $a<0$ — вниз.

Степенева функція має вигляд $y=x^{\alpha},\alpha\in R$. Зокрема, якщо $\alpha=2$ ми дістаємо рівняння параболи $y=x^2$ з вершиною в початку координат, якщо $\alpha=3$, ми маємо рівняння кубічної параболи $y=x^3$.

Показникова функція визначається формулою $y=a^x, a>0, a\neq 1$. Область визначення — вся дійсна вісь, множина значень — $(0;+\infty)$. Показникова функція — функція загального типу і неперервна на всій області визначення. Якщо $a>1$ — показникова функція монотонно зростає, якщо $0<a<1$ — функція монотонно спадає. З неперервності та монотонності показникової функції витікає, що вона є взаємнооднозначною функцією і має обернену.

Властивості степеня з довільним показником залишаються в силі для показникової функції на області визначення.

Логарифмічна функція $y = \log_a x$ визначається як обернена до показникової. Область визначення — $(0;+\infty)$, множина значень — вся дійсна вісь. Функція $y = \log_a x$ неперервна на всій області визначення. Якщо $a > 1$ — логарифмічна функція зростає, якщо $0 < a < 1$ — логарифмічна функція спадає на всій області визначення. Властивості логарифмів без змін переносяться на логарифмічну функцію на її області визначення.

Тригонометричні функції. На колі радіусу R виберемо довільну точку $M(x, y)$. Тоді $|OM| = R$. Нехай $\angle AOM = \alpha$ (рис. 4).

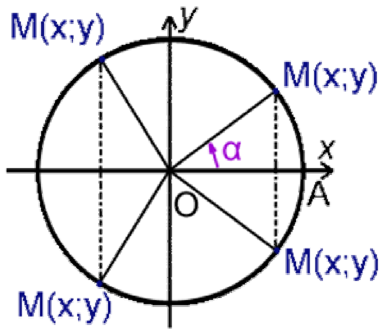


Рис. 4

Визначимо тригонометричні функції кута α — синус ($\sin\alpha$), косинус ($\cos\alpha$), тангенс ($\mathrm{tg}\alpha$) і котангенс ($\mathrm{ctg}\alpha$) таким чином:

$$\sin\alpha = \frac{y}{R}; \cos\alpha = \frac{x}{R}; \mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{x}; \mathrm{ctg}\alpha = \frac{x}{y}.$$

Аналогічно визначаємо тригонометричні функції довільного кута (незалежно від положення точки M вона може знаходиться в будь-якій чверті I, II, III або IV). Визначимо знаки тригонометричних функцій у різних чвертях (рис. 5):

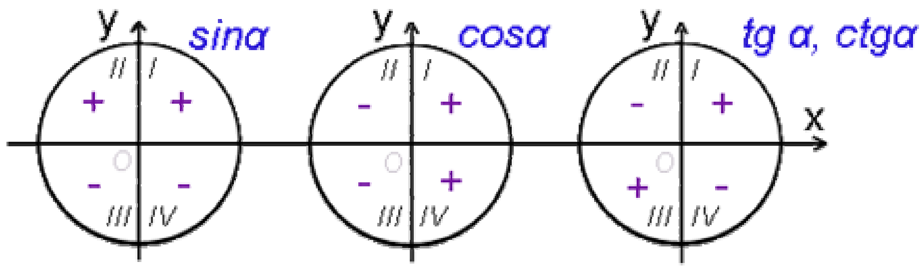


Рис. 5

Функції $\cos x$ і $\sin x$ визначені на всій дійсній осі, 2π – періодичні і приймають значення з відрізку $[-1,1]$.

Функції $\mathrm{tg}\,x$ і $\mathrm{ctg}\,x$ визначені відповідно для $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ і $x \neq \pi + k\pi$, $k \in Z$ мають період π та приймають значення з R.

Арифметична прогресія

Числову послідовність $\{a_n\}$, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, складеному з одним і тим же числом d, називають арифметичною прогресією. Число d називається різницею арифметичної прогресії: $a_{n+1} = a_n + d$. Число S_n називається сумою n перших членів арифметичної прогресії. Властивості арифметичної прогресії :

$$1.\ a_n = a_1 + (n-1)\cdot d. \quad 2.\ a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \forall n > 1$$

$$3.\ S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} = a_1 + \frac{(n-1)\cdot n}{2}\cdot d$$

Геометрична прогресія

Числову послідовність $\{b_n\}$, перший член якої відмінний від нуля, а кожен член, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне і те ж число $q \neq 0$, називають геометричною прогресією.

Число q називається називається знаменником прогресії : $b_{n+1} = b_n \cdot q$.

Число S_n називається сумою n перших членів геометричної прогресії, P_n — добутком n перших членів геометричної прогресії.

Властивості геометричної прогресії :

$$1.\ b_n = b_1 \cdot q^{n-1}. \quad 2.\ b_n^2 = b_{n-1}\cdot b_{n+1}, \forall n > 1. \quad 3.\ S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1} = b_1\frac{q^n - 1}{q-1}.$$

$$4.\ P_n = \sqrt{(b_1 b_n)^n}, \forall n \in N.$$

5. Якщо $|q| < 1$ та послідовність нескінченна, тоді $S_n = \frac{b_1}{1-q}$.

Розглянемо розв’язання тестових завдань рівня ЗНО для наведеної теми.

У завданні 1 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку відповідей.

5.1. Укажіть найменший додатний період функції $y = 3\text{tg}(4x)$.

а	б	в	г	д
$\frac{\pi}{3}$	2π	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$

Розв′язання: $y = 3\text{tg}(4\cdot(x+T)) = 3\text{tg}(4x+4T) = 3\text{tg}(4x+\pi) \to 4T = \pi$, $T = \frac{\pi}{4}$, обираємо п.1.д.

У завданні 2 до кожного з рядків інформації, позначених цифрами, виберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою. Поставте позначки в таблицях відповідей до завдань на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

5.2. Кожній точці (1– 4) поставте у відповідність функцію (А–Д), графіку якої належить ця точка

Точка	Функція
1. $K(-1;0)$	**А** $y = \text{tg}\,2x + 3$
2. $O(0;0)$	**Б** $y = 3x + 3$
3. $L(0;-1)$	**В** $y = \sin x$
4. $M(0;1)$	**Г** $y = (1/3)^x$
	Д $y = \sqrt{x} - 1$

	А	Б	В	Г	Д
1		**Х**			
2			**Х**		
3					**Х**
4				**Х**	

Розв′язання: **1.** $K(-1;0) \to x = -1; y = 0 \Rightarrow 3x + 3 = 3\cdot(-1) + 3 = 0$, обираємо 1.Б.

2. $O(0;0) \to x = 0; y = 0 \Rightarrow \sin 0 = 0$, обираємо 2.В.

3. $L(0;-1) \to x = 0; y = -1 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 = -1$, обираємо 3.Д**.**

4. $M(0;1) \to x = 0; y = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$**,** обираємо 4.Г**.**

Розв′язання задачі 3 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення до бланку відповідей.

5.3. Визначте знаменник геометричної прогресії b_n, якщо $b_6 = 9$ і $b_3 = -\frac{1}{24}$.

Розв′язання: $b_3 = b_1 q^2$; $b_6 = b_1 q^5 \to \frac{b_6}{b_3} = \frac{b_1 q^5}{b_1 q^2} = q^3 = \frac{9}{(-1/24)} = -216 \to q = \sqrt[3]{-216} = -6$.

Відповідь.

	-	6	,	0		

Тема 6. Похідна функції, її геометричний та фізичний зміст. Похідні елементарних функцій. Правила диференціювання

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції Δy в цій точці до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля будь-яким чином.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} .$$

Для того щоб функція була диференційована в точці x_0 необхідно щоб вона була в цій точці неперервна.

Геометричний зміст першої похідної визначається в тому, що її значення у точці дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до лінії з рівнянням $y = f(x)$.

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ має вигляд

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) .$$

Рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ має вигляд

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) .$$

Фізичний зміст першої похідної полягає в тому, що її значення для даного значення параметру t характеризує інтенсивність зміни функції, яка описує процес або явище. Зручно розглянути механічний зміст першої та другої похідних. Нехай $S = S(t)$ — закон руху частинки (матеріальної точки).

Швидкість — похідна шляху за часом $v(t) = S'(t)$.

Прискорення — похідна швидкості за часом $a(t) = v'(t)$.

Основні правила диференціювання	
1	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
2	$(u \cdot v)' = u'v + uv'$
3	$(C \cdot u)' = C(u)'$
4	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}, \qquad v \neq 0$
5	$y'_x = f'(u) \cdot u'(x)$, якщо $y = f(u)$, $u = u(x)$
6	$y'(x) = \dfrac{1}{x'(y)}$, $y(x)$ і $x(y)$ взаємо обернені
7	$\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases} \quad y'_x = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ — похідна параметричної функції

Похідні основних елементарних функцій	
$C' = 0$	
$x' = 1$	$\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot u^{\alpha - 1} \cdot u'$
$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$	$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$, $a > 0$, $a \neq 1$
$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$	$\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, $a > 0$, $a \neq 1$
$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(\mathrm{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	$(\mathrm{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'$	$(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'$
$(\mathrm{arctg} u)' = \dfrac{1}{1 + u^2} \cdot u'$	$(\mathrm{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1 + u^2} \cdot u'$

Розглянемо розв’язання тестових завдань рівня ЗНО для наведеної теми.

У завданні 1 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку відповідей.

6.1. Функція $f(x)$ має в точці x_0 похідну $f'(x_0) = -3$. Визначте значення похідної функції $g(x) = 4f(x) + 5x - 6$ в точці x_0.

а	б	в	г	д
0	7	- 7	- 13	8

Розв’язання: $g'(x) = \left(4f(x) + 5x - 6\right)' = 4f'(x) + 5$, тоді при $x = x_0$ маємо $g'(x_0) = 4 \cdot (-3) + 5 = -7$, обираємо п.1.в.

У завданні 2 до кожного з рядків інформації, позначених цифрами, виберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою. Поставте позначки в таблицях відповідей до завдань на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

6.2. Установіть відповідність між функціями $y = f(x)$ (1– 4) та значеннями їх похідних $f'(x_0)$ (А–Д) у точці $x_0 = \pi / 4$.

Функція	Значення похідної
1. $f(x) = \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$	**А** $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$
2. $f(x) = \sin x$	**Б** $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $f(x) = \operatorname{ctg} x$	**В** $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$
4. $f(x) = \operatorname{tg} x$	**Г** $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$
	Д $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

	А	Б	В	Г	Д
1					**Х**
2		**Х**			
3	**Х**				
4				**Х**	

Розв'язання: **1.** $f'(x) = 2 \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \to f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, обираємо 1.Д.

2. $f'(x) = \cos x \to f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, обираємо 2.Б.

3. $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \to f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$, обираємо 3.А**.**

4. $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \to f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ **,** обираємо 4.Г**.**

Розв'язання задачі 3 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення до бланку відповідей.

6.3. Матеріальна точка рухається за законом $s(t) = 2t^2 - 6t + 9$, де s — в метрах, а t — у секундах. Знайдіть значення t_1 , при якому миттєва швидкість точки дорівнює 20 м/с.

Розв'язання: Миттєва швидкість $v = s' = \left(2t^2 - 6t + 9\right)' = 4t - 6$. Тоді маємо $4t_1 - 6 = 20$ і $t_1 = 26/4 = 6{,}5\ c$.

Відповідь.

		6	,	5		

Тема 7. Дослідження функції за допомогою похідної. Побудова графіків функцій

Якщо похідна функції $f'(x)>0\,(f'(x)<0)$ на інтервалі $(a;b)$, то функція $y=f(x)$ зростає (спадає) на цьому інтервалі.

Приклад. Знайти інтервали монотонності функції $f(x)=x^3+2x-9$.

Розв'язання: Знаходимо похідну $f'(x)=3x^2+2$. Для $\forall x\in R$ похідна $f'(x_0)>0$. Отже, функція $f(x)=x^3+2x-9$ є зростаючою $\forall x\in R$.

Означення 1. Якщо існує такий окіл $O(x_0)=(x_0-\delta;x_0+\delta),\delta>0$ точки $x_0\in(a,b)$ і $f(x)<f(x_0)$ для всіх $x\in O(x_0)$, $x\neq x_0$, то точку x_0 називають точкою локального *максимуму* функції f (x), а саме число $f(x_0)$ — *максимумом* функції $f(x)$.

Означення 2. Якщо існує такий окіл $O(x_0)=(x_0-\delta;x_0+\delta),\delta>0$ точки $x_0\in(a,b)$ і $f(x)>f(x_0)$ для всіх $x\in O(x_0)$, $x\neq x_0$, то точку x_0 називають точкою локального *мінімуму* функції $f(x)$, а саме число $f(x_0)$ — *мінімумом* функції $f(x)$.

Точки максимуму і мінімуму функції називають екстремальними точками, а сам максимум і мінімум екстремумами функції.

Теорема Ферма. Якщо точка x_0 — точка екстремуму функції $y=f(x)$ на інтервалі $(a;b)$ та існує окіл $O(x_0)$, в якому функція має похідну, тоді $f'(x_0)=0$ (*необхідна умова* існування екстремуму в точці).

Нехай x_0 — критична точка функції, яка в цій точці неперервна, і нехай існує окіл, в якому функція має похідну, крім, можливо, самої точки x_0. Тоді якщо при переході зліва направо через критичну точку x_0 перша похідна змінює знак з *плюса* на *мінус*, то точка x_0 — *точка локального максимуму*; якщо ж знак похідної змінюється з *мінуса* на *плюс*, то x_0 — *точка локального* *мінімуму*; якщо знак похідної не змінюється — то в точці x_0 екстремум відсутній (*достатня умова* існування функції в точці).

Доведено, що функція неперервна на відрізку набуває свого найбільшого та найменшого значень на цьому відрізку в критичних точках усередині відрізку або на його кінцях.

Нехай на відрізку $[a;b]$ задано неперервну функцію $y = f(x)$. Графіком цієї функції є деяка лінія. Існує декілька способів побудови графіків функції. Один з них – це побудова за точками. При цьому на площині *Oxy* будується кілька точок, координати яких задовольняють рівняння $y = f(x)$, а потім ці точки сполучають плавною лінією. Зрозуміло, чим більше таких точок буде нанесено на площину, тим побудована лінія точніше відбиватиме графік функції $y = f(x)$. Проте при такій побудові графіка не відображується справжня поведінка функції. Так, на рис. 6 суцільною лінією зображено графік деякої функції, а пунктирною лінією – лінія, яка утворюється при сполученні семи точок площини *Oxy*, які належать цьому графіку.

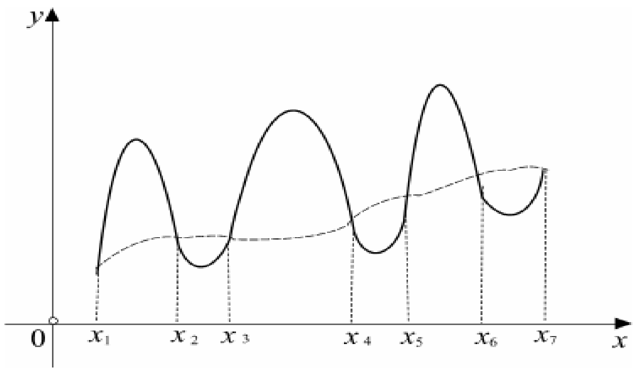


Рис. 6

Як бачимо, побудований і справжній графіки функції значно відрізняються. Крім того, при побудові графіка за точками невідомо, в який бік напрямлено вгнутість кривої при переході від одної точки до іншої. Інакше кажучи, метод побудови графіка за точками не дає змоги урахувати кривизну лінії. Отже, якщо знайти характерні точки кривої, то можна точніше побудувати графік функції. Тому, перш ніж будувати графік функції $y = f(x)$, треба дослідити цю функцію.

Розглянемо розв'язання тестових завдань рівня ЗНО для наведеної теми.

У завданні 1 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку відповідей.

7.1. Для якої з наведених функцій $f'(1)=1$?

а	б	в	г	д
$f(x)=2\sqrt{x}$	$f(x)=2\cos(\pi x)$	$f(x)=1$	$f(x)=\mathrm{tg}(\pi x)$	$f(x)=-x^2$

Розв'язання: $f'(x)=(2\sqrt{x})'=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\to f'(1)=\frac{1}{\sqrt{1}}=1$. Для інших з наведених функцій $f'(1)\neq 1$, тому обираємо п.1.а.

У завданні 2 до кожного з рядків інформації, позначених цифрами, виберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою. Поставте позначки в таблицях відповідей до завдань на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

7.2. Установіть відповідність між твердженнями (1– 4) для похідної функції $f(x)=\left|4-x^2\right|$ у деяких точках та значеннями $f'(x)$ (А–Д) у цих точках, користуючись рис. 7.

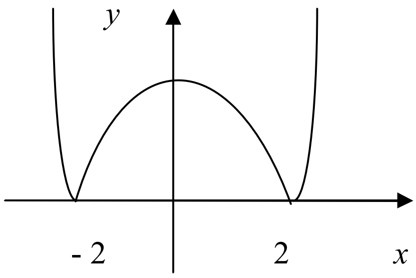


Рис. 7

Твердження	Похідна у точці
1. Дорівнює 0	**А** $f'(-0{,}5)$
2. Не існує	**Б** $f'(1)$
3. Від'ємне число	**В** $f'(3)$
4. Дорівнює 1	**Г** $f'(0)$
	Д $f'(-2)$

	А	Б	В	Г	Д
1				**Х**	
2					**Х**
3		**Х**			
4	**Х**				

Розв'язання:1. За теоремою Ферма $f'(c)=0\to x=c$ — точка екстремуму, тоді $x=0$, тобто обираємо 1.Г. **2.** У точках зламу графіка функції похідна не існує, це точки

$x=\pm 2$, обираємо 2.Д. **3.** Якщо похідна – від’ємне число, тоді функція спадає, обираємо 3.Б. **4**. На інтервалі $(-2;0)$ похідна функції $f'(x)=-2x$**,** розв’язавши рівняння $-2x=1$ обираємо 4.А**.**

Розв′язання задачі 3 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення до бланку відповідей.

7.3. Знайдіть найменше значення параметра a , при якому має розв’язки рівняння

$$\frac{1}{2}\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)=4-3a-2a^2 .$$

Розв′язання: $\frac{1}{2}\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, змінюється від -1 до 1. Тоді маємо

$-1\le 4-3a-2a^2\le 1$. Знаходимо розв’язки нерівностей $5-3a-2a^2\ge 0$ або $\left|a+\frac{3}{4}\right|\le\frac{7}{4}$ і $2a^2+3a-3\ge 0$ або $\left|a+\frac{3}{4}\right|\ge\frac{\sqrt{33}}{4}$. Розв’язки нерівностей з модулями визначають найменше значення $a=-\frac{10}{4}=-2{,}5$.

Відповідь.

	–	2	,	5		

Тема 8. Первісна та визначений інтеграл. Застосування визначеного інтеграла до обчислення площ криволінійних трапецій

Функція $F(x)$ називається *первісною* неперервної на проміжку $\langle a,b\rangle$ функції $f(x)$, якщо $F(x)$ диференційована на $\langle a,b\rangle$ і для $\forall\, x\in\langle a,b\rangle$ $f(x)=\frac{dF}{dx}$.

(*Основна властивість первісної*). Якщо функція $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, то будь-яка інша первісна функції $f(x)$ на цьому відрізку має вигляд $F(x)+C$.

Невизначений інтеграл $\int f(x)dx=F(x)+C$ — це сукупність всіх первісних функції $f(x)$.

Властивості невизначеного інтегралу

$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ або $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$; $\int 0\cdot dx = C$.

$\int\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx \quad \forall\alpha,\beta\in R$; $\int f'(x)dx = f(x)+C$;

$\int f(u)du = F(u)+C$, в незалежності від того, чи є u незалежною змінною, або ж функцією від x — *інваріантність форми невизначеного інтегралу*.

$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C \quad \forall a,b\in R,\ a\neq 0$.

ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. $\int du = u+C.$
2. $\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\quad \alpha\neq -1.$
3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u|+C.$
4. $\int e^{u}du = e^{u}+C.$
5. $\int a^{u}du = \frac{a^{u}}{\ln a}+C, a>0,\ a\neq 1.$
6. $\int \sin u\,du = -\cos u+C.$
7. $\int \cos u\,du = \sin u+C.$
8. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}u+C.$
9. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}u+C.$
10. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u+C.$
14. $\int \mathrm{tg}u\,du = -\ln|\cos u|+C.$
15. $\int \mathrm{ctg}u\,du = \ln|\sin u|+C.$
16. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C.$
17. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+C.$
18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right|+C.$
19. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{u}{2}\right|+C.$
20. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$
21. $\int \frac{du}{1+u^2} = \mathrm{arctg}u+C.$
22. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a}+C.$
23. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a}+C.$

$\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt = F\left[\varphi(t)\right]+C$ — формула заміни змінної у невизначеному інтегралі.

$\int udv = uv-\int vdu$ — формула інтегрування частинами у невизначеному інтегралі.

Визначеним інтегралом на відрізку $[a;b]$ від неперервної на цьому відрізку функції $y = f(x)$ називається приріст первісної $F(x)$ для цієї функції, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$ — *формула Ньютона - Лейбніца.*

Фізичний зміст визначеного інтеграла

- шлях S, пройдений тілом при прямолінійному русі зі швидкістю $v(t)$ за проміжок часу від t_1 до t_2 обчислюється за формулою $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)dt$.
- маса стрижня з довжиною L та густиною $\rho = \rho(x)$ дорівнює $m = \int\limits_0^L \rho(x)dx$.

Геометричний зміст визначеного інтеграла — площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, де $f(x) \ge 0, x \in [a,b]$, віссю Ox, та відрізками вертикальних прямих $x = a$ та $x = b$ дорівнює $S = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Розглянемо розв'язання тестових завдань рівня ЗНО для наведеної теми.

У завданні 1 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку відповідей.

8.1. Укажіть інтеграл, значення якого є додатним числом.

а	б	в	г	д
$\int\limits_{-1}^{1} xdx$	$\int\limits_{-1}^{1} (-x)^3 dx$	$\int\limits_{-1}^{1} (-x^2)xdx$	$\int\limits_{-1}^{1} x^2 dx$	$\int\limits_{-1}^{1} x^3 dx$

Розв'язання: За геометричним змістом визначений інтеграл дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції. За правилом знаків вона буде додатною для $\int\limits_{-1}^{1} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{1^3 - (-1)^3}{3} = \frac{2}{3} > 0$. Тому обираємо п.1.г.

У завданні 2 до кожного з рядків інформації, позначених цифрами, виберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою. Поставте позначки в таблицях відповідей до завдань на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

8.2. Установіть відповідність між функціями (1– 4) і первісними функцій (А–Д).

Функції		**Первісні**	
1.	$y = 3\sqrt{x}$	**А**	$y = -\frac{1}{x}$
2.	$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$	**Б**	$y = 2\sqrt{x}$
3.	$y = \frac{1}{x}$	**В**	$y = -\frac{1}{x^3}$
4.	$y = \frac{1}{x^2}$	**Г**	$y = 2\sqrt{x^3}$
		Д	$y = \ln\lvert x\rvert$

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1				**Х**	
2		**Х**			
3					**Х**
4	**Х**				

Розв′язання: **1.** $y' = \left(2\sqrt{x^3}\right)' = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{3/2-1} = 3\sqrt{x}$, обираємо 1.Г.

2. $y' = \left(2\sqrt{x}\right)' = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{1/2-1} = \frac{1}{\sqrt{x}}$,обираємо 2.Б. **3.** $y' = \left(\ln\lvert x\rvert\right)' = \frac{1}{x}$, обираємо 3.Д**.**

4. $y'(x) = \left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$**,** обираємо 4.А.

Розв′язання задачі 3 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення до бланку відповідей.

8.3. Обчисліть інтеграл $\int_{-2}^{1}\left(6x - x^2\right)dx$.

Розв′язання: $\int_{-2}^{1}\left(6x - x^2\right)dx = \left.\left(3x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\right|_{-2}^{1} = \left(3 - \frac{1}{3}\right) - \left(12 + \frac{8}{3}\right) = -12$.

Відповідь.

–	1	2	,	0		

Тема 9. Перестановки (без повторень). Комбінаторні правила суми та добутку. Ймовірність події. Вибіркові характеристики

Основні формули комбінаторики

І. Комбінації (сполуки) з n елементів по k $\qquad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

II. Розміщення з n елементів по k $\qquad A_n^k = k!C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

III. Перестановки множини з n елементів $\qquad P_n = n!$.

Під *подією* в теорії ймовірностей розуміють будь-який факт, який може відбутися чи не відбутися в результаті випробування з випадковим результатом Найпростіший результат такого досвіду (наприклад, попадання в ціль при стрільбі, випадкове випадання числа при киданні гральної кістки тощо) називається елементарною подією.

Множина всіх елементарних подій *E* називається простором елементарних подій. Так, при киданні гральної кістки цей простір складається з шести подій. Подія може складатися з одного або декількох елементарних подій, наприклад, випадіння тільки парних або непарних чисел при триразовому киданні гральної кістки. Тоді можна визначити подію як довільну підмножину простору елементарних подій.

Достовірною подією називається весь простір елементарних подій. Тоді достовірна подія — це подія, яка обов'язково має відбутися в результаті даного випробування. При киданні гральної кістки такою подією є падіння на будь-яку з її граней.

Неможливою подією *Н* називається порожня підмножина простору елементарних подій. Тобто, неможлива подія не може відбутися в результаті даного випробування. Так, при одноразовому киданні гральної кістки неможливою подією є випадіння більше шести очок.

Події *A* і *B* називаються *тотожними* (*A* = *B*), якщо подія *A* відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається подія *B*.

Кажуть, що подія *A* тягне за собою подію *B* ($A \Rightarrow B$, $A \subset B$), якщо з умови "відбулася подія *A*" витікає "відбулася подія *B*".

Подія *C* називається *сумою* подій *A* і *B* ($C = A + B$, $C = A \cup B$), якщо подія *C* відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається або *A*, або *B*.

Подія *C* називається *добутком* подій *A* і *B* ($C = AB$, $C = A \cap B$), якщо подія C відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається і A, і B.

Подія C називається *різницею* подій A і B ($C = A - B$, $C = A \setminus B$), якщо подія C відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається подія A та не відбувається подія B.

Подія $\overline{A}$ називається *протилежною* події A, якщо не відбулася подія A. Так, промах і попадання при стрільбі — протилежні події.

Події A і B називаються несумісними ($A \cap B = \varnothing$), якщо їх одночасна поява неможлива. Наприклад, випадіння і "аверсу", і "реверсу" при киданні монети.

Якщо при проведенні досвіду можуть відбутися кілька подій і кожне з них за об'єктивними умовами не є більш можливим, ніж інше, то такі події називаються рівноможливими.

Ймовірність випадкової події A — це відношення числа m елементарних рівноможливих подій, які сприяють події A, до загальної кількості n елементарних рівноможливих подій простору подій:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Теореми додавання та множення ймовірностей

I. $P(A+B) = P(A) + P(B)$, якщо події несумісні.

II. $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$, якщо події сумісні.

III. $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, якщо $A, \overline{A} -$ протилежні події.

IV. $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P\left(\overline{A_1 A_2 \ldots A_n}\right)$, де $A_i (i = 1 \ldots n)$ сумісні події.

V. $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$, якщо події незалежні.

VI. $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$, якщо події залежні

Формула повної ймовірності — $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P_{B_i}(A)$, де події B_i утворюють повну групу подій та називаються гіпотезами.

Вибіркою називається сукупність випадково відібраних об’єктів. Вся сукупність з якої виконується вибірка, називається генеральною сукупністю.

Для вибірки, статистичний ряд розподілу якої задано таблицею

X	x_1	x_2	…	x_k
n	n_1	n_2	…	n_k

числовими характеристиками є:

- *спостережені значення* — мінімальне $x_{\min}$ і максимальне $x_{\max}$;

- *розмах вибірки* $R = x_{\max} - x_{\min}$;

- *мода* Mo — варіанта з найбільшою частотою у статистичному ряді розподілу частот;

- *медіана* — така точка Me проміжку $[x_{\min}, x_{\max}]$, для якої $P(X < Me) = P(X > Me)$, тобто медіана ділить варіаційний ряд навпіл.

Якщо варіаційний ряд містить непарне число варіант $n = 2m+1$, то $Me = x_{m+1}$. Якщо число варіант парне і дорівнює $n = 2m$, то $Me = \dfrac{x_m + x_{m+1}}{2}$;

- *вибіркове середнє* (статистичне), спостережених значень $\overline{x_B} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i$;

- *статистична дисперсія* $D_B = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i - \left(\overline{x_B}\right)^2$

- *статистичне середнє квадратичне відхилення* $\sigma_B = \sqrt{D_B}$;

- «*виправлена*» *статистична дисперсія* $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i - n\left(\overline{x_B}\right)^2\right)$

- «*виправлене*» *середнє квадратичне відхилення* — $s = \sqrt{S^2}$.

Оцінка для математичного сподівання: $\bar{x}_B - t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < M(X) < \bar{x}_B + t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, де σ — *середнє квадратичне відхилення,* значення параметра t визначається з умови $2\Phi(t) = \gamma$.

Розглянемо розв’язання тестових завдань рівня ЗНО для наведеної теми.

У завданні 1 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у

бланку відповідей.

9.1. У туриста є 12 однакових за розмірами консервних банок, серед яких 3 банки – з кашею, 3 банки – з тушкованим м’ясом, 6 банок – з рибою. Під час зливи етикетки відклеїлися. Турист навмання взяв одну банку. Яка ймовірність того, що вона буде з кашею?

а	б	в	г	д
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{12}$

Розв’язання: За класичним визначенням ймовірності $P(A)=\frac{m}{n}$. В даному випадку $m=3;\, n=12$. Тому ймовірність дорівнює $P(A)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$, обираємо п.1.в.

У завданні 2 до кожного з рядків інформації, позначених цифрами, виберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою. Поставте позначки в таблицях відповідей до завдань на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

9.2. Дано вибірку з 20 чисел: 4; 10; 2; 10; 7; 10; 10; 2; 4; 12; 10; 10; 14; 7; 7; 12; 10; 10; 12; 7. Характеристикам вибірки (1– 4) поставити у відповідність їх вибіркові значення (А–Д).

Характеристика	Значення
1. кількість варіантів	**А** 10
2. вибіркове середнє	**Б** 7
3. мода	**В** 8,5
4. розмах вибірки	**Г** 6
	Д 12

	А	Б	В	Г	Д
1				**Х**	
2			**Х**		
3	**Х**				
4					**Х**

Розв’язання: Для даної вибірки статистичний ряд розподілу дається таблицею

X	2	4	7	10	12	14
n	2	2	4	8	3	1

1. З таблиці розподілу маємо 6 значень варіантів, обираємо 1.Г.

2. Вибіркове середнє $\frac{1}{20}\cdot(2\cdot 2+2\cdot 4+4\cdot 7+8\cdot 10+3\cdot 12+1\cdot 14)=\frac{170}{20}=8{,}5$, обираємо 2.В.

3. Мода вибірки дорівнює 10, обираємо 3.А.

4. Розмах вибірки $14-2=12$, обираємо 4.Д.

Розв′язання задачі 3 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення до бланку відповідей.

9.3. У відділі працюють чоловіки і жінки. Для анкетування навмання вибрали одного із співробітників. Імовірність того, що це чоловік, дорівнює $\frac{5}{9}$. Знайдіть відношення кількості чоловіків до кількості жінок, які працюють у цьому відділі.

Розв′язання: $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{5}{9}$; $P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{4}{9}$; $P(\overline{A})=\frac{n-m}{n}$. Знаходимо відношення $\frac{m}{n-m}=\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{n-m}=\frac{P(A)}{P(\overline{A})}=\frac{5}{9}\cdot\frac{9}{4}=\frac{5}{4}=1{,}25$. У відповідь запишіть 1,25 .

Відповідь.

		1	,	2	5	

Тема 10. Найпростіші геометричні фігури на площині та їх властивості. Коло та круг. Трикутники.

Як відоме, геометричні результати (теореми) виводять шляхом логічних міркувань (доведень) з деяких відправних положень (аксіом) [16].

Аксіома — твердження, яке встановлює деяку властивість і приймається без доведення. Аксіоми виникли з досвіду, і досвід ж перевіряє їх істинність в сукупності. Можна побудувати систему аксіом різними способами. Однак важливо, щоб прийнятий набір аксіом був мінімальним і достатнім для доведення всіх інших геометричних властивостей.

В геометрії (і взагалі, у математиці) існують поняття, які ми приймаємо як початкові поняття. Сенс цих понять може бути встановлений тільки на підставі досвіду. Так, поняття точки і прямої лінії є початковими. На основі початкових понять ми можемо дати визначення всім іншим поняттям.

Геометрична фігура – будь-яка множина точок. Фігура називається *опуклою*, якщо вона завжди містить відрізок, який сполучає будь-які дві її точки.

Важливу роль у геометрії відіграють поняття область, кута, многокутника. Наприклад, кут – об'єднання двох різних променів із спільним початком.

Трикутник. Трикутник – многокутник із трьома сторонами, що мають попарно по одному спільному кінцю (кожний – вершина трикутника).

Розв'язування трикутників – знаходження невідомих сторін і кутів за відомими сторонами і кутами трикутника.

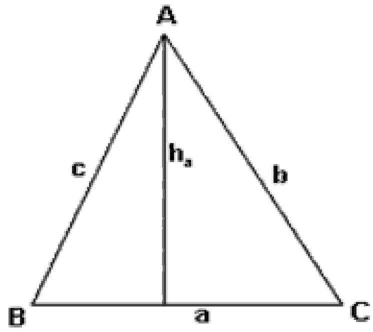


Рис. 8

Теорема косинусів: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$.

Теорема синусів: $\dfrac{a}{\sin\angle A} = \dfrac{b}{\sin\angle B} = \dfrac{c}{\sin\angle C} = 2R$.

Площу трикутника можна знайти за формулами:

$S_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot h_a$, де h_a — висота (рис. 8); $S_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot b \sin\angle C$;

$S_\Delta = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$ — формула Герона,

де p — півпериметр трикутника $p = \dfrac{a+b+c}{2}$;

$S_\Delta = pr$, де r — радіус кола, вписаного в трикутник;

$S_\Delta = \dfrac{abc}{4R}$, де R — радіус кола, описаного навколо трикутника.

Прямокутний трикутник. Прямокутний трикутник – трикутник, який має прямий кут.

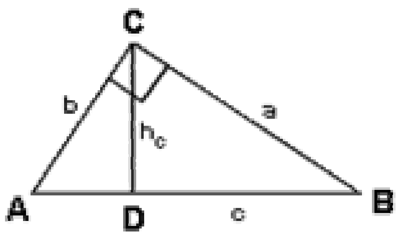


Рис. 9

Теорема Піфагора (рис. 9) $c^2 = a^2 + b^2$;

Співвідношення у прямокутному ΔABC:

$$a^2 = |AB| \cdot |DB|; \quad b^2 = |AB| \cdot |AD|; \quad h_c^2 = |AD| \cdot |DB|.$$

Рівнобедрений трикутник — трикутник, у якого дві сторони рівні. Їх називають бічними сторонами, а третю сторону – основою.

Правильний трикутник. Правильний (рівносторонній) трикутник має усі рівні між собою сторони.

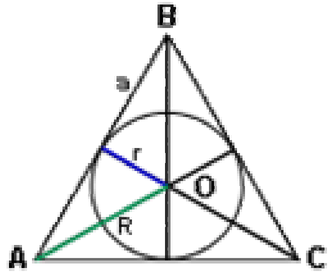


Рис. 10

Точки перетину бісектрис, висот, медіан та серединних перпендикулярів у правильному трикутнику співпадають. Цю точку називають центром трикутника. Центр правильного трикутника є центром кола, описаного навколо трикутника, і центром кола, вписаного в нього.

Співвідношення у правильному ΔABC: площа — $S_\Delta = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$;

$r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ — радіуси описаного і вписаного кіл.

Деякі співвідношення в довільному трикутнику

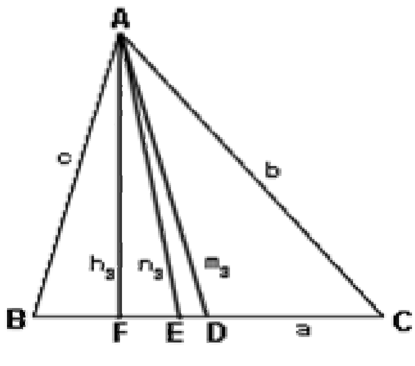


Рис. 11

Нехай $|AF| = h_a$ — висота, $|AE| = n_a$— бісектриса, $|AD| = m_a$ — медіана трикутника ABC, опущені з вершини A. Тоді

$|AB| : |AC| = |BE| : |EC|$;

$h_a = 2\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}\Big/a$ — довжина висоти, де p — півпериметр;

$n_a = 2\sqrt{b\cdot c\cdot p\cdot(p-a)}\Big/(b+c)$ — довжина бісектриси;

$m_a = \sqrt{2b^2+2c^2-a^2}\Big/2$ — довжина медіани.

Медіани в точці перетину діляться відносно 2:1, починаючи від вершини;

<u>*Коло і круг.*</u> Колом називається фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від точки – центра кола на величину радіуса. Кругом називається фігура на площині, яка складається з усіх точок, відстань яких від центру не перевищує радіуса.

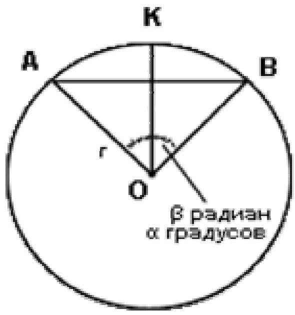


Рис. 12

Довжина кола $L = 2\pi r$, де $r = OA = OB$— радіус кола, довжина дуги кола $l = \dfrac{\pi\alpha}{180}r = \beta r$. Якщо α°— величина кута в градусах, а β — в радіанах, тоді

$\alpha^\circ = \beta\dfrac{180^\circ}{\pi}$; $\beta = \alpha^\circ\dfrac{\pi}{180^\circ}$. Площа круга обчислюється за формулою $S = \pi\cdot r^2$.

Площа сектора $OAKB$ $S_c = \dfrac{\pi\cdot\alpha}{360}\cdot r^2 = \dfrac{\beta}{2}\cdot r^2$, площа сегменту AKB —

$S_{сег} = \dfrac{r^2}{2}\cdot\left(\dfrac{\pi\cdot\alpha}{180} - \sin\alpha\right) = \dfrac{r^2}{2}\cdot(\beta - \sin\beta)$, якщо $\alpha \le 180^\circ$ або $\beta \le \pi$.

Розглянемо розв’язання тестових завдань рівня ЗНО для наведеної теми.

У завданні 1 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку відповідей.

10.1. Сторони трикутника ABC, одна з яких на 4см менша за другу, утворюють кут 120°, а довжина третьої сторони дорівнює 14см. Знайдіть периметр трикутника.

а	б	в	г	д
32см	36см	42см	30см	28см

Розв’язання. За теоремою косинусів $AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2 \cdot AB \cdot CB \cdot \cos 120^\circ$. Маємо $CB = AC + 4;\ AB = 14$. Тому після підстановки $14^2 = AC^2 + (AC+4)^2 + AC \cdot (AC+4)$, AC знаходимо з рівняння $196 = 3AC^2 + 12AC + 16 \to AC = 6$, другій корінь – сторонній, тому що від’ємний. Тоді $CB = 6 + 4 = 10;\ P = AB + AC + CB = 14 + 6 + 10 = 30$ см, обираємо п.1.г.

У завданні 2 до кожного з рядків інформації, позначених цифрами, виберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою. Поставте позначки в таблицях відповідей до завдань на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

10. 2. У квадраті ABCD зі стороною 12 см на стороні BC знаходиться точка M, така що $BM = 5$ см. Установити відповідність між величинами (1– 4), пов’язаними з трикутником $\triangle ABM$, і числовими значеннями цих величин (А–Д).

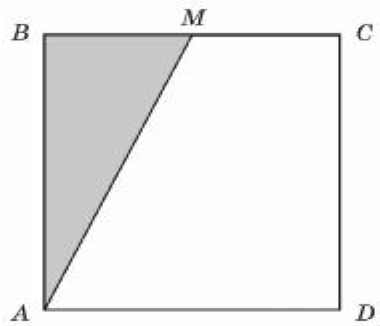


Рис. 13

Величина	Значення
1. Півпериметр трикутника	А 7,5
2. Радіус описаного кола	Б 15
3. Площа трикутника	В 30
4. Радіус вписаного кола	Г 2
	Д 6,5

	А	Б	В	Г	Д
1		Х			
2					Х
3			Х		
4				Х	

Розв’язання. Для обчислення шуканих величин користуємося наведеними вище формулами, розв'язавши прямокутний $\triangle ABM$: $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = 13$см.

Маємо $a = 12$см ; $b = 5$см ; $c = 13$ см .

1. $p = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c) = 0{,}5 \cdot (12 + 5 + 13) = 15$см. 2. $R = \frac{c}{2} = \frac{13}{2} = 6{,}5$см .

3. $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = 0{,}5 \cdot 12 \cdot 5 = 30$см^2. 4. $r = \frac{S}{p} = \frac{a \cdot b}{2 \cdot p} = \frac{12 \cdot 5}{2 \cdot 15} = 2$см .

Розв′язання задачі 3 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення до бланку відповідей.

10.3. Два кола дотикаються одне одного причому менше проходить через центр більшого (див. рис. 14). Знайдіть площу зафарбованої фігури (см^2), якщо менше коло обмежує круг з площею 64 см^2 .

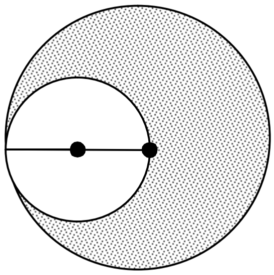


Рис. 14

Розв′язання. Нехай r, R, s, S — відповідно радіуси та площі великого та малого кола. Тоді $R = 2r$. За умовою задачі $\pi r^2 = 64$. Тоді $S = \pi R^2 = 4\pi r^2 = 256$. Отже, площа зафарбованої фігури дорівнює $S - s = 256 - 64 = 192$ см^2 .

Відповідь.

1	9	2	,	0		

Тема 11. Чотирикутник

Чотирикутник — фігура, що складається з чотирьох сторін-відрізків та точок-вершин, що їх сполучають. Прийнято, що сторони не перетинаються та жодні три вершини не лежать на одній прямій.

Паралелограм. Чотирикутник називається паралелограмом, якщо його протилежні сторони попарно паралельні. У паралелограма сума кутів, прилеглих до однієї сторони, дорівнює 180°, протилежні сторони — рівні.

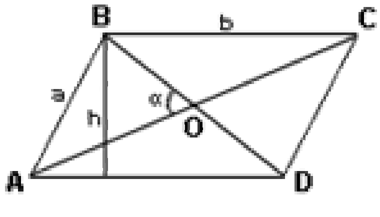


Рис. 15

Діагоналі паралелограма діляться точкою їх перетину навпіл. Площу паралелограма $S_{пар}$ можна обчислити за формулами (рис. 15):

$S_{пар} = b \cdot h$, де h — висота; $S_{пар} = a \cdot b \sin \angle A = 1/2 \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin \alpha$.

Помічаємо, що $2 \cdot \left(a^2 + b^2\right) = |AC|^2 + |BD|^2$.

Прямокутник — паралелограм, у якого всі кути прямі, діагоналі — рівні.

Квадрат — прямокутник, у якого усі сторони рівні. Діагоналі квадрата рівні, взаємно перпендикулярні, ділять його кути навпіл, точкою перетину діляться навпіл.

Ромб. Ромб – паралелограм, усі сторони якого рівні. Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні і ділять його кути навпіл.

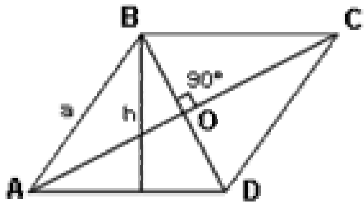


Рис. 16

Площу ромба S_p можна обчислити за формулами (рис. 16):

$$S_p = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD|; \; S_p = a \cdot h; \quad S_p = a^2 \sin \angle A.$$

Трапеція. Трапеція — чотирикутник, у якого лише дві протилежні сторони паралельні. Вони називаються основами (рис. 17). Середня лінія KE трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі: $|KE| = (|AD| + |BC|)/2$.

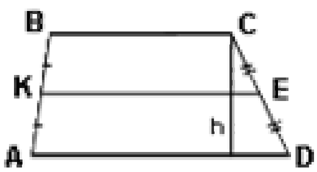


Рис. 17

Формули обчислення площі трапеції: $S_{тр} = (|BC| + |AD|) \cdot h/2$.

Розглянемо розв’язання тестових завдань рівня ЗНО для наведеної теми.

У завданні 1 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку відповідей.

11.1. У прямокутнику $ABCD$: $BC = 40$; $AC = 50$. Через точки M і K, що належать сторонам AB і BC, проведено пряму, паралельну діагоналі AC. Знайдіть довжину більшої сторони трикутника MBK, якщо $BK = 10$.

а	б	в	г	д
28	25	30	12,5	7,5

Розв'язання: За теоремою Фалеса $\frac{MK}{AC} = \frac{BK}{BC} \to MK = AC \cdot \frac{BK}{BC} = \frac{50 \cdot 10}{40} = 12{,}5$ (рис. 18). Тому обираємо п.1.г.

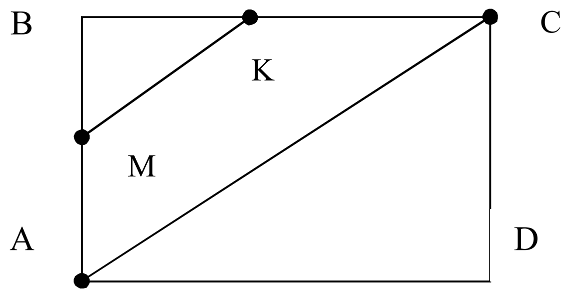


Рис. 18

У завданні 2 до кожного з рядків інформації, позначених цифрами, виберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою. Поставте позначки в таблицях відповідей до завдань на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

11.2. Установіть відповідність між множинами чотирикутників (1– 4) і властивостями, які мають чотирикутники з цих множин (А–Д).

Множина	Властивості
1. Множина всіх паралелограмів	**А** Діагоналі є бісектрисами внутрішніх кутів
2. Множина всіх прямокутників	**Б** Усі сторони і всі кути рівні між собою
3. Множина всіх рівнобічних трапецій	**В** Рівні між собою діагоналі в точці перетину діляться навпіл
4. Множина всіх ромбів	**Г** Центр описаного кола не збігається з точкою перетину діагоналей
	Д Протилежні гострі кути рівні між собою, а діагоналі не завжди є перпендикулярними

	А	Б	В	Г	Д
1					**Х**
2			**Х**		
3				**Х**	
4	**Х**				

Розв′язання: Для встановлення відповідності користуємось властивостями ромбів, паралелограмів, тощо.

Розв′язання задачі 3 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення до бланку відповідей.

11.3. На рис. 19 зображено паралелограм *ABCD,* площа якого дорівнює 90 *см*^{2}. Точка М належить стороні *BC.* Визначте площу фігури, що складається з двох зафарбованих трикутників.

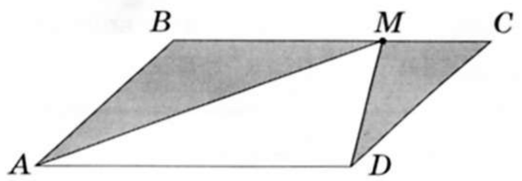


Рис. 19

Розв′язання: Маємо формули обчислення площі паралелограма і трикутника $S_{пар} = a \cdot h$; $S_{тр} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$. Площа зафарбованої фігури:

$$S = S_{пар} - S_{тр} = \frac{1}{2} S_{пар} = \frac{1}{2} \cdot 90 = 45 см^2.$$

Відповідь.

	4	5	,	0		

Тема 12. Многокутники

Многокутник — замкнена ламана лінія $A_1 A_2 \ldots A_n$, де точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються вершинами многокутника, а відрізки A_1A_2, A_2A_3, …, A_nA_1 — його сторони.

Многокутник називається опуклим, якщо він лежить в одній півплощині відносно будь-якої прямої, що містить його сторону. Кількість діагоналей опуклого *n – кутника* дорівнює $\frac{n(n-3)}{2}$.

Сума внутрішніх кутів опуклого *n* - кутника дорівнює 180°(*n* - 2).

Многокутник, вписаний у коло, – многокутник з вершинами, які лежать на деякому колі. Многокутник, описаний навколо кола, — многокутник із сторонами, які дотикаються до деякого кола.

<u>*Правильний n - кутник.*</u> Опуклий многокутник називається правильним,

якщо всі його сторони рівні і всі внутрішні кути рівні. Центри описаного навколо правильного n – кутника кола і кола, яке вписано до нього, збігаються з центром многокутника (рис. 20).

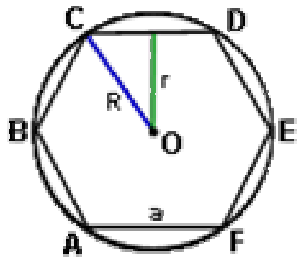


Рис. 20

Сторону правильного многокутника можна обчислити за формулами

$$a = 2R\sin\frac{180^\circ}{n} = 2r\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n},$$

де R, r — радіуси описаного і вписаного кіл, n — кількість кутів (сторін) правильного многокутника.

Площа правильного многокутника обчислюється за формулами:

$$S_n = \frac{1}{2}P_n r; \quad S_n = n \cdot r^2 \mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}; \quad S_n = \frac{n}{2} \cdot R^2 \sin\frac{360^\circ}{n}; S_n = \frac{n}{4} \cdot a^2 \mathrm{ctg}\frac{180^\circ}{n},$$

де P_n — периметр n – кутника.

Два многокутники однакової площі є рівноскладені.

Розглянемо розв’язання тестових завдань рівня ЗНО для наведеної теми.

У завданні 1 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку відповідей.

12.1. Знайдіть градусну міру внутрішнього кута правильного десятикутника

а	б	в	г	д
36°	18°	144°	72°	162°

Розв’язання: $\alpha = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ = \frac{8}{10} \cdot 180^\circ = 144^\circ$. Обираємо п. 1.в.

У завданні 2 до кожного з рядків інформації, позначених цифрами, виберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою. Поставте позначки в таблицях відповідей до завдань на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

12.2. Для характеристик даних правильних п’ятикутника і шестикутника (1– 4) встановити їх числові значення (А–Д).

Характеристика	Значення
1. Кількість діагоналей правильного шестикутника	**А** 108°
2. Величина внутрішнього кута правильного п’ятикутника	**Б** 72°
3. Кількість діагоналей і сторін правильного п’ятикутника	**В** 120°
4. Величина внутрішнього кута правильного шестикутника	**Г** 10
	Д 9

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1					**Х**
2	**Х**				
3				**Х**	
4			**Х**		

Розв′язання:1. За формулою $\frac{n(n-3)}{2}=\frac{6\cdot 3}{2}=9$, обираємо 1.Д**. 2.** За формулою $\frac{n-2}{n}180°=\frac{5-2}{5}180°=108°$, обираємо 2.А. **3.** За формулою $n+\frac{n(n-3)}{2}=5+\frac{5\cdot 2}{2}=10$ 3.Г. **4**. За формулою $\frac{n-2}{n}180°=\frac{6-2}{6}180°=120°$, обираємо 4.В**.**

Розв′язання задачі 3 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення до бланку відповідей.

12.3. У правильному шестикутнику зі стороною $2\sqrt{3}$ сполучено вершини через одну так щоб утворився правильний трикутник (рис.21). Знайдіть площу цього трикутника.

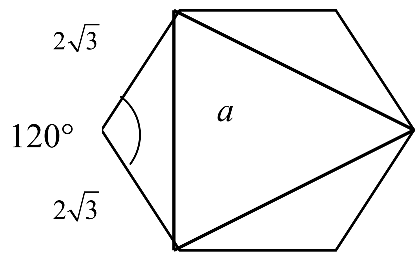


Рис. 21

Розв′язання: Позначимо через a сторону правильного трикутника. Тоді за теоремою синусів $\frac{a}{\sin 120°}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin 30°}\Rightarrow a=6$. Отже, $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}$.

Тема 13. Геометричні величини та їх вимірювання. Координати та вектори на площині. Геометричні перетворення.

Елементарна теорія вимірювання геометричних величин повинна будуватися зі збереженням деякої загальної схеми. Це стосується насамперед до вимірювання величин: «кута», «довжини», «площі», «об'єму». Повторення однієї і тієї ж схеми визначення сприяє узагальненню, формування такого подання: з аналогії випливає, що ці поняття відносяться до більш загального поняття, що зв'язує їх . Розкриття зв'язку з цим в процесі навчання сприяє більш глибокому розумінню і міцності знань. Кожне з чотирьох понять визначаться як дійсне число, яке задовольняє умовам, які характеризують загальні поняття міри множини.

Вимірювання геометричних величин — одна з основних змістових ліній шкільного курсу геометрії, яка знайомить з важливими ідеями, поняттями і методами метричної геометрії. Вимірювання геометричних величин пов'язано з ідеєю аксіоматичного методу, теорією дійсного числа, методами математичного аналізу. При вивченні даного питання учні знайомляться з цілим рядом формул, за допомогою яких розширюються можливості застосування в курсі геометрії аналітичного методу.

Почнемо з вимірювання кутів. Розглянемо коло радіусу R з центром в точці O. Додатній кут AOK створений обертанням радіус-вектора OA ($|OA| = R$) по напряму проти годинникової стрілки (рис. 22).

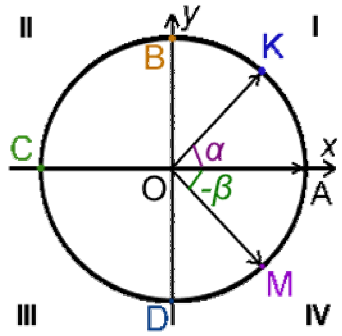


Рис. 22

Кут 1° (1 градус) — це кут, який спирається на дугу, що дорівнює 1/360-й частини кола. На рис. 21 $\angle AOK = \alpha°$, $\angle AOB = 90°$, $\angle AOC = 180°$, $\angle AOD =$ 270°,

$\angle AOA = 360°$. Усе коло ділиться на 360°, один градус містить в собі 60 хвилин (60'), одна хвилина містить в собі 60 секунд (60").

Осями координат коло ділиться на 4 чверті. Від'ємні кути відкладаємо від осі Ox у напрямі руху годинникової стрілки (на рис. 22 $\angle AOM = -\beta°$ — кут від'ємний).

Окрім градусного виміру кута використовується виміри кута в радіанах: 1 рад — це кут, який спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу. Так як довжина кола дорівнює $2\pi R$, то кут $360° = 2\pi$ рад. Виходячи з цього

$$1 \text{ рад} = 360°/2\pi = 57°17'44'', \quad 1° = 2\pi/360° \text{ рад} = \pi/180° \text{ рад}.$$

Вимірювання довжини, площі та об'єму також потребує введення та використання відповідних одиниць за умови адитивності цих величин.

Розглянемо розв'язання деяких задач на координатній площині. Нехай дано дві точки $A(x_A; y_A)$ та $B(x_B; y_B)$.

Відстань між точками A і B знаходимо за формулою

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Координати середини відрізка — точки C: $x_C = \dfrac{x_A + x_B}{2}$; $\quad y_C = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

Рівняння прямої AB з кутовим коефіцієнтом k і початковою ординатою b має вигляд $AB\colon y = kx + b$ або $AB\colon y - y_A = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$.

Загальне рівняння прямої $ax + by + c = 0$, рівняння прямих, паралельних координатним осям Ox і Oy, мають вид $y = b, \quad x = a$.

Рівняння кола з радіусом R і центром у точці $C(x_0; y_0)$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Геометричне перетворення — взаємне відображення прямої чи площини простору саму на себе. Приклади геометричних перетворень: рух, симетрія відносно точки і прямої, поворот, паралельне перенесення, перетворення подібності, гомотетія.

Рух — це перетворення площини або простору, що зберігає відстань між точками. При русі зберігаються кути, прямі переходять у прямі, площини — у площини.

Гомотетія — перетворення, що ставить у відповідність кожній точці A точку A' за правилом $OA' = k \cdot OA$, де т. O — центр гомотетії, $k\left(k \neq 0\right)$ — стале число, що називається коефіцієнтом гомотетії. Гомотетія є перетворенням подібності.

Подібними називаються трикутники, у яких відповідні сторони пропорційні.

Ознаки подібності трикутників:

Ознака 1. Два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам другого трикутника.

Ознака 2. Дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника, і кути, утворені цими сторонами, рівні.

Ознака 3. Сторони одного трикутника пропорційні сторонам другого трикутника.

Відношення площ подібних трикутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

Розглянемо розв’язання тестових завдань рівня ЗНО для наведеної теми.

У завданні 1 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку відповідей.

13.1. Закінчіть речення так, щоб утворилося правильне твердження: «Якщо коло $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ проходить через початок координат, то …»

а	б	в	г	д
$R^2 = x_0^2$	$R^2 = y_0^2$	$R^2 = \lvert x_0 - y_0 \rvert$	$R^2 = (x_0 - y_0)^2$	$R^2 = x_0^2 + y_0^2$

Розв’язання: Початок координат $O(0;0)$. Підстановка $x = 0$; $y = 0$ в рівняння кола приводить до рівності $R^2 = x_0^2 + y_0^2$, обираємо п.1.д.

У завданні 2 до кожного з рядків інформації, позначених цифрами, виберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою. Поставте позначки в таблицях відповідей до завдань.

13.2. Установити відповідність між рисунками (1 – 4) і координатами точок (А–Д), які зображені на рисунках

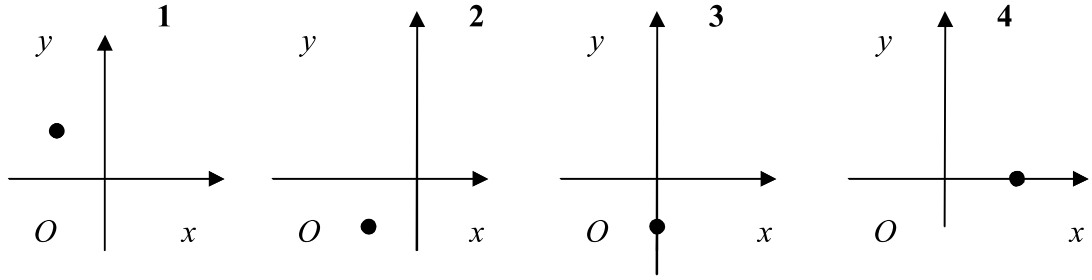


Рисунок	Точка
1	**А** (2;2)
2	**Б** (– 2;2)
3	**В** (2; 0)
4	**Г** (0; – 2)
	Д (–2;– 2)

	А	Б	В	Г	Д
1		**Х**			
2					**Х**
3				**Х**	
4			**Х**		

Розв'язання задачі 3 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення до бланку відповідей.

13.3. Знайдіть усі значення параметра a, при яких коло $(x-a)^2+(y-7)^2=25$ дотикається до осі ординат. Якщо таке значення параметра одне, то запишіть його у відповідь, якщо таких значень параметра кілька, то запишіть у відповідь їх добуток.

Розв'язання: Точка $M(0;7)$ — точка дотику (рис. 23). Тоді координати точки M задовольняють рівнянню кола: $(0-a)^2+(7-7)^2=25$. Звідки маємо $a^2=25 \Rightarrow a_{1,2}=\pm 5$. У відповідь запишемо $a_1 a_2=-25$.

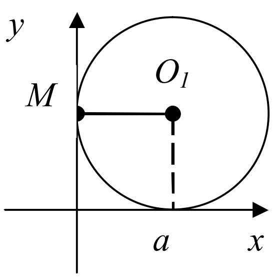


Рис. 23

Відповідь.

-	2	5	,	0		

Тема 14. Прямі та площини у просторі. Многогранники

Стереометрія вивчає геометричні властивості просторових тіл і фігур. Подібно до того, як в планіметрії основними поняттями є точка і пряма, в стереометрії основними поняттями є точка, пряма і площина.

Основні аксіоми стереометрії. Через будь-які три точки простору, що не лежать на одній прямій, можна провести одну і тільки одну площину. Через три точки, що лежать на одній прямій, можна провести безліч площин, що утворюють в цьому випадку пучок площин. Пряма, через яку проходять всі площини пучка, називається віссю пучка. Через будь-яку пряму і точку, що лежить поза цією прямою, можна провести одну і тільки одну площину. Через дві прямі не завжди можна провести площину. Якщо це неможливо, то ці прямі називаються мимобіжними.

Приклад. Горизонтальна пряма, яка проведена на одній стіні кімнати, та вертикальна лінія на протилежній стіні є мимобіжними прямими.

<u>*Теорема про три перпендикуляри*</u>. Якщо пряма l, проведена до площини π, перпендикулярна до її проекції *ВО*, то вона сама перпендикулярна до похилої *АВ* (та навпаки).

Многогранником називається тіло, поверхнею якого є об'єднання скінченого числа многокутників. Многокутники, які утворюють поверхню многогранника, називаються його гранями, сторони многокутників — ребрами, їх вершини — вершинами многогранника. Многогранники бувають *опуклі* та *неопуклі.*

<u>*Теорема Ейлера.*</u> Для будь-якого опуклого многогранника виконується рівність $В + Г - Р = 2$, де $В$, $Г$, $Р$ — відповідно число вершин, граней та ребер многогранника.

Знайдена універсальна формула (формула Сімпсона), за допомогою якої можна обчислити об'єм призми, піраміди, зрізаної піраміди, циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі: $V=\frac{H}{6}\left(S_1+4S_{cp}+S_2\right)$, де H — висота тіла, S_1 — площа нижньої основи, S_{cp} — площа середнього перерізу, S_2 — площа верхньої основи.

Прямокутний паралелепіпед. Прямокутним паралелепіпедом називається паралелепіпед, бічні ребра якого перпендикулярні основам, які є прямокутники.

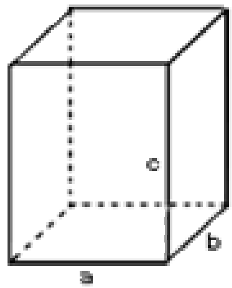


Рис. 24

Площа поверхні прямокутного паралелепіпеда $S_{nap}=2(ab+bc+ac)$.

Об'єм прямокутного паралелепіпеда $V_{nap}=abc$.

Призма. Пряма призма — призма, всі бічні ребра якої перпендикулярні основам.

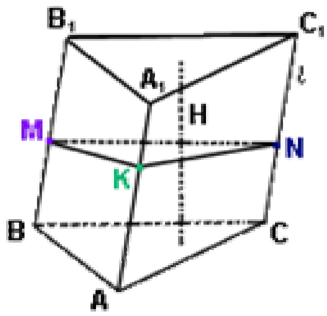


Рисунок 25.

MKN — перпендикулярний (до ребра CC_1) переріз (рис. 25).

Площа поверхні призми $S=S_{біч}+2S_{осн}$, де $S_{біч}=P_{\perp}\cdot l$ — площа бічної поверхні призми, $P_{\perp}$ — периметр перпендикулярного перерізу MKN; l — довжина бічного ребра.

Об'єм призми $V_{np}=S_{осн}\cdot H=S_{\perp}\cdot l$, де $S_{осн}$ — площа основи, H — висота призми; $S_{\perp}$ — площа перпендикулярного перерізу MKN;

<u>*Піраміда.*</u> Многокутна піраміда — многогранник, в основі якого довільний многокутник, а решта граней — трикутники, що мають спільну вершину та називаються бічними гранями (рис. 26).

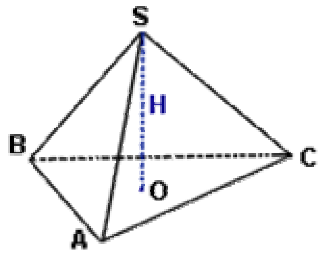


Рисунок 26

Площа поверхні піраміди $S = S_{біч} + S_{осн}$.

Об'єм піраміди $V_{пір} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$, де $S_{осн}$ — площа основи, H — висота піраміди.

Якщо піраміда правильна (тобто в основі правильний многокутник, а усі бічні грані — рівні між собою рівнобедрені трикутники), то площа бічної поверхні рівна: $S_{біч} = 1/2 \cdot Ph$, де P — периметр основи, h — висота бічної грані (апофема).

<u>*Зрізана піраміда.*</u> Зрізана піраміда — частина піраміди, що міститься між її основою та перерізом піраміди, який паралельний основі (рис.27).

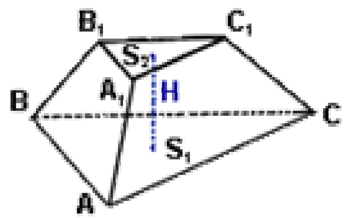


Рисунок 27

Площа поверхні зрізаної піраміди $S_{зр.пір} = S_{біч} + S_1 + S_2$.

Об'єм зрізаної піраміди $V_{зр.пір} = \frac{1}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right) \cdot H$, де S_1, S_2 — площі основ, H — висота зрізаної піраміди.

Якщо зрізана піраміда правильна (тобто є частиною правильної піраміди), то площа бічної поверхні рівна: $S_{біч} = 1/2 \cdot \left(P_1 + P_2\right) \cdot h$, де P_1, P_2 — периметри основ, h — висота бічної грані (апофема).

Розглянемо розв'язання тестових завдань рівня ЗНО для наведеної теми.

У завданні 1 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку відповідей.

14.1. Кімната має форму прямокутного паралелепіпеда (довжина кімнати – 6м, ширина – 4м , висота –3 м). Площа стін дорівнює 0,75 площі бічної поверхні цього паралелепіпеда. Скільки фарби (у кг) потрібно для того, щоб пофарбувати стіни і стелю кімнати, якщо на $1 м^2$ витрачається 0,2кг фарби (рис. 28)?

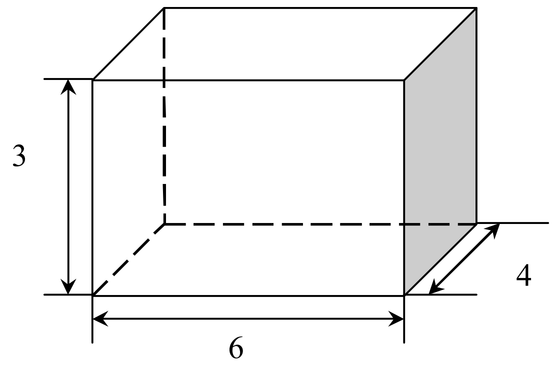


Рис. 28

а	б	в	г	д
10,2	25,3	5,8	13,8	18

Розв'язання: $S = S_{ст} + 0{,}75 \cdot S_{біч}$;$S_{біч} = 20 \cdot 3 = 60 м^2$; $S_{ст} = 6 \cdot 4 = 24 м^2$,
$S = 24 + 0{,}75 \cdot 60 = 69 м^2$; $m = 0{,}2 \cdot 69 = 13{,}8 кг$, обираємо п.1.г.

У завданні 2 до кожного з рядків інформації, позначених цифрами, виберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою. Поставте позначки в таблицях відповідей до завдань на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

14.2. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ зображено на рис. 29. До кожного початку речення (1– 4) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося вірне твердження .

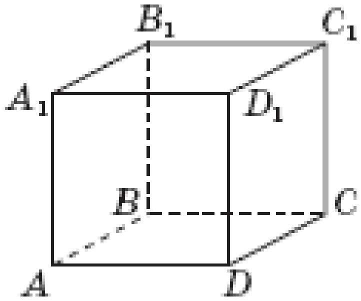


Рис. 29

Початок речення	Закінчення
1. Пряма AC	**А** належить площині AA_1B_1B.
2. Пряма A_1B	**Б** паралельна площині AA_1B_1B.
3. Пряма CD_1	**В** має з площиною AA_1B_1B лише дві спільні точки.
4. Пряма CB	**Г** перпендикулярна площині AA_1B_1B
	Д утворює з площиною AA_1B_1B кут $45°$

	А	Б	В	Г	Д
1					**Х**
2	**Х**				
3		**Х**			
4				**Х**	

Розв′язання. Заповнюючи таблицю, користуємося означеннями розташування прямої відносно площини у просторі (належність, паралельність тощо).

Розв′язання задачі 3 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення до бланку відповідей.

14. 3. Площа бічної поверхні правильної трикутної піраміди дорівнює 120 см^2, а її апофема дорівнює 5 см. Знайдіть ребро основи цієї піраміди.

Розв′язання. $S_{біч} = 3S = 120 \Rightarrow S = 40 = ah/2$. Тоді $a = 2S/h = 80/5 = 16$.

Відповідь.

	1	6	,	0		

Тема 15. Тіла і поверхні обертання

Поверхня обертання — поверхня, яка утворюється шляхом обертання лінії, яку називають твірною, навколо нерухомої прямої (вісі), при цьому вважається, що твірна при своєму обертанні незмінно пов'язана з віссю.

Тіло обертання — тіло, яке обмежене поверхнею обертання та можливо основами.

Циліндр. Циліндром (прямим круговим циліндром) називається тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його сторони (рис. 30).

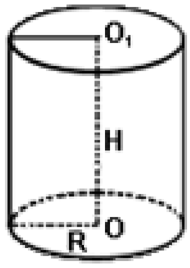


Рис. 30

Об'єм циліндра $V_ц = \pi R^2 H$, де R — радіус основи, H — висота циліндра.

Площа бічної поверхні циліндра $S_{б.ц} = 2\pi RH$.

Площа повної поверхні циліндра $S = 2S_{осн} + S_{б.ц} = 2\pi R(R + H)$.

Розгортка циліндра – прямокутник і два круги.

Конус. Конусом називається тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо його катета (рис. 31).

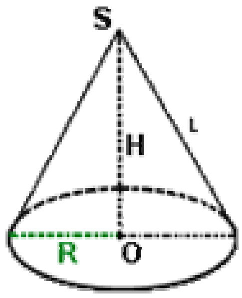


Рис. 31

Об'єм конуса $V_к = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H = \frac{\pi}{3} R^2 \cdot H$, де R — радіус основи, H — висота конуса.

Площа бічної поверхні конуса $S_{б.к} = \pi Rl$.

Площа повної поверхні конуса $S = S_{осн} + S_{б.ц} = \pi R(R + l)$, де R — радіус основи, l — твірна конуса.

Розгортка конуса — сектор круга і круг.

Зрізаний конус. Зрізаним конусом називається частина конуса, обмежена перерізом, перпендикулярним до його осі, основою і частиною бічної поверхні конуса (рис. 32).

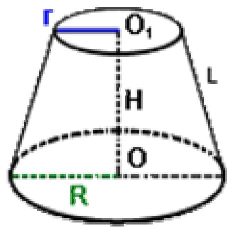


Рис. 32

Площа бічної поверхні зрізаного конуса $S_{б.зр.к} = \pi(R+r)\cdot l$, де R, r — радіуси основ, l — твірна зрізаного конуса.

Об'єм зрізаного конуса $V_{зр.к} = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 + Rr + r^2\right)\cdot H$, де H— висота зрізаного конуса.

Розгортка зрізаного конуса — частина кругового кільця і два круги.

<u>*Сфера і куля.*</u>

Сфера — це поверхня обертання, що складається з усіх точок *M*, однаково віддалених від центра *O* на величину радіуса *R*. Тіло у просторі, що обмежено сферою і містить її центр, називається кулею (рис. 33).

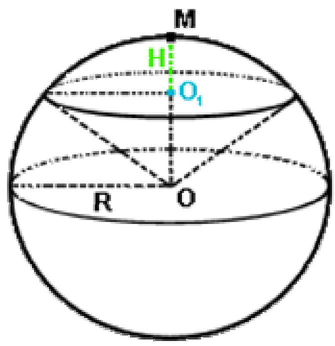


Рис. 33

Площа поверхні сфери $S = 4\pi R^2 = \pi D^2$, де R — радіус, $D = 2R$ — діаметр сфери.

Об'єм кулі $V = \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{\pi}{6}D^3$, де R — радіус кулі.

Площа поверхні кульового сегмента

$$S_{к.сег} = S_{біч} + S_{осн} = 2\pi RH + \pi\left(2RH - H^2\right),$$

де $H = MO_1$ — висота кульового сегменту, $R = MO$ — радіус кулі.

Об'єм кульового сегмента $V_{к.сег} = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3} \right)$.

Площа поверхні кульового сектора $S_{к.сек} = 2\pi RH + \pi R \cdot \sqrt{RH - H^2}$.

Об'єм кульового сектора $V_{к.сек} = \frac{2}{3}\pi \cdot R^2 H$.

Розглянемо розв’язання тестових завдань рівня ЗНО для наведеної теми.

У завданні 1 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку відповідей.

15.1. Свинцеву кулю радіуса 6 см переплавили в кульки однакового розміру, радіус кожної з яких – 1,5см. Скільки таких кульок одержали, якщо втратами свинцю можна знехтувати?

а	б	в	г	д
16	4	9	64	125

Розв’язання: За умов задачі : для кулі $R = 6$ см; для кульок $r = 1{,}5$ см. Тоді

$V = \frac{4\pi}{3} R^3$; $v = \frac{4\pi}{3} r^3$; $V = N \cdot v \to N = \frac{V}{v} = \left(\frac{R}{r}\right)^3 = 4^3 = 64$. Тому обираємо п.1.г.

У завданні 2 до кожного з рядків інформації, позначених цифрами, виберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою. Поставте позначки в таблицях відповідей до завдань на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

15.2. Дано розгортку конуса (рис. 34). Установіть відповідність між величинами (1– 4) пов’язаними з конусом, та числовими значеннями цих величин (А–Д).

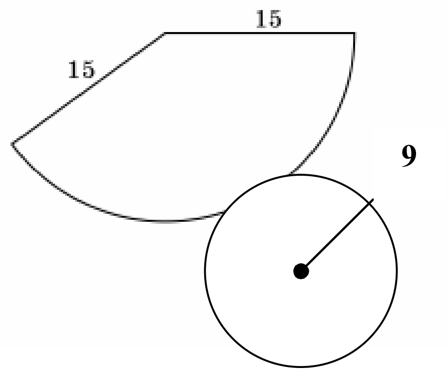


Рис. 34

Розв’язання: Знаходимо висоту конуса $H = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12$. Тоді за умовами задачі $R = 9, L = 15$.

Величини	Значення
1. Висота конуса, помножена на π	**А** 324π
2. Площа основи	**Б** 18π
3. Об'єм конуса	**В** 12π
4. Довжина кола основи	**Г** 360π
	Д 81π

	А	Б	В	Г	Д
1			Х		
2					Х
3	Х				
4		Х			

1. $\pi H = 12\pi$. **2.** $\pi R^2 = 81\pi$. **3.** $V = \pi R^2 H / 3 = 324\pi$. **4.** $2\pi R = 18\pi$.

Розв′язання задачі 3 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення до бланку відповідей.

15.3. У чотирикутну піраміду, в основі якої лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною 10см і основами 16см і 4см вписано конус. Знайдіть площу бічної поверхні конуса $S_{біч}$, якщо всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом $\frac{\pi}{3}$. У відповіді запишіть значення $S_{біч}/\pi$.

Розв′язання: $S = \frac{1}{2} l^2 \alpha$; $l = 8см$; $2\pi \cdot R = l \cdot \alpha \to \alpha = \frac{2\pi R}{l} = \frac{2\pi \cdot 4}{8} = \pi$.

$$S_{біч} = \frac{1}{2} \cdot 8^2 \cdot \pi = 32\pi; \quad \frac{S_{біч}}{\pi} = 32$$

Відповідь.

	3	2	,	0		

Тема 16. Координати та вектори у просторі

Вектором називається напрямлений відрізок. Довжина вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ — це відстань між його початком A і кінцем B. Позначення модуля $|\overline{a}| = |\overline{AB}|$.

Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Два вектори називаються *рівними*, якщо вони колінеарні, однаково спрямовані і мають однакові довжини.

Для будь-яких двох точок простору $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$ координати вектора $\overline{AB}$ визначаються рівностями $X = x_2 - x_1; Y = y_2 - y_1; Z = z_2 - z_1$.

Якщо $\overline{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$,тоді $|\overline{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$. *Напрямні косинуси вектора* знаходяться за формулами: $\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|}; \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|}; \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|}$. Кути α, β, γ — кути, які утворює вектор $\overline{a}$ відповідно з координатними осями Ox, Oy, Oz.

Проекція вектора $\overline{AB}$ на вісь u дорівнює добутку довжини вектора $\overline{AB}$ на косинус кута між ним та віссю u, тобто, $пр_u \overline{AB} = |\overline{AB}| \cos\varphi$, де φ — це кут між вектором $\overline{AB}$ та віссю u.

Будь-який вектор тривимірного простору має єдиний спосіб розкладання за векторами базису $\overline{a} = a_x \overline{i} + a_y \overline{j} + a_z \overline{k}$, де коефіцієнти розкладу a_x, a_y, a_z — це координати вектора $\overline{a}$ у базисі $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$, а вектори $\overline{i} = (1;0;0)$, $\overline{j} = (0;1;0)$, $\overline{k} = (0;0;1)$ — орти координатних осей.

Якщо $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z), \overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$, тоді $\overline{a} \pm \overline{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z)$.

При множенні на число $\lambda\overline{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$. Звідси легко отримати умову колінеарності векторів $\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} = \lambda\overline{b} \Leftrightarrow \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda$.

Приклад. Знайти значення m і n при яких вектори $\overline{a}(1;m;3)$ і $\overline{b}(5;10;n)$ колінеарні.

Розв'язання. За умови колінеарності векторів $\frac{1}{5} = \frac{m}{10} = \frac{3}{n}$. Тоді маємо $m = 2; n = 15$.

Скалярним добутком двох ненульових векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається число, що дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними, тобто

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi,$$

де φ — кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

Основні властивості скалярного добутку двох векторів:

1	$\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$	4	$\overline{a}\cdot\overline{b}=0\Leftrightarrow\overline{a}\perp\overline{b}$, або $\overline{a}=\overline{0}\vee\overline{b}=\overline{0}$
2	$\left(\lambda\overline{a}\right)\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot\left(\lambda\overline{b}\right)=\lambda\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)$	5	$\overline{a}^2=\overline{a}\cdot\overline{a}=\left\lvert\overline{a}\right\rvert^2\Rightarrow\left\lvert\overline{a}\right\rvert=\sqrt{\overline{a}^2}$
3	$\overline{a}\cdot\left(\overline{b}+\overline{c}\right)=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}$	6	$a\cdot b=\left\lvert\overline{a}\right\rvert пр_{\overline{a}}\overline{b}=\left\lvert\overline{b}\right\rvert пр_{\overline{b}}\overline{a}$

Якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ задано своїми координатами $\overline{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right),\overline{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$, то їх скалярний добуток визначається формулою $\overline{a}\cdot\overline{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

Кут φ між векторами $\overline{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$ і $\overline{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$ визначається рівністю $\cos\varphi=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$.

Приклад. Знайти кут між діагоналями паралелограма, який побудовано на векторах $\overline{a}(2;-2;2)$ і $\overline{b}(3;2;10)$.

Розв'язання. Знаходимо вектори — діагоналі паралелограма

$$\overline{d}_1=\overline{a}+\overline{b}=(5;0;12);\ \overline{d}_2=\overline{a}-\overline{b}=(-1;-4;-8).$$

Косинус кута між ними $\cos\varphi=\dfrac{\overline{d}_1\cdot\overline{d}_2}{\left\lvert\overline{d}_1\right\rvert\cdot\left\lvert\overline{d}_2\right\rvert}=\dfrac{-5-96}{\sqrt{169}\cdot\sqrt{81}}=-\dfrac{101}{117}$.

Під кутом між діагоналями розуміємо менший із двох суміжних, за даними задачі це буде гострий кут, який дорівнює $\arccos(|-101/117|)=31{,}32^\circ$.

Розглянемо розв'язання тестових завдань рівня ЗНО для наведеної теми.

У завданні 1 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку відповідей.

16.1. Точку $A(2;-3;-1)$ спочатку спроектували на площину Oxy та отримали точку A_1. Потім точку A_1 симетрично відобразили відносно початку координат і отримали точку A_2. Знайдіть координати точки A_2.

а	б	в	г	д
$(-2;3;0)$	$(2;-3;0)$	$(0;3;1)$	$(-2;0;1)$	$(-2;-3;0)$

Розв'язання: Розглянемо перетворення точок:

$A(2;-3;-1)\rightarrow A_1(2;-3;0)$; $A_1(2;-3;0)\rightarrow A_2(-2;3;0)$, обираємо п.1.а.

У завданні 2 до кожного з рядків інформації, позначених цифрами, виберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою. Поставте позначки в таблицях відповідей до завдань на перетині відповідних рядків (цифри) і стовпців (букви).

16.2. На рис. 35 зображено вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ і $\overline{d}$ у прямокутній системі координат. Для обраної пари векторів (1– 4) установіть відповідність з твердженням (А–Д).

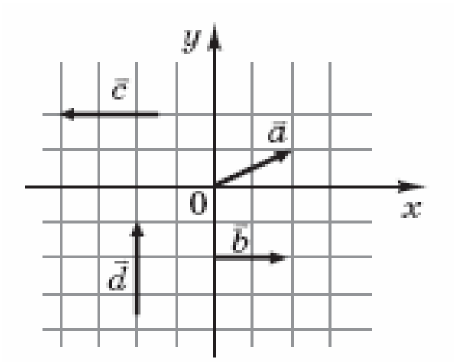


Рис. 35

Пара векторів	Твердження
1. $\overline{a}$ і $\overline{b}$	**А** вектори рівні
2. $\overline{a}$ і $\overline{c}$	**Б** вектори перпендикулярні
3. $\overline{b}$ і $\overline{c}$	**В** кут між векторами тупий
4. $\overline{c}$ і $\overline{d}$	**Г** скалярний добуток додатний
	Д вектори колінеарні, але не рівні

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1				**Х**	
2			**Х**		
3					**Х**
4		**Х**			

Розв'язання:

1. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ - ненульові, утворюють гострий кут, обираємо 1.Г.
2. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{c}$ утворюють тупий кут , обираємо 2.В.
3. Вектори $\overline{b}$ і $\overline{c}$ паралельні (колінеарні) та не рівні, обираємо 3.Д.
4. Вектори $\overline{c}$ і $\overline{d}$ перпендикулярні, обираємо 4.Б.

Розв'язання задачі 3 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення до бланку відповідей.

16.3. Дано точки $A(1;0;2), B(0;-1;2), C(-2;-3;0)$. Знайдіть квадрат довжини медіани AM трикутника ABC.

Розв'язання: Знаходимо координати т. M :

$$x_M = \frac{1}{2}(x_B + x_C) = -1\,, y_M = \frac{1}{2}(y_B + y_c) = -2;\ z_M = \frac{1}{2}(z_B + z_C) = 1\ .$$

Квадрат довжини медіани AM :

$$AM^2 = (x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2 + (z_A - z_M)^2 = 2^2 + 2^2 + 1^2 = 9.$$

Відповідь.

		9	,	0		

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ З МАТЕМАТИКИ

Варіант № 1

1. Серед чисел $a = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$; $b = \sqrt{6} - \sqrt[3]{6}$; $c = \sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$ укажіть усі від'ємні.

А	Б	В	Г	Д
c	b; c	a	a; b	a; c

2. Обчисліть $\cos 240^\circ$.

А	Б	В	Г	Д
$1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$

3. Розв'яжіть рівняння $\frac{3}{x^2} = 12$.

А	Б	В	Г	Д
$x = 1/2$	$x = \pm 1/2$	$x = -2$	$x = \pm 2$	$x = -1/2$

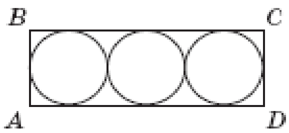
4. Обчисліть скалярний добуток векторів $\overline{a}(-1;2;-3)$ і $\overline{b}(-2;0;2)$.

А	Б	В	Г	Д
4	-2	2	-4	0

5. Розв'яжіть нерівність $\log_{0,8}(x-2) > 1$.

А	Б	В	Г	Д
$(2;+\infty)$	$(0;2)$	$(-\infty;2)$	$(2;2,8)$	$(3;+\infty)$

6. У прямокутник *ABCD* вписано круги однакового радіуса. Знайти довжину сторони *AD*, якщо загальна площа кругів дорівнює 12π.



А	Б	В	Г	Д
6	12	9	4	18

7. Функція $f(x)$ в точці $x_0 = 6$ має похідну $f'(6) = -2$. Обчисліть значення похідної функції $s(x) = f(x)\cdot(x+1)$ в точці x_0, якщо $f(6) = 4$.

А	Б	В	Г	Д
$s'(6) = 24$	$s'(6) = -12$	$s'(6) = -10$	$s'(6) = 14$	$s'(6) = -8$

8. Об'єм кулі дорівнює 288π см^3. Знайдіть її радіус.

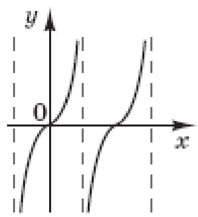
А	Б	В	Г	Д
6 см	3 см	9 см	8 см	12 см

9. Установіть відповідність між кожним виразом (1– 4) й тотожно йому рівним (А– Д)

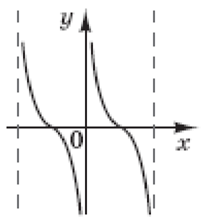
Вирази	**Тотожно рівні вирази**
1. $\frac{3a^4}{a^6}$	**А** $81a^{10}$
2. $(3a)^4 \cdot a^6$	**Б** $3a^{-2}$
3. $\left(3a^6\right)^4$	**В** $81a^{24}$
4. $\sqrt[6]{729a^4}$	**Г** $3a^{2/3}$
	Д $3a^{3/2}$

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1					
2					
3					
4					

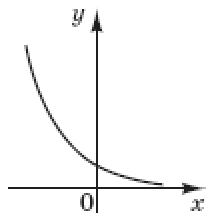
10. Установіть відповідність між ескізами графіків функцій (1 – 4) та відповідними формулами (А – Д).



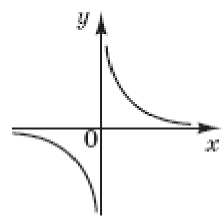
1.



2.



3.



4.

Ескізи	**Формули**
1. **1**	**А** $y = 0{,}4^x$
2. **2**	**Б** $y = \frac{1}{x^2}$
3. **3**	**В** $y = \frac{1}{x}$
4. **4**	**Г** $y = \operatorname{tg} x$
	Д $y = \operatorname{ctg} x$

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1					
2					
3					
4					

11. У залі кінотеатру 17 рядів. У першому ряду знаходиться 8 місць, а в кожному наступному на 2 місця більше, ніж у попередньому. Скільки всього місць у залі?

12. Обчисліть інтеграл $\int_{-2}^{1}\left(2x + x^2\right)dx$.

13. Основою піраміди є ромб, гострий кут якого дорівнює 30°. Усі бічні грані нахилені до площини її основи під кутом 60°. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо радіус кола, вписаного в її основу, дорівнює 4см.

14. Розв'яжіть систему $\begin{cases} 3\cos\dfrac{\pi y}{2} = x^2 - 4x + 7, \\ y + x - 6 = 0\,. \end{cases}$ Якщо система має єдиний розв'язок $(x_0; y_0)$, то у відповідь запишіть суму $x_0 + y_0$; якщо система має більше, ніж один розв'язок, то у відповідь запишіть суму усіх розв'язків.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1. Перетворюємо корені до загального показника, щоб знайти знак їх різниці

$$a = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} = \sqrt{12} - \sqrt{18} < 0;\ b = \sqrt{6} - \sqrt[3]{6} = \sqrt[6]{216} - \sqrt[6]{36} > 0;$$

$$c = \sqrt[3]{2} - \sqrt{3} = \sqrt[6]{4} - \sqrt[6]{27} < 0.$$

Обираємо 1.Д.

2. Маємо $\cos 240^\circ = \cos\left(180^\circ + 60^\circ\right) = -\cos 60^\circ = -\dfrac{1}{2}$. Обираємо 2.В.

3. Розв'язуємо рівняння $\dfrac{3}{x^2} = 12 \Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}$. Обираємо 3.Б.

4. Знаходимо $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 2 + 0 - 6 = -4$. Обираємо 4.Г.

5. Розв'язуємо нерівність $\log_{0,8}(x-2) > 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 > 0\,, \\ x - 2 < 0{,}8. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2\,, \\ x < 2{,}8. \end{array}\right. \Rightarrow x \in (2; 2{,}8)$.

Обираємо 5.Г.

6. Маємо $3S_{кр} = 12\pi; S_{кр} = \pi r^2 = 4\pi \Rightarrow r = \sqrt{4} = 2$. $AD = 6r = 12$. Обираємо 6.Б.

7. Знаходимо похідну $s'(x) = \left(f(x)\cdot(x+1)\right)' = f'(x)\cdot(x+1) + f(x)$. Тоді маємо $s'(6) = f'(6)\cdot 7 + f(6) = -14 + 4 = -10$. Обираємо 7.В.

8. Об'єм кулі $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 288\pi$. Знаходимо $r = \sqrt[3]{\dfrac{288\cdot 3}{4}} = \sqrt[3]{216} = 6$.Обираємо 8.А.

9. 1. $\dfrac{3a^4}{a^6} = 3a^{-2}$ **2.** $(3a)^4 \cdot a^6 = 81a^{10}$ **3.** $\left(3a^6\right)^4 = 81a^{24}$ **4.** $\sqrt[6]{729a^4} = \sqrt[6]{3^6} \cdot a^{\frac{2}{3}} = 3a^{\frac{2}{3}}$.

Тоді обираємо 1.Б ; 2.А ; 3. В ; 4.Г.

	А	Б	В	Г	Д
1		Х			
2	Х				
3			Х		
4				Х	

10. 1. $y = \operatorname{tg} x$ **2.** $y = \operatorname{ctg} x$ **3.** $y = 0{,}4^x$ **4.** $y = \dfrac{1}{x}$.

Тоді обираємо 1.Г ; 2.Д ; 3.А ; 4.В.

	А	Б	В	Г	Д
1				Х	
2					Х
3	Х				
4			Х		

11. Помічаємо, що кількості місць у рядах кінотеатру утворюють арифметичну прогресію, різниця якої дорівнює $d = 2$. Тоді $a_1 = 8;\, n = 17$. Далі знаходимо суму членів арифметичної прогресії $S_{17} = a_1 \cdot n + d \cdot \dfrac{n \cdot (n-1)}{2} = 8 \cdot 17 + 17 \cdot 16 = 408$.

Відповідь – всього місць у залі 408.

12. Обчислюємо інтеграл $\int\limits_{-2}^{1} \left(2x + x^2\right) dx = x^2\Big|_{-2}^{1} + \dfrac{1}{3} x^3\Big|_{-2}^{1} = 1 - 4 + \dfrac{1}{3}(1+8) = 0$.

Відповідь – інтеграл дорівнює 0.

13. Площа бічної поверхні піраміди складається з чотирьох рівних площ бічних граней. Кожна грань – трикутник, його площа дорівнює добутку довжини ребра основи на половину довжини апофеми. Розглядаючи прямокутний трикутник, де гіпотенуза – апофема, катет, що прилягає до кута 60°, дорівнює радіусу вписаного кола тобто 4см, визначаємо півапофеми – 4см.

Розглядаємо площину основи піраміди. Діагоналі поділяють ромб основи на чотири рівних прямокутних трикутника з гострими кутами 15° і 75°. Гіпотенуза трикутника – ребро основи піраміди. Висота, яка проведена до гіпотенузи, дорівнює радіусу вписаного кола. Тоді можна обчислити довжину сторони ромба

$$a = 4 \cdot \left(\text{tg}15^\circ + \text{ctg}15^\circ\right) = 4 \cdot \left(\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}\right) = 4 \cdot \frac{\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ}{\cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ} = \frac{8}{\sin 30^\circ} = 16 \text{ (см)}.$$

Знаходимо площу бічної грані та площу бічної поверхні піраміди

$S_{\text{біч}} = 4 \cdot S_{\text{тр}} = 4 \cdot a \cdot \dfrac{h}{2}$. Після підстановки значень $S_{\text{біч}} = 4 \cdot 16 \cdot 4 = 256\text{см}^2$.

Відповідь – 256.

14. Розв'язуємо систему $\begin{cases} 3\cos\dfrac{\pi y}{2} = x^2 - 4x + 7, \\ y + x - 6 = 0. \end{cases}$. Для цього перетворюємо перше рівняння $3\cos\dfrac{\pi y}{2} = \left(x^2 - 4x + 4\right) + 3 = (x-2)^2 + 3$. Звертаємо увагу на те, що ліва частина рівняння не більша за 3, а права – не менша 3. Тобто обидві частини дорівнюють 3. Тому $x = 2;\, y = 4k,\, k \in Z$. З другого рівняння маємо $y = 4$. Інших розв'язків немає. Отримали $x_0 = 2;\, y_0 = 4$, у відповідь запишемо їх суму — 6.

ДОДАТОК А

Математичні позначення та їх читання

$a = b$	*a* дорівнює *b*	*a* равно *b*	*a* is equal to *b*
$a \neq b$	*a* не дорівнює *b*	*a* не равно *b*	*a* is not equal to *b*
$a \approx b$	*a* наближено дорівнює *b*	*a* приближенно равно *b*	*a* approximately equal *b*
$a > b$	*a* більше *b*	*a* больше *b*	*a* greater than *b*
$a < b$	*a* менше *b*	*a* меньше *b*	*a* less than *b*
$\lvert a \rvert$	модуль *a*	модуль *a*	module *a*
$a \geq b$	*a* більше або дорівнює *b*	*a* больше или равно *b*	*a* equal or greater than *b*
$a \leq b$	*a* менше або дорівнює *b*	*a* меньше или равно *b*	*a* equal or less than *b*
$a + b$	*a* плюс *b*	*a* плюс *b*	*a* plus *b*
$a - b$	*a* мінус *b*	*a* минус *b*	*a* minus *b*
$a \cdot b$	*a* помножити на *b*	*a* умножить на *b*	*a* multiplied by *b*
$\frac{a}{b}$ *або* $a : b$	*a* поділити на *b*	*a* разделить на *b*	*a* divided by *b*
.	точка (в десятковому дробу)	точка (в десятичной дроби)	point
1%	відсоток, процент	процент	per cent
$(\ldots)$	круглі дужки	круглые скобки	round brackets
$[\ldots]$	квадратні дужки	квадратные скобки	square brackets
$\{\ldots\}$	фігурні дужки	фигурные скобки	braces
a^n	*a* в *n*-му степені	*a* в *n*-ой степени	*a* to the *n*-th power
$\sqrt[n]{a}$	корінь *n*-го степеня з *a*	корень *n*-ой степени из *a*	the *n*-th root out of *a*
$\sqrt{a}$	квадратний корінь з *a*	квадратный корень из *a*	the square root of *a*
$\angle A = \alpha$	кут *A*	угол *A*	angle *A*
$\sin \alpha$	синус α	синус α	sine α
$\cos \alpha$	косинус α	косинус α	cosine α
$tg\alpha$	тангенс α	тангенс α	tangent α
$\log_a b$	логарифм *b* за основою *a*	логарифм *b* по основанию *a*	logarithm *b* to the base *a*
$\lg a$	десятковий логарифм *a*	десятичный логарифм *a*	common logarithm *a*
$\ln a$	натуральний логарифм *a*	натуральный логарифм *a*	logarithm natural of *a*
$\arcsin a$	арксинус *a*	арксинус *a*	arcsine *a*
$\arctan a$	арктангенс *a*	арктангенс *a*	arctangent *a*
e^x	експонента *x*	экспонента *x*	exponent *x*
$y = f(x)$	*y* є функція від *x*	*y* – функция от *x*	*y* function of *x*
$y = f^{-1}(x)$	обернена функція	обратная функция	inverse function

const, C	константа	константа	constant
$\sum_{k=0}^{n} a_n$	сума a_n-их від 0 до *n*	сумма a_n-ых от 0 до *n*	sum of a_n-th from 0 to n
∞	нескінченність	бесконечность	infinity
$n!$	*n* факторіал	*n* факториал	*n* factorial
P_n	число перестановок	число перестановок	permutation, rearrangement
A_n^m	розміщення	размещения	arrangement
C_n^m	число комбінацій з *n* по *m*	число сочетаний из *n* по *m*	combination of *m* out of *n*
$a \in A$	*a* належить множині *A*	*a* принадлежит множеству *A*	*a* belongs to set *A*
$[a,b]$	сегмент *a*,*b*	сегмент *a*,*b*	segment *a*,*b*
(a,b)	інтервал *a*,*b*	интервал *a*,*b*	interval *a*,*b*
$(a,b]$	півінтервал *a*,*b*	полуинтервал *a*,*b*	half-interval *a*,*b*
$\vec{a} \parallel \vec{b}$	вектор $\vec{a}$ є колінеарним вектору $\vec{b}$	вектор $\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{b}$	vector $\vec{a}$ is collinear to vector $\vec{b}$
$\vec{a} \perp \vec{b}$	вектор $\vec{a}$ є перпендикулярним вектору $\vec{b}$	вектор $\vec{a}$ перпендикулярен вектору $\vec{b}$	vector $\vec{a}$ is perpendicular to vector $\vec{b}$
$\vec{a} \wedge \vec{b}$	кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$	угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$	the angle between the vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$
$\lim_{n\to\infty} a_n$	границя послідовності a_n	предел последо-вательности a_n	limit of the sequence a_n
$\lim_{x\to a} f(x)$	границя функції $f(x)$ при $x \to a$	предел функции $f(x)$ при $x \to a$	limit of the function $f(x)$ $x \to a$
Δx	приріст *x*	приращение *x*	increment of *x*
Δy	приріст функції	приращение функции	increment of function
dx	диференціал *x*	дифференциал *x*	differential of *x*
$\frac{dy}{dx}, y'$	похідна *y* за *x*	производная *y* по *x*	derivative of *y* with the respect to *x*
$\frac{d^n y}{dx^n}, y^{(n)}$	*n*-а похідна *y* за *x*	*n*-ая производная *y* по *x*	*n*-th derivative of *y* with the respect to *x*
$\int f(x)dx$	невизначений інтеграл	неопределенный интеграл	indefinite integral, antiderivative
$\int_a^b f(x)dx$	визначений інтеграл	определенный интеграл	definite integral

ДОДАТОК В

Таблиця значень основних тригонометричних функцій

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\mathrm{ctg}\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ДОДАТОК С

РОБОЧА НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА

З дисципліни «Математика»

Для підготовчих курсів (термін навчання 3 міс.)

1. МЕТА, ЗАВДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ, ЇЇ МІСЦЕ В НАВЧАЛЬНОМУ ПРОЦЕСІ

1.1. Мета викладання дисципліни

Основною метою викладання дисципліни «Математика» є фундаментальна підготовка слухачів підготовчих курсів (абітурієнтів) для забезпеченні рівня, необхідного для успішного складання зовнішнього незалежного оцінювання з математики, інтелектуального розвитку та майбутньої професійної діяльності.

1.2.Задачі вивчення дисципліни

Внаслідок вивчення даної дисципліни слухачі вдосконалюють знання та уміння :

- будувати математичні моделі різних об'єктів, процесів і явищ та досліджувати ці моделі засобами математики;
- виконувати математичні розрахунки (дії з числами, поданими в різних формах, дії з відсотками, складання та розв'язування пропорцій, наближені обчислення тощо);
- виконувати перетворення виразів (розуміти змістове значення кожного елемента виразу, знаходити допустимі значення змінних, знаходити числові значення виразів при заданих значеннях змінних, виражати з рівності двох виразів одну змінну через інші тощо);
- будувати й аналізувати графіки функцій, досліджувати їхні властивості;
- розв'язувати рівняння, нерівності та їх системи, текстові задачі складанням рівнянь, нерівностей та їх систем;
- зображати та знаходити на рисунках геометричні фігури, встановлювати їхні властивості й виконувати геометричні побудови;
- знаходити кількісні характеристики геометричних фігур (довжини, величини кутів, дуг, площі, об'єми);
- обчислювати ймовірності випадкових подій та розв'язувати найпростіші комбінаторні задачі;
- аналізувати інформацію, яка подана в різних формах (графічній, табличній, текстовій та ін.).

1.3.Перелік базових дисциплін, засвоєння яких необхідно для вивчення дисципліни

Базою вивчення дисципліни є шкільна загальноосвітня підготовка.

2 ЗМІСТ ДИСЦИПЛІНИ

МОДУЛЬ 1
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Лекційні заняття (24 год.) і теми для самостійного вивчення

Тема Т1. Дійсні числа , їх порівняння та дії з ними. Числові множини та співвідношення між ними [1, 20, 21] – 1 год.

Властивості дій з дійсними числами. Правила порівняння дійсних чисел. Ознаки подільності натуральних чисел на 2, 3, 5, 9, 10. Правила округлення цілих чисел і десяткових дробів. Означення кореня n-го степеня та арифметичного кореня n-го степеня. Властивості коренів. Означення степеня з натуральним, цілим та раціональним показниками, їхні властивості. Числові проміжки. Модуль дійсного числа та його властивості.

Практичні заняття – П 1.

Тема Т2. Відношення та пропорції. Відсотки. Основні задачі на відсотки [1, 20, 21] – 1 год.

Відношення, пропорції. Основна властивість пропорції. Означення відсотка. Правила виконання відсоткових розрахунків.

Практичні заняття – П 2.

Тема Т3. Раціональні, ірраціональні, степеневі, показникові, логарифмічні, тригонометричні вирази та їхні перетворення [1, 5, 6] – 2год.

Означення області допустимих значень змінних виразу зі змінними. Означення тотожно рівних виразів, тотожного перетворення виразу, тотожності. Означення одночлена та многочлена. Правила додавання, віднімання і множення одночленів та многочленів. Формули скороченого множення. Означення та властивості логарифма, десятковий і натуральний логарифми. Основна логарифмічна тотожність. Означення синуса, косинуса, тангенса, котангенса числового аргументу. Основна тригонометрична тотожність та наслідки з неї. Формули зведення, формули додавання та наслідки з них.

Практичні заняття – П 3.

Тема Т4. Лінійні, квадратні, раціональні, ірраціональні, показникові, логарифмічні, тригонометричні рівняння, нерівності та їх системи. Застосування рівнянь, нерівностей та їх систем до розв'язування текстових задач [1, 20, 21] – 2 год.

Рівняння з однією змінною, означення кореня (розв'язку) рівняння з однією змінною. Нерівність з однією змінною, означення розв'язку нерівності з однією змінною. Означення розв'язку системи рівнянь з двома змінними та методи їх розв'язань. Рівносильні рівняння, нерівності та їх системи. Методи розв'язування функціональних рівнянь.

Практичні заняття – П 4.

Тема Т5. Лінійні, квадратичні, степеневі, показникові, логарифмічні та тригонометричні функції, їх основні властивості. Числові послідовності [1, 20, 21] – 2 год.

Означення функції, область визначення, область значень функції, графік функції. Способи завдання функцій, основні властивості та графіки елементарних функцій. Означення функції, оберненої до заданої. Означення арифметичної та геометричної прогресій. Формули *n*-го члена арифметичної та геометричної прогресій. Формули суми *n* перших членів арифметичної та геометричної прогресій. Формула суми нескінченної геометричної прогресії зі знаменником $|q| < 1$.

Практичні заняття – П 5.

Тема Т6. Похідна функції, її геометричний та фізичний зміст. Похідні елементарних функцій. Правила диференціювання [1, 20, 21] – 2 год.

Рівняння дотичної до графіка функції в точці. Означення похідної функції в точці. Фізичний та геометричний зміст похідної. Таблиця похідних елементарних функцій. Правила знаходження похідної суми, добутку, частки двох функцій. Правило знаходження похідної складеної функції.

Практичні заняття – П 6.

Тема Т7. Дослідження функції за допомогою похідної. Побудова графіків функцій [1, 5, 20] – 1 год.

Достатня умова зростання (спадання) функції на проміжку. Екстремуми функції. Означення найбільшого і найменшого значень функції.

Практичні заняття – П 7.

Тема Т8. Первісна та визначений інтеграл. Застосування визначеного інтеграла до обчислення площ криволінійних трапецій [1, 21, 31] – 2 год.

Означення первісної функції, визначеного інтеграла, криволінійної трапеції. Таблиця первісних функцій. Правила знаходження первісних. Формула Ньютона – Лейбніца .

Практичні заняття – П 8.

Тема Т9. Перестановки (без повторень). Комбінаторні правила суми та добутку. Ймовірність випадкової події. Вибіркові характеристики [1, 20, 21] – 1 год.

Означення перестановки (без повторень). Комбінаторні правила суми та добутку. Класичне означення ймовірності події, підрахунки ймовірностей подій. Означення вибіркових характеристик рядів даних (розмах вибірки, мода, медіана, середнє значення). Графічна, таблична, текстова та інші форми подання статистичної інформації.

Практичні заняття – П 9.

Тема Т10. Найпростіші геометричні фігури на площині та їх властивості. Коло та круг. Трикутники [2, 21, 31] – 2 год.

Поняття точки і прямої, променя, відрізка, ламаної, кута. Аксіоми планіметрії. Суміжні та вертикальні кути, бісектриса кута; властивості суміжних та вертикальних кутів, властивість бісектриси кута. Паралельні та перпендикулярні прямі. Перпендикуляр і похила, серединний перпендикуляр, відстань від точки до прямої. Ознаки паралельності прямих. Теорема Фалеса, узагальнена теорема Фалеса. Коло, круг та їх елементи і властивості. Види трикутників та їх основні властивості.

Практичні заняття – П10.

Тема Т11. Чотирикутник [2, 20, 21] – 2 год.

Чотирикутник та його елементи. Паралелограм та його властивості, ознаки паралелограма. Прямокутник, ромб, квадрат, трапеція та їх властивості. Середня лінія трапеції та її властивість. Вписані в коло та описані навколо кола чотирикутники.

Практичні заняття – П11.

Тема Тс12. Многокутники [2, 4, 6 - 9, 12, 21, 22]

Многокутник та його елементи, опуклий многокутник. Периметр многокутника. Сума кутів опуклого многокутника. Правильний многокутник та його властивості. Вписані в коло та описані навколо кола многокутники

Тема Т13. Геометричні величини та їх вимірювання. Координати та вектори на площині. Геометричні перетворення [2, 20, 21] – 2 год.

Довжина відрізка, кола та його дуги. Величина кута, вимірювання кутів. Периметр многокутника. Геометричні перетворення. Гомотетія. Формули для обчислення площі трикутника, паралелограма, ромба, квадрата, трапеції, правильного многокутника, круга, кругового сектора. Прямокутна система координат на площині, координати точки. Формула для обчислення відстані між двома точками та формула для обчислення координат середини відрізка. Рівняння прямої та кола. Поняття вектора, довжина вектора, колінеарні вектори, рівні вектори, координати вектора.

Практичні заняття – П12.

Тема Т14. Прямі та площини у просторі. Многогранники [2, 9, 21, 22] – 2 год.

Аксіоми і теореми стереометрії. Взаємне розміщення прямих у просторі, прямої та площини у просторі, площин у просторі. Ознаки паралельності прямих, прямої і площини, площин, паралельне проектування. Ознаки перпендикулярності прямої і площини, двох площин. Проекція похилої на площину, ортогональна проекція. Пряма та обернена теореми про три перпендикуляри. Відстань від точки до площини, від точки до прямої, від прямої до паралельної їй площини, між паралельними прямими, між паралельними площинами, між мимобіжними прямими. Ознака мимобіжності прямих. Кут між прямими, прямою та площиною. Двогранний кут, його лінійний кут. Многогранники та їх елементи, основні види многогранників: призма, паралелепіпед, піраміда, зрізана піраміда.

Практичні заняття – П13.

Тема Тс15. Тіла і поверхні обертання [2, 9, 20, 21]

Тіла і поверхні обертання та їх елементи, основні види тіл і поверхонь обертання: циліндр, конус, зрізаний конус, куля, сфера. Формули для обчислення площ поверхонь, об'ємів тіл обертання.

Тема Т16. Координати та вектори у просторі [**2, 20, 21**] **– 2 год**.

Прямокутна система координат у просторі, координати точки. Формула для обчислення відстані між двома точками та формула для обчислення координат середини відрізка. Поняття вектора, довжина вектора, колінеарні вектори, рівні вектори, координати вектора. Додавання, віднімання векторів, множення вектора на число. Скалярний добуток векторів та його властивості. Формула для знаходження кута між векторами, що задані координатами. Умови колінеарності та перпендикулярності векторів, що задані координатами.

Практичні заняття – П14.

Практичні заняття (32 год.)

П1.	Дійсні числа та дії з ними. Числові множини	– 2 год.
П2.	Відношення та пропорції. Відсотки. Основні задачі на відсотки	– 2 год.
П3.	Раціональні, ірраціональні, степеневі, показникові, логарифмічні, тригонометричні вирази та їхні перетворення	– 3 год.
П4.	Лінійні, квадратні, раціональні, ірраціональні, показникові, логарифмічні, тригонометричні рівняння, нерівності та їх системи. Застосування рівнянь, нерівностей та їх систем до розв'язування текстових задач	– 3 год.
П5.	Елементарні функції, їх властивості. Числові послідовності	– 2 год.
П6.	Похідна функції, її геометричний та фізичний зміст. Похідні елементарних функцій. Правила диференціювання	– 2 год.
П7.	Дослідження функції методами аналізу. Побудова графіків функцій	– 2 год.
П8.	Первісна та визначений інтеграл. Застосування визначеного інтеграла до обчислення площ криволінійних трапецій	– 2 год.
П9.	Перестановки (без повторень). Комбінаторні правила суми та добутку. Ймовірність випадкової події. Вибіркові характеристики	– 2 год.
П10.	Найпростіші геометричні фігури на площині та їх властивості	– 2 год.
П11.	Чотирикутник**.** Многокутники	– 3 год.
П12.	Геометричні величини та їх вимірювання. Координати та вектори на площині	– 2 год.
П13.	Прямі та площини у просторі. Многогранники	– 3 год.
П14.	Координати та вектори у просторі	– 2 год.

3 САМОСТІЙНА РОБОТА АБІТУРІЄНТА (52 год.)

3.1. Опрацювання лекційного матеріалу (0,25 год. / 1 год. лекції) – 6 год.
3.2. Підготовка до практичних занять (0,5год. / 1 год. пр. занять) – 16 год.
3.3. Опрацьовування окремих розділів програми, які винесені на самостійне опрацювання:
 3.3.1. Тема Тс12. Многокутники – 5 год.
 3.3.2. Тема Тс15. Тіла і поверхні обертання – 5 год.
3.4. Виконання домашніх завдань за розділами:
 3.4.1. Числа і вирази – 3 год.
 3.4.2. Рівняння, нерівності та їх системи – 3 год.
 3.4.3. Функції – 3 год.
 3.4.4. Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики – 3 год.
 3.4.5. Планіметрія – 4 год.
 3.4.6. Стереометрія – 4 год.

4 НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ

4.1 ОСНОВНА Й ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

1. Алгебра і початки аналізу. Підручник для 10-11 класів серед. шк. / А. М. Колмогоров, О. М. Абрамов, Ю. П. Дудніцин та ін. За ред. А. М. Колмогорова. – К.: Освіта, 1992. – 350 с.
2. Апостолова Г.В.. Геометрія (підручник)*. – К., Генеза, 2008
3. Афанасьєва О.М. та ін.. Геометрія. Підручник для шкіл (класів) технічного профілю. – К., Навчальна книга-Богдан, 2003
4. Афанасьєва О.М. та інші. Алгебра і початки аналізу (підручник). – К., Навчальна книга-Богдан, 2004
5. Бевз Г.П.. Алгебра і початки аналізу. Підручник для шкіл, ліцеїв, гімназій гуманітарного напряму. – К., ТОВ "Бліц", 2005
6. Бевз Г.П.. Алгебра і початки аналізу (підручник). – К., Освіта, 2005
7. Бевз Г.П., Бевз В.Г.. Математика (підручник)*. – К., Зодіак-ЕКО, 2005
8. Бевз Г.П., Бевз В.Г.. Геометрія. (підручник)*. – К., Вежа, 2008
9. Бевз Г.П., Бевз В.Г.. Алгебра (підручник)*. – К., Зодіак - ЕКО, 2009
10. Владімірова Н.Г.. Геометрія (підручник)*. – К., Вежа, 2007
11. Бурда М.І., Тарасенкова Н.А.. Геометрія (підручник)*. – К., Зодіак-ЕКО, 2007
12. Возняк Г.М., Литвиненко Г.М., Мальований Ю.І.. Алгебра (підручник)*. – К., Навчальна книга - Богдан, 2009
13. Єршова А.П., Голобородько В.В., Крижанівський О.Ф., Єршов С.В.. Геометрія (підручник)*. – К., Ранок, 2009
14. Істер О.С.. Алгебра.(підручник)*. – К., Освіта, 2007
15. Істер О.С.. Геометрія (підручник)*. – К., Освіта, 2007

16.Кінащук Н.Л., Біляніна О.Я., Черевко І.М.. Алгебра (підручник)*. – К., Генеза, 2008
17.Кравчук В.Р., Підручна М.В., Янченко Г.М.. Алгебра (підручник)*. – К., Підручники і посібники, 2009
18.Кравчук В.Р., Янченко Г.М.. Математика (підручник)*. – К., Підручники і посібники, 2005
19.Кравчук В.Р., Янченко Г.М.. Алгебра. (підручник)*. – К., Підручники і посібники, 2007
20. Математика для вступників до вузів. Навчальний посібник /М. Ф. Бондаренко, В. А. Дікарев, О. Ф. Мельников та ін. . – Харків: «Компанія СМІТ», 2002. – 1120 с.
21. Математика. Комплексний довідник / О. М. Титаренко, О. М. Роганин, О. М. Максименко та ін. – Х.: Торсінг плюс, 2010. – 320 с.
22.Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.. Алгебра. Підручник для класів із поглибленим вивченням математики*. – К., Гімназія, 2008
23.Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.. Геометрія. Підручник для класів із поглибленим вивченням математики»*. – К., Гімназія, 2008
24.Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.. Алгебра (підручник)*. – К., Гімназія, 2009
25.Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.. Геометрія (підручник)*. – К., Гімназія, 2009
26.Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.. Алгебра. (підручник). – К., Гімназія, 2008
27. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів /Нелін Є. П., Долгова О. Є. .— 2-ге вид., виправл. і доп.— X.: Світ дитинства, 2006.— 416 с.
28. Погорєлов О.В.. Геометрія (підручник). – К., Школяр, 2001
29. Роганін О.М. Алгебра та початки аналізу в таблицях та схемах. – Х.: Торсінг плюс, 2008. – 112 с.
30. Роганін О. М. Геометрія в таблицях і схемах. – Х.: Торсінг плюс, 2010. – 96с.
31.Скрипник Т. В. Математика для 9 – 11 класів: Довідник школяра і студента.– Донецьк: ТОВ ВКФ «БАО», 2006. – 320 с.
32. Тадеєв В.О.. Геометрія (підручник). – К., Навчальна книга-Богдан, 2004
33. Шкіль М. І. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10-11 кл. загальноосвіт. навч. закладів / М. І. Шкіль, 3. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук . – 2-ге вид,- К.: Зодіак-ЕКО, 2001. – 608 с.
34. Янченко Г. М., Кравчук В.Р. Математика (підручник)*. – К., Підручники і посібники, 2006

4.2 МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ

1) Комплекти індивідуальних завдань по розділам.

5 КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЕКЗАМЕНАЦІЙНОЇ РОБОТИ

МЕТОДИ ОЦІНЮВАННЯ: **підсумковий письмовий тест.**

Екзаменаційна робота (підсумковий письмовий тест) в цілому оцінюється за 100-бальною шкалою (від 0 до 100) за наступними критеріями:

– кожне завдання оцінюється максимальною сумою 5 балів за повне і правильне рішення;

– максимальна оцінка за завдання знижується на 2 – 3 бали за арифметичні та логічні помилки, допущені при рішенні завдання;

– завдання оцінюється в 0 балів за неправильне, логічно невірне, з арифметичними помилками рішення або за відсутність рішення;

– завдання оцінюється в 0 балів при зміні абітурієнтом умови завдання або рішення задачі, яка відсутня в білеті.

В екзаменаційній роботі вступника виставляються бали за відповідь на кожне завдання, а також підсумковий бал за роботу. В екзаменаційну відомість і в свідоцтво абітурієнта виставляється підсумковий бал за роботу.

Шкала оцінювання

95 – 100 балів − п'ять балів до сертифікату УЦОЯО з математики;
85 – 94 бали – чотири з половиною до сертифікату УЦОЯО з математики;
75 – 84 бали − чотири до сертифікату УЦОЯО з математики;
65 – 74 бали – три з половиною до сертифікату УЦОЯО з математики;
60 – 64 бали − три до сертифікату УЦОЯО з математики;
менше за 45 балів − два бали до сертифікату УЦОЯО з математики.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК – СЛОВНИК

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Апостолова Г.В. Геометрія (підручник)*. – К., Генеза, 2008
2. Афанасьєва О.М. та ін. Геометрія. Підручник для шкіл (класів) технічного профілю. – К., Навчальна книга – Богдан, 2003
3. Афанасьєва О.М. та інші. Алгебра і початки аналізу (підручник). – К., Навчальна книга – Богдан, 2004
4. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Геометрія. (підручник)*. – К., Вежа, 2008
5. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Алгебра (підручник)*. – К., Зодіак - ЕКО, 2009
6. Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. Геометрія (підручник)*. – К., Зодіак-ЕКО, 2007
7. Вища математика: Підручник: У 2 кн. - 2-ге вид., перероб. і доп. – К.:Либідь, 2003. – кн. 1. Основні розділи / Г. И. Призва, В. В. Плахотник, Л. Д.Гординський та ін..; За ред.. Г. Л. Кулініча. - 400 с.
8. Возняк Г.М., Литвиненко Г.М., Мальований Ю.І. Алгебра (підручник)*. – К., Навчальна книга – Богдан, 2009
9. Дюженкова Л. І., Носаль Т. В. Вища математика: практикум: навчальний посібник - К: Вища школа, 1991. - 317 с.
10. Єршова А.П., Голобородько В.В., Крижанівський О.Ф., Єршов С.В. Геометрія (підручник)*. – К., Ранок, 2009
11. Кравчук В.Р., Підручна М.В., Янченко Г.М. Алгебра (підручник)*. – К., Підручники і посібники, 2009
12. Математика для вступників до вузів. Навчальний посібник /М. Ф. Бондаренко, В. А. Дікарев, О. Ф. Мельников та ін. . – Харків: «Компанія СМІТ», 2002. – 1120 с.
13. Математика. Комплексний довідник / О. М. Титаренко, О. М. Роганин, О. М. Максименко та ін. – Х.: Торсінг плюс, 2010. – 320 с.
14. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.. Алгебра (підручник)*. – К., Гімназія, 2009
15. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.. Геометрія (підручник)*. – К., Гімназія, 2009
16. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів /Нелін Є. П., Долгова О. Є. — 2-ге вид., виправл. і доп.— Х.: Світ дитинства, 2006.— 416 с.
17. Погорєлов О.В.. Геометрія (підручник). – К., Школяр, 2001
18. Роганін О.М. Алгебра та початки аналізу в таблицях та схемах. – Х.: Торсінг плюс, 2008. – 112 с.
19. Роганін О. М. Геометрія в таблицях і схемах. – Х.: Торсінг плюс, 2010. – 96с.
20. Скрипник Т. В. Математика для 9 – 11 классов: Справочник школьника и студента.– Донецк: ООО ПКФ «БАО», 2007. – 320 с.
21. Скрипник Т. В. Математика для 9 – 11 класів: Довідник школяра і студента. – Донецьк: ТОВ ВКФ «БАО», 2006. – 320 с.

Навчальне видання

***Нікулін** Олександр Вікторович*

***Наконечна** Тетяна Всеволодівна*

МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник для технічних університетів

Видання друкується в авторський редакції

Відповідальний редактор Біла К.О.

Підписано до друку 02.04.2014. Формат $60 \times 84 1/16$
Ум. друк. Арк.. 5,2 . Тираж 300 прим. Зам. № 0414-02.

Видавець та виготовлювач СПД Біла К.О.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб’єктів видавничої справи ДК № 3618 від 06.11.2009

Надруковано на поліграфічній базі видавця Білої К.О.
Поштова адреса: Україна, 49087, м. Дніпропетровськ,
п/в 87, а/с 4402.

тел.. +38 (067) 972-90-71

www.confcontact.com
e-mail: conf@confcontact.com