

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДНІПРОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Трикіло А.І.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

«Математичне моделювання в електроніці»

для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня

зі спеціальності 171 «Електроніка»

за освітньо-професійною програмою «Електроніка»

Затверджено:

Редакційно-видавничою секцією
науково-методичної ради ДДТУ

_____ 2018 р. протокол № _____

Кам'янське 2018

Розповсюдження і тиражування без офіційного дозволу
Дніпровського державного технічного університету заборонено.

Конспект лекцій з дисципліни «Математичне моделювання в електроніці»
для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня
зі спеціальності 171 «Електроніка»
за освітньо-професійною програмою «Електроніка»
Укладач: Трикіло А.І– М Кам'янське: ДДТУ, 2018. – 33 с.

Укладач: доценти, кандидати техн. наук Трикіло А.І.

Відповідальний за випуск: завідувач кафедри Електроніки,
доктор технічних наук, професор. Мещанінов С.К

Рецензент: кандидат технічних наук, доцент Багрій В.В.,

Затверджено на засіданні кафедри Електроніки
(протокол № _1_ від __20. 01. __2018 р.)

Коротка анотація: : у конспекті лекцій наведені теоретичні матеріали що до методів та засобів математичного моделювання електронних систем, аналіз їх статичних режимів нелінійних електронних схем та малосигнальний аналіз схеми в частотній області.

Зміст

Введення	4
1 Загальні питання моделювання електронних ланцюгів.	5
1.1 Математичні моделі електронних ланцюгів.	5
1.2 Класифікація математичних моделей електронних схем.	6
1.3 Класифікація електронних схем по типу рівнянь вживаних в їх математичних моделях.	7
1.4 Моделі компонентів електронних схем.	8
1.4.1. Ідеальні активні перетворювачі.	8
1.4.2. Аномальні елементи.	9
1.4.3. Напівпровідниковий діод.	10
1.4.4. Біполярний транзистор.	11
2 Аналіз статичного режиму нелінійних електронних схем . . .	13
2.1. Формування схемної моделі.	13
2.2. Формування математичної моделі.	15
2.3. Решение рівнянь статичного режиму.	18
2.4. Визначення елементів матриці Якобі.	20
3 . Малосигнальний аналіз схеми в частотній області.	22
3.1 Формування схемної і математичної моделей.	22
3.2 Передавальна функція. Частотні характеристики.	23
3.3 Визначення функції чутливості.	25
3.4 Аналіз стійкості схеми	26
Список використаних джерел	28

Введення

Проектування електронних схем (або просте проектування схемотехніки) зводиться до рішення групи задач синтезу і задач аналізу. При цьому під структурним синтезом розуміють створення (інтуїтивне або формалізоване) якогось варіанту схеми, не обов'язково остаточного. В процесі проектування синтез як задача може виконуватися багато раз, чергуючи з рішенням задач аналізу. В задачу аналізу входить вивчення властивостей схеми по заданій в результаті синтезу її структурі, характеру вхідних в неї компонентів і їх параметрів.

Методи аналізу і розрахунку електронних схем постійно розвиваються і удосконалюються. Причин цьому дещо. По-перше, стрімко ускладнюється сам предмет аналізу за рахунок:

- . якісного переродження елементної бази (від ламп до транзистори, мікросхемам, мікропроцесорів, приладів функціональної електроніки);
- . виникнення нових принципів побудови пристроїв по усилению, обробці електричних сигналів, перетворенню електричної енергії;
- . розширення асортименту приладів і схем з істотно нелінійними характеристиками (тиристри, динистри, одноперехідні транзистори, оптрони, лямбда-транзистори, тунельні діоди, магніто-транзисторні елементи і ін.);
- . упродовження нових дискретно-імпульсних режимів роботи електронних схем перетворення інформації і електричної енергії.

По-друге, якісний стрибок відбувається в технічних засобах аналізу і розрахунку електронних схем (від логарифмічної лінійки до мікрокалькуляторів, мікрокомп'ютерів, персональних і універсальних ЕОМ), які можуть тепер проводити не тільки численні розрахунки, але і вирішувати складні логічні задачі.

По-третє, підвищуються вимоги до точності, масштабності і глибини аналізу і розрахунку електронних схем, оскільки сучасна тех-нологія виробництва (наприклад, мікросхем) виключає їх експериментальную доведення, а вимоги до технічних і метрологічних параметрів електронних пристроїв постійно ростуть.

По-четверте, ускладнюється вид сигналів, що впливають на схему за рахунок масової появи в їх складі так званих розривних функцій [1].

Мета аналізу електронних схем полягає в отриманні найбільш повної інформації про їх властивості, виявленні співвідношень між входними і вихідними параметрами, необхідними для розробки алгоритмів розрахунку відомих ланцюгів і синтезу нових заданих технічних вимогах.

Задача аналізу електронних схем включає побудову адекватної математичної моделі електронної схеми, визначення по цій моделі заданих функцій і параметрів, побудову частотних, тимчасових і інших характеристик. На цій основі проводиться дослідження обмежених і граничних перспективних можливостей схеми по

функціональ-ному перетворенню вхідних сигналів, досяжної точності преобра-зования або формування заданої форми сигналу, а також осу-ществляється пошук шляхів вдосконалення схем з метою розширення їх функціональних можливостей, підвищення точності, стабільності, быс-тродействия, стійкості і т.д.

Глибокий і ретельний аналіз схем дозволяє провести їх чітку класифікацію по структурних особливостях, що визначають загальні за-кономерности перетворення електричних сигналів і інші властивості, сформулювати рекомендації по оптимальному вибору варіантів схем певного класу по заданих технічних вимогах на проєктований пристрій. Це, як відомо, є першим і тому дуже важливим етапом проєктування електронних пристроїв, непіддатливим поки бажаній формалізації.

Історично розвиток методології аналізу і розрахунку електронних схем йшов по двох напрямках. По-перше, це аналіз лінійних моделей на базі операційного числення. Методи аналізу, розвинені в рамках цього напрямку, не втрачають свого значення і в даний час, володіючи відомим рядом достоїнств. По-друге, це аналіз нелінійних схем чисельними методами.

1. Загальні питання моделювання електронних ланцюгів

1.1. Математичні моделі електронних ланцюгів

В техніці проєктування схемотехніки розрізняють внутрішні, зовнішні і вихідні схемні параметри.

Внутрішні параметри W характеризують окремі компоненти проєктованого пристрою. Їх розділяють на первинні внутрішні (фізико-технічні) параметри, які відображають конструктивно-тех-нологические і еоектрофізичні властивості компонентів, і вторинні внутрішні (електричні) параметри, в які характеризують соот-носіння між струмами і напругами на полюсах компонентів схеми. До первинних відносяться геометричні розміри окремих полупровод-никовых областей, електричні характеристики напівпровідникових ма-териалов і т.д. До вторинних внутрішніх параметрів . опори резисторів, місткості конденсаторів і т.п. Зв'язок електричних (вторинних) параметрів компонентів з їх фізико-технологічними па-раметрами задається у вигляді аналітичних виразів (рівнянь), таблиць (матриць), схем заміщення (микро- і макромоделей топологічного типу).

Зовнішні параметри Q характеризують умови, в яких працює пристрій (температура і вогкість навколишнього середовища, початкове сос-тояние пристрої, параметри вхідної дії, конкретні значення часу або частоти, параметри і характер навантаження, рівень перешкод, радіації і т. п.).

Вихідні параметри (характеристики) F характеризують коли-чественные значення техніко-економічних показників і визначають функціональне призначення схеми. Вихідні параметри також розділяють на *первинні і вторинні*. До первинних $X(t)$ відносять струми і напруги на полюсах компонентів схеми,

вузлові напруги, контурні струми, вихідні напруги i струми ($X_{\text{вих}}(t)$). Іноді первинні вихідні параметри називають фазовими змінними.

Вторинними вихідними (схемними) параметрами називають функції (схемні функції) щодо внутрішніх і первинних вихідних параметрів $F_i = F_i(X_i, X_{\text{вих}}(t), W)$. До схемних функцій в загальному випадку відносять аналітичну залежність від внутрішніх параметрів і ком-плексної частоти, що визначає вихідні сигнали схеми. В тимчасовій області схемні параметри представляються у вигляді амплітудної, імпульсної і перехідної характеристик, а в частотній - амплітудно-частотними, фазочастотними і амплітудно-фазовими характеристиками. До вихідних параметрів схеми також відносять параметри названих характеристик: тривалість затримок і фронтів реакцій схеми $X_{\text{вих}}(t)$ на вхідні дії $Q(t)$, вхідний і вихідний опір схеми в діапазоні частот або на фіксованій частоті; граничні частоти смуги пропускання; максимально допустима величина перешкоди по вхідній дії; потужність розсіяння в елементах; амплітуда вихідного сигналу $X_{\text{вих}}$, $\max(t)$ або його середнє значення і ін. Після рішення задачі структурного синтезу необхідно скоректувати внутрішні параметри схеми [1].

Моделі компонентів електронних схем можуть бути представлені рівняннями (математичними моделями) і схемами заміщення (схемними моделями), що складаються з двополіусників (лінійних і нелінійних) і залежних джерел або аномальних елементів (нуллаторов, нораторов, уністоров).

Під математичною моделлю схеми електронного ланцюга ми поні-травнем математичне уявлення (система рівнянь, формули, правила або будь-які інші математичні образи), що відображає з необхідною точністю і відповідно до фізичних законів процеси, що протікають в ланцюзі, і дозволяючі знайти необхідні параметри і характеристики схеми.

Умови вибору математичної моделі визначаються самими раз-личними, а порою і суперечливими чинниками. Як правило, чим складніше сам реальний об'єкт або чим точніше і глибше вимагається провести його дослідження, тим складніше в загальному випадку виходить його математи-ческое уявлення (опис). Особливо важливий при цьому согласо-ваний з об'єктом і метою дослідження вибір мови математичного опису його моделі. Саме на цьому етапі повинні бути забезпечені зручність сприйняття і найпростіший шлях рішення задачі. Мовою опису вибраної математичної моделі визначається і ступінь її подальшого узгодження з можливостями техніки дослідження. Так, для переважно якісного дослідження простих схем необхідна мова математичного опису, найбільш тісно пов'язаний із структурою об'єкту (топологією схеми), а результати повинні представлятися у вигляді по можливості простої аналітичної залежності або двовимірних графіків і т.п. Точний і багатобічний аналіз складних об'єктів (схем), що проводиться на ЕОМ, вимагає приме-нення опису математичної моделі,

зручного для постановки задачі аналізу на ЕОМ і подальшого чисельного її рішення з отриманням необхідних характеристик і параметрів схеми за допустимий час рахунку.

1.2. Класифікація математичних моделей електронних схем

Математичні моделі, що розробляються, повинні оцінюватися по наступних критеріях: точність, економічність, універсальність.

По складності (повноті обхвату) розрізняють моделі компонентів, моделі схем і моделі систем, що включають декілька схем.

По характеру властивостей моделі, що відображаються, діляться на функціональні і топологічні (структурні). Функціональні моделі отражають процеси функціонування пристрою. Частіше всього вони записуються у вигляді системи рівнянь. Топологічні моделі відображають тільки структурні особливості пристроїв. Вони, як правило, мають форму графів, списків векторів, матриць і відображають взаємне розположення елементів в просторі, наявність зв'язків між ними і т.д. [1].

За способами отримання функціональні моделі ділять на теоретичні і формальні. Теоретичні моделі будують, використовуючи фізичні закони (Ома, Кирхгофа). По характеру залежності, тобто по типу коефіцієнтів в рівняннях, моделі ділять на лінійні і нелінійні.

Залежно від потужності безлічі значень змінних моделі розрізняють як безперервні і дискретні. В безперервних моделях змінні безперервні, тому безліч варіантів рішень має потужність континууму. Змінні дискретних моделей дискретні, а безліч рішень рахунковий.

За формою зв'язків між вихідними внутрішніми і зовнішніми параметрами розрізняють моделі алгоритмічні (у вигляді систем рівнянь в базисі вузлових або контурних змінних) і аналітичні (у вигляді явної залежності вихідних параметрів від внутрішніх і зовнішніх).

По тому, чи враховують моделі інерційність процесів, розрізняють моделі статичні (по постійному струму) і динамічні (по змінному струму).

1.3. Класифікація електронних схем по типу рівнянь, вживаних в їх математичних моделях

Електронний ланцюг залежно від характеристик вхідних в неї компонентів може володіти самими різними властивостями. Реальна залежність між струмами і напругами на її полюсах в загальному випадку завжди нелінійна, достатньо складна і носить певною мірою статистичний характер. В той же час залежно від режиму роботи пристрою по струму (напрузі) і по ряду зовнішніх дій ступінь нелінійності характеристик вхідних в неї компонентів може бути різною, а статистичний

характер параметрів компонентів уст-ройства в стаціонарних умовах його експлуатації вельми мало виражений.

При формуванні математичної моделі електронного ланцюга в за-висимості від цілей її аналізу і необхідної точності іноді цілком допус-тимо нелінійну залежність між струмами і напругами на полюсах її компонентів замінити на лінійні. В результаті більш точна і складніша нелінійна модель замінюється менш точною, але більш простою лінійною моделлю. Електронних схем з погляду їх аналізу, а саме по типу рівнянь, що становлять їх математичні моделі, діляться на: лінійні, лінійні параметричні, нелінійні і нелінійні параметричні.

Лінійні схеми, описуються лінійними і диференціальних рівняннями алгебри з постійними коефіцієнтами, в яких параметри всіх компонентів можна вважати постійними. Моделі таких схем відповідно до теорії лінійних дифферен-ціальних рівнянь володіють двома дуже важливими з практичної точки зору властивостями. Це принцип накладення (суперпозиції) і прин-цип інваріантності взаємних відносин обурення і реакції до интег-риванню і диференціюванню.

Принцип накладення формулюється так: реакція лінійної схеми, тобто схеми, описуваною лінійною моделлю, на дію суми обурень рівно сумі реакцій на дію кожного обурення в от-дельности.

Принцип інваріантності в лінійній системі співвідношення між дією і реакцією залишається незмінним при диференціюванні або інтеграції.

Практично важливо запам'ятати, що реакції лінійних схем з посто-янними параметрами не містять нових спектральних складових по відношенню до спектрів впливаючих на схему сигналів.

До лінійних схем відносять:

- . електронні схеми, складені з лінійних компонент, тобто компонент, струми і напруги на полюсах яких завжди зв'язані між собою лінійною залежністю (пасивні компоненти);

- . електронні схеми, що включають в свій склад так звані квазілінійні компоненти (електронні компоненти . лампи, транзис-тора, оптрони, операційні підсилювачі і ін.), тобто компоненти, зависи-мости між струмами і напругами на полюсах яких можуть бути з певним ступенем допущення описані лінійними співвідношеннями. Таке можливо відносно вказаних електронних компонент, коли вони в аналізованих ланцюгах використовуються в режимах так званого ма-логотипу сигналу.

Лінійні параметричні схеми. Це схеми, в яких є компоненти з параметрами, що змінюються в часі, під дією додаткового (як правило) управляючого джерела. Такі схеми описуються лінійними рівняннями із змінними коефіцієнтами. Будучи лінійними, параметричні схеми, а точніше їх моделі, володіють властивостями накладення і інваріантності. Проте на відміну від лінійних схем з постійними

параметрами в них виникають нові спектральні складові при дії на вхід схеми гармонійних сигналів і при зміні її параметрів по аналогічному закону. Прикладами таких схем є схема з джерелом сигналу, послідовно включеним з вугільним мікрофоном, провідність якого змінюється під дейст-вием звукового тиску, а також різні перетворювачі частоти, малощумлячі параметричні підсилювачі, магніто-транзисторні параметрони і т.п.

Нелінійні схеми. Містять хоча б одну компоненту, струми і напруги на полюсах якої зв'язані нелінійною залежністю. Такі ланцюги описуються нелінійними інтегродифференціальними уравне-ниями, в яких окремі коефіцієнти при змінних не є постійними і залежать від самої змінної і її похідних. Принци-пальним відмінністю нелінійних схем є незастосовність до них в загальному випадку принципів накладення і інваріантності.

Нелінійно-параметричні схеми. До них відносять схеми, що со-тримають нелінійні компоненти і компоненти із змінними в часі параметрами. До подібних схем відносяться, наприклад, уст-ройства частотної модуляції, параметричні генератори і ін. Опі-сиваються подібні схеми нелінійними рівняннями із змінними в часі коефіцієнтами.

1.4. Моделі компонентів електронних схем

Відповідно до режиму електронного ланцюга і задачі досліджень ці моделі підрозділяються на лінійні слабосигнальные моделі для квазілінійного режиму, нелінійні безінерційні моделі для статичного режиму і великих низькочастотних сигналів, нелінійні універсальні моделі для перехідних і стаціонарних режимів при великих сигналах [2]. При розробці електронних компонентів використано представлення електронного приладу у вигляді чорного ящика, завдяки чому відпадає необхідність в розгляді внутрішніх фізичних процесів. Відповідні характеристики і параметри виходять в цьому випадку на підставі значень вхідних і вихідних струмів і напруг компоненту.

При аналізі і синтезі електронних схем широко використовуються моделі компонентів, ідеальні активні перетворювачі (ІАП), напівпровідникові діоди, біполярні і польові транзистори, операційні підсилювачі, що містять. Розглянемо деякі з них.

1.4.1. Ідеальні активні перетворювачі

Доцільність вживання моделей з ІАП обумовлена тим, що схему заміщення будь-якого активного чотириполюсника можна представити у вигляді з'єднання відповідного ІАП і двополюсника, а це спрощує рішення задач аналізу і дозволяє легко одержати загальні рішення задач синтезу.

Все ІАП можна розділити на дві групи: конвертори і інвертування опору. До конверторів опору відносяться: ПНН (перетворювач напруги в напругу або

джерело напруги, кероване напругою); ПТТ (перетворювач струму в струм або джерело струму керований струмом) і ін. До інвертувань опори відносяться: ПНТ (перетворювач напруги в струм або джерело струму, кероване напругою), ПТН (перетворювач струму в напругу або джерело напруги, кероване струмом) і ін. В таблиці 1.1 приведені схеми заміщення вказаних ІАП [5].

1.4.2. Аномальні елементи

У ряді випадків аналіз і синтез електронних схем спрощується, якщо скористатися моделями компонентів, що містять «аномальні» елементи: нуллятор, норатор, нулмор, уністор [4].

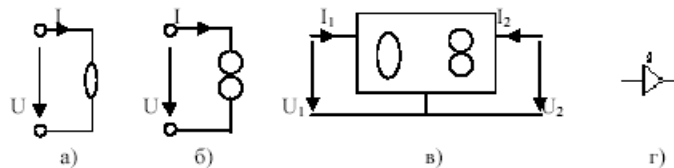
Нуллятор – це двополюсник, який «обертає» в нуль протікаючий через нього струм і прикладену до нього напругу (див. малюнок 1.1 а).

Норатор – це двополюсник, у якого струм і напруга приймають будь-кого, не зв'язаного між собою значення (малюнок 1.1 б).

Нуллятор і норатор не можна описати за допомогою законів Ома, але ланцюги, що їх містять підкоряються законам Кирхгофа.

Нулмор – це чотириполюсник, у якого вхідні струм і напруга рівні нулю, а вихідні струм і напругу приймають будь-хто, не зв'язаний між собою значення (див. малюнок 1.1 в). Нулмор еквівалентний операційному підсилювачу.

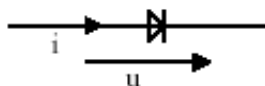
Уністор – це елемент, що володіє односторонньою провідністю. Величина його провідності у напрямі стрілки записується поряд із стрілкою. Провідність в напрямі, стрічному стрільці, відповідає розриву (див. малюнок 1.1 г).



Малюнок 1.1

1.4.3. Напівпровідниковий діод

Одним з найпоширеніших елементів електронних схем є напівпровідниковий діод, умовне позначення його представлено на малюнку 1.2.



Малюнок 1.2

Таблиця 1.1

№ п/п	ИАП	Схеми заміщення ІАП
1	ПНН (ИНУН)	
2	ПТТ (ИГУТ)	
3	ПНТ (ИТУН)	
4	ПТН (ИНУТ)	
5	ИПС, Гиратор	

Найпростіша математична модель якого для постійного струму може бути одержана з рівняння дифузії у вигляді:

$$i_o = I_0 \left(e^{\frac{qu}{mkt}} - 1 \right), \quad (1.1)$$

де $q = 1.6022 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд електрона;

$k = 1.3806 \cdot 10^{-23}$ Дж/К° – постійна Больцмана;

T – абсолютна температура;

$m = 1, 2, 5$;

u – напруга, прикладена до діода;

$\phi_T = kt / q$ – тепловий потенціал;

I_0 – струм насичення діода, залежний від температури:

$$I_0 = I_0^{T=293^\circ} \left(\frac{T}{293} \right)^3 e^{K_d \left(\frac{1}{293} - \frac{1}{T} \right)},$$

де K_d – емпіричний коефіцієнт; K

T – поточна температура;

$I_0^{T=273K}$ – струм насичення діода при температурі $T=293^\circ$ К.

Наблизити теоретичну вольт-амперну характеристику діода до реальної можливо введенням в математичну модель (1.1) додаткових доданків, які дозволять врахувати процеси генерації і рекомбінації носіїв в збідненій зоні, вплив об'ємного опору напівпровідника і інерційні властивості діода [5].

Математична модель у цьому разі приме вид:

$$i_d = I_0 \left(e^{\frac{u}{m\varphi_T}} - 1 \right) + \frac{u}{R_y} + (C_d + C_b) \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (1.2)$$

де R_y – опір витоку переходу;

$$C_d = \frac{I_0 \tau}{m\varphi_T} e^{\frac{u}{m\varphi_T}} \quad \text{– дифузійна місткість};$$

$$C_b = C_{b0} \left(\frac{\varphi_0}{\varphi_0 - u} \right)^n \quad C;$$

C_b – бар'єрна емність

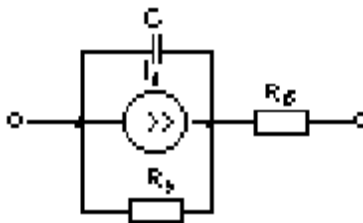
τ – час життя неосновних носіїв;

φ_0 – контактна різниця потенціалів;

$n=1/2$ – для різких; $n=1/3$ – для плавних $p-n$ переходів;

C_{b0} – бар'єрна місткість при нульовому зсуві переходу.

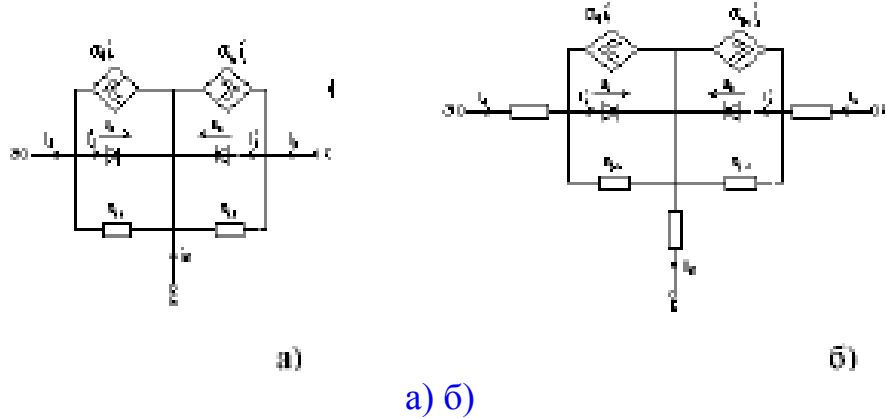
Схема заміщення діода, відповідна моделі (1.2), приведена на малюнку 1.3.



Малюнок 1.3

1.4.4. Біполярний транзистор

Наступним не менше поширеним елементом схеми є біполярний транзистор. Схема нелінійної інжекційної моделі транзистора структури $p-n-p$, що ідеалізується, запропонована Еберсом і Моллом, приведена на малюнку 1.4 а.



Малюнок 1.4

В загальному випадку струми емітера і колектора визначаються таким чином:

$$\begin{cases} i_{\text{э}} = i'_{\text{э}} - \alpha_1 i'_{\text{к}} + \frac{u_{\text{э}}}{R_{\text{уэ}}} \\ i_{\text{к}} = i'_{\text{к}} - \alpha_N i'_{\text{э}} + \frac{u_{\text{к}}}{R_{\text{ук}}} \end{cases}, \quad (1.3)$$

де $i'_{\text{э}}$ і $i'_{\text{к}}$ – струми емітерного і колектора переходів, визначувані по моделі (1.1); $i_{\text{б}}$ – струм бази;

α_1 , α_N – коефіцієнти зворотної і прямої передачі струму транзистора із загальною базою;

$R_{\text{у}}$, $R_{\text{ук}}$ – опори витоку відповідно емітерного і колектора переходів.

На підставі моделей (1.1) і (1.3) можна записати

$$\begin{cases} i_{\text{э}} = I'_{\text{э0}} (e^{\frac{u_{\text{э}}}{m_{\text{э}} \varphi_T}} - 1) - \alpha_1 I'_{\text{к0}} (e^{\frac{u_{\text{к}}}{m_{\text{к}} \varphi_T}} - 1) + \frac{u_{\text{э}}}{R_{\text{уэ}}} \\ i_{\text{к}} = I'_{\text{к0}} (e^{\frac{u_{\text{к}}}{m_{\text{к}} \varphi_T}} - 1) - \alpha_N I'_{\text{э0}} (e^{\frac{u_{\text{э}}}{m_{\text{э}} \varphi_T}} - 1) + \frac{u_{\text{к}}}{R_{\text{ук}}} \end{cases}, \quad (1.4)$$

де $i'_{\text{э0}}$, $i'_{\text{к0}}$ – струми насичення переходів, визначувані аналогічно струму I_0 з рівняння (1.1).

Ці струми можуть бути виражені через паспортні дані $I_{\text{э0}}$ і $I_{\text{к0}}$, вимірювані при обриві відповідно колектора і емітера:

$$I'_{\text{к0}} = \frac{I_{\text{к0}}}{1 - \alpha_N \alpha_1} \quad \text{и} \quad I'_{\text{э0}} = \frac{I_{\text{э0}}}{1 - \alpha_N \alpha_1}. \quad (1.5)$$

Коефіцієнти зворотної і прямої передачі струму транзистора із загальним емітером або загальним колектором позначаються через β_I і β_N , які пов'язані з коефіцієнтами α_I , α_N наступними співвідношеннями:

$$\beta_N = \alpha_N / (1 - \alpha_N) \quad \text{и} \quad \beta_I = \alpha_I / (1 - \alpha_I). \quad (1.6)$$

Практична нелінійна статична модель транзистора, як і для діода, доповнюється складовими, враховують опори в товщині напівпровідникового матеріалу (малюнок 1.4 би) [5].

Математична модель в цьому випадку прийме наступний вигляд:

$$\begin{cases} i_{\text{Э}} = i_{\text{Э}}^r - \alpha_I i_{\text{К}}^r + \frac{u_{\text{Э}}}{R_{\text{уЭ}}} + (C_{\text{дЭ}} + C_{\text{бЭ}}) \frac{\partial u_{\text{Э}}}{\partial t} \\ i_{\text{К}} = i_{\text{К}}^r - \alpha_N i_{\text{Э}}^r + \frac{u_{\text{К}}}{R_{\text{уК}}} + (C_{\text{дК}} + C_{\text{бК}}) \frac{\partial u_{\text{К}}}{\partial t} \end{cases}. \quad (1.7)$$

При аналізі електронних схем, що містять нелінійні елементи, використовується шматково-лінійна апроксимація, яка заснована на заміні окремих ділянок характеристики $f(x)$ відрізками прямих ліній. Точки зламу шматково-лінійної характеристики $y(x)$ розташовуються так, щоб $\max |f(x) - y(x)|$ були мінімальні на кожному інтервалі лінійного наближення. Шматково-лінійне представлення характеристик елементів використовується для отримання шматково-лінійних еквівалентних схем заміщення. Так, у разі апроксимації вольт-амперної характеристики нелінійного елемента координаті x_k відповідає напруга u_k , а координаті y_k – струм i_k і шматково-лінійна схема заміщення представляється схемою, що складається з лінійного резистивного елемента і джерела постійного струму або напруги (малюнок 1.6) [6].



Малюнок 1.6

Апроксимації ВАХ нелінійних елементів, керованих напругою відповідає схема заміщення, приведена на малюнку 1.6 а, що складається з джерела струму із задаючим струмом I_k і лінійної провідності G_k :

$$I_k = \frac{i_k u_{k+1} - i_{k+1} u_k}{u_{k+1} - u_k}; \quad (1.6)$$

$$G_k = \frac{i_{k+1} - i_k}{u_{k+1} - u_k}. \quad (1.7)$$

Апроксимації ВАХ нелінійних елементів, керованих струмом відповідає схема заміщення, приведена на малюнку 1.6,б, що складається з джерела напруги U_k і лінійного опору R_k :

$$U_k = \frac{u_k i_{k+1} - u_{k+1} i_k}{i_{k+1} - i_k}; \quad (1.8)$$

$$R_k = \frac{u_{k+1} - u_k}{i_{k+1} - i_k}. \quad (1.9)$$

Таким чином, структура шматково-лінійної схеми заміщення елемента буде незмінній для всіх інтервалів апроксимації, тобто для всіх режимів роботи ланцюга. Перехід від однієї лінійної ділянки до іншого приводить лише до змін величин параметрів лінійного резистивного елемента і джерела.

2. Аналіз статичного режиму нелінійних електронних схем

Під статичним режимом схеми розуміють режим, при якому вхідні сигнали мають нульові значення і існують лише дії від джерел живлення. Розрахунок статичного режиму схеми має важливе значення при її дослідженні. Статичний режим схеми визначає початкові умови при її аналізі в області малого і великого сигналів.

Для аналізу статичного режиму нелінійних електронних схем застосовують графічні і аналітичні методи. При використуванні графічних методів, відмінних наочністю і точністю, утруднена оцінка впливу параметрів компонентів схеми на статичний режим. Використування аналітичних методів, заснованих на апроксимації нелінійної залежності і формуванні математичної моделі схеми, дозволяють досліджувати вплив різних параметрів на режим схеми по постійному струму.

2.1. Формування схемної моделі

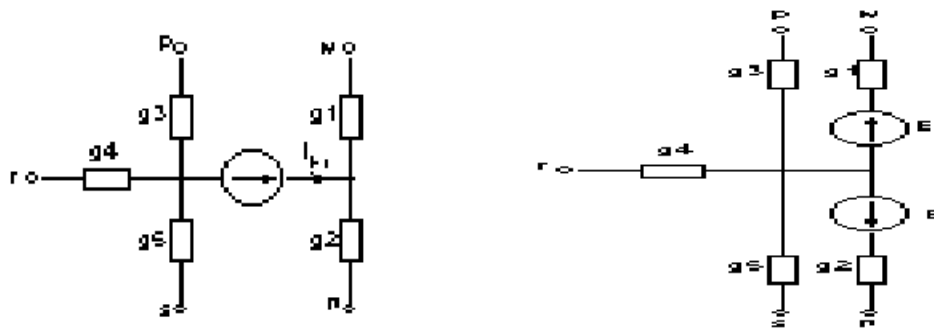
Аналіз електронної схеми включає формування схемної моделі і математичної моделі початкової схеми. Схемна модель формується на підставі методу, вибраного для опису математичної моделі заданої схеми (метод вузлових напруг, метод контурних струмів і т.п.). Нами для формування математичної моделі вибраний метод вузлових напруг. Надалі необхідно про це пам'ятати, оскільки всі перетворення при формуванні схемної моделі проводяться для випадку вживання саме цього методу.

Отже, оскільки проводиться аналіз статичного режиму методом вузлових напруг при формуванні схемної моделі необхідно:

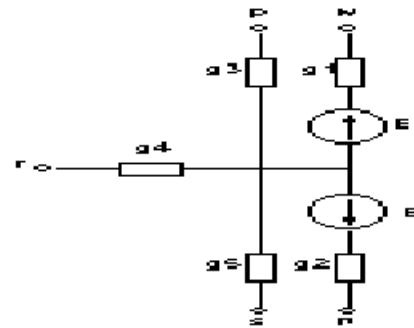
- виключити відповідним чином реактивні елементи, оскільки статичний режим – це режим по постійному струму;

- виключаються джерела сигналів;
- умовні позначення нелінійних компонентів схеми замінюються їх еквівалентними схемами заміщення з керованими джерелами;
- джерела напруги перетворюються в джерела струму;
- лінійні опори замінюються лінійними провідностями.

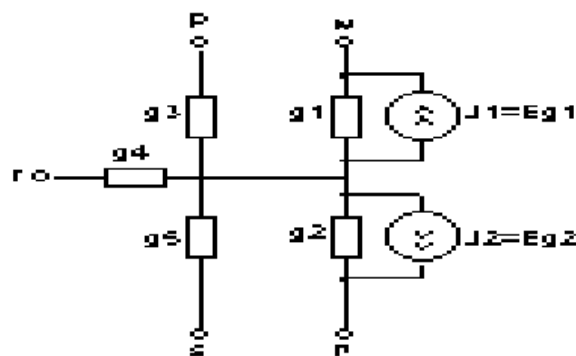
Зупинимося докладніше на перетворенні джерела напруги в джерело струму. Для цього, гілки з послідовно сполученими джерелом напруги E і резистивним елементом R винні бути на підставі теореми Нортон перетворені в паралельно сполучені провідність $G=1/R$ і джерело струму $J=E/R$. За наявності гілки, що містить тільки джерело напруги (див. малюнок 2.1 а), можна поступити двояко. Можна виконати еквівалентні перетворення схеми, пов'язані з перенесенням джерела напруги через вузол (див. малюнок 2.2 би) і подальшим перетворенням Нортон послідовно сполучених джерел напруги і провідностей (див. малюнок 2.1 в), або здійснити перетворення включенням в гілку з джерелом напруги двох послідовно сполучених, рівних по модулю провідностей протилежного знака (див. малюнок 2.1 г) і подальшим перетворенням в ланцюг з еквівалентним джерелом струму (див. малюнок 2.1 д) [10].



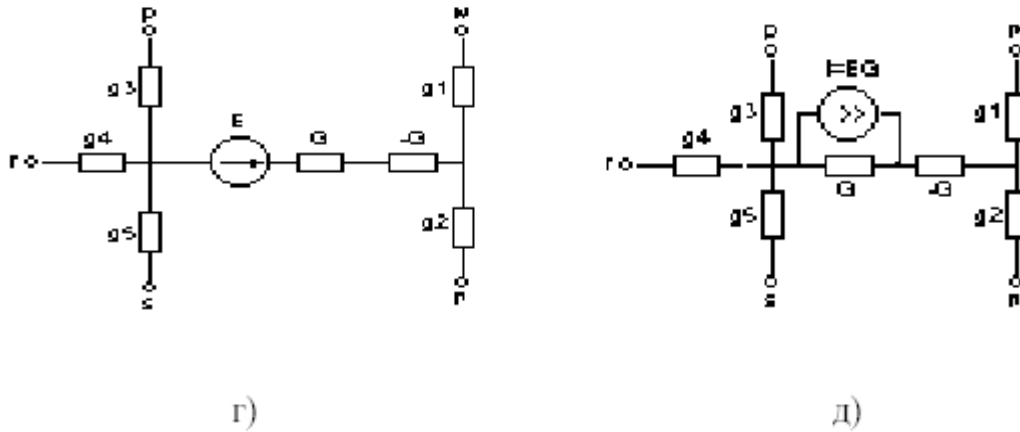
а)



б)



в)



Малюнок 2.1

2.2. Формування математичної моделі

Хай деяка схема містить $(n+1)$, включаючи базисний. В схемі присутні джерела струму, лінійні провідності і нелінійні двополусні резистивні елементи, керовані напругою, тобто такі, струми яких i_M є однозначними функціями напруги u_M .

$$i_M = \varphi_M(u_M) = \frac{\varphi_M(u_M)}{u_M} \cdot u_M = g_M(u_M) \cdot (u_k - u_l), \quad (2.1)$$

де i_{kl} – струм гілки, включеної між вузлами k і l ;

u_{kl} – напруга гілки, включеної між вузлами k і l ;

$g_{kl}(u_{kl})$ – нелінійна провідність елемента;

u_k, u_l – вузлові напруги.

Вважаючи, що в загальному випадку нелінійне джерело струму, кероване напругою u_{ij} включений між вузлами p і q

$$J_{pq} = g_{pq}(u_{ij}) \cdot (u_i - u_j) \quad (2.2)$$

запишемо рівняння по першому закону Кирхгофа для вузлів o, l, p і q

$$\begin{aligned} \sum_k i &= G_{k0}u_k + G_{k1}(u_k - u_1) + \dots + g_{k\lambda}(u_{k\lambda})(u_k - u_\lambda) + \dots + G_{ki}(u_k - u_i) + \dots + \\ &+ G_{kj}(u_k - u_j) + G_{kp}(u_k - u_p) + \dots + G_{kq}(u_k - u_q) + \dots + G_{kn}(u_k - u_n) - J = 0, \\ \sum_\lambda i &= G_{\lambda0}u_\lambda + G_{\lambda1}(u_\lambda - u_1) + \dots + g_{k\lambda}(u_{k\lambda})(u_k - u_\lambda) + \dots + G_{\lambda i}(u_\lambda - u_i) + \dots + \\ &+ G_{\lambda j}(u_\lambda - u_j) + G_{\lambda p}(u_\lambda - u_p) + \dots + G_{\lambda q}(u_\lambda - u_q) + \dots + G_{\lambda n}(u_\lambda - u_n) - J_\lambda = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_p i &= G_{p0}u_p + G_{p1}(u_p - u_1) + \dots + G_{pk}(u_p - u_k) + \dots + G_{p\lambda}(u_p - u_\lambda) + \dots + G_{pi}(u_p - u_i) + \\
&+ G_{pj}(u_p - u_j) + \dots + G_{pq}(u_p - u_q) + \dots + G_{pn}(u_p - u_n) + g_{pq}(u_{ij})(u_i - u_j) - J_p = 0, \\
\sum_q i &= G_{q0}u_q + G_{q1}(u_q - u_1) + \dots + G_{qk}(u_q - u_k) + \dots + G_{q\lambda}(u_q - u_\lambda) + G_{qi}(u_q - u_i) + \\
&+ G_{qj}(u_q - u_j) + \dots + G_{qp}(u_q - u_p) + \dots + G_{qn}(u_q - u_n) - g_{pq}(u_{ij})(u_i - u_j) - J_q = 0, \quad (2.3)
\end{aligned}$$

де G_{st} – провідності лінійних гілок J_k, J_l, J_p, J_q – струми незалежних джерел.

Згрупувавши відповідні доданки, перепишемо модель (2.3) в матричній формі:

$$1 \dots k \dots \lambda \dots i \dots j \dots p \dots q \dots n$$

$$\begin{matrix}
M & \begin{bmatrix} M & M & M & M & M & M & M & M \\ k & -G_{k1} & Y_{kk} & -g_{k\lambda}(u_{k\lambda}) & -G_{ki} & -G_{kj} & -G_{kp} & -G_{kq} & -G_{kn} \\ M & M & M & M & M & M & M & M & M \\ \lambda & -G_{\lambda 1} & -g_{k\lambda}(u_{k\lambda}) & Y_{\lambda\lambda} & -G_{\lambda i} & -G_{\lambda j} & -G_{\lambda p} & -G_{\lambda q} & -G_{\lambda n} \\ M & M & M & M & M & M & M & M & M \\ p & -G_{p1} & -G_{pk} & -G_{p\lambda} & Y_{pi} & Y_{pj} & Y_{pp} & -G_{pq} & -G_{pn} \\ M & M & M & M & M & M & M & M & M \\ q & -G_{q1} & -G_{qk} & -G_{q\lambda} & Y_{qi} & Y_{qj} & -G_{qp} & Y_{qq} & -G_{qn} \\ M & M & M & M & M & M & M & M & M \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} u_k \\ \Lambda \\ u_\lambda \\ \Lambda \\ u_i \\ \Lambda \\ u_j \\ \Lambda \\ u_p \\ \Lambda \\ u_q \end{bmatrix} & - & \begin{bmatrix} M \\ J_k \\ M \\ J_\lambda \\ M \\ J_p \\ M \\ J_q \\ M \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} M \\ 0 \\ M \\ 0 \\ M \\ 0 \\ M \\ 0 \\ M \end{bmatrix}, \quad (2.4)
\end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
\text{где } Y_{kk} &= \sum_{m=0}^n G_{km} + g_{k\lambda}(u_{k\lambda}), & Y_{\lambda\lambda} &= \sum_{m=0}^n G_{\lambda m} + g_{k\lambda}(u_{k\lambda}), \\
Y_{pp} &= \sum_{m=0}^n G_{pm}, & Y_{qq} &= \sum_{m=0}^n G_{qm}, \\
Y_{pi} &= -G_{pi} + g_{pq}(u_{ij}), & Y_{pj} &= -G_{pj} - g_{pq}(u_{ij}), \\
Y_{qi} &= -G_{qi} - g_{pq}(u_{ij}), & Y_{qj} &= -G_{qj} + g_{pq}(u_{ij}).
\end{aligned}$$

З одержаного рівняння видно, що нелінійні провідності, так само, як і провідності лінійних двополюсників входять в матрицю провідностей чотири рази, з них двічі з позитивними знаками у власні провідності вузлів до i та λ , а два – з негативними у взаємні провідності цих вузлів. Нелінійна провідність $g_{pq}(u_{ij})$ перетворення ПНТ, вхід якого підключений до вузлів i та j , а вихід – до вузлів p та q , також входить в матрицю провідностей чотири рази. Двічі без інверсії знака у взаємні провідності Y_{pi} та Y_{qj} і двічі з інверсією – в провідності Y_{pj} та Y_{qi} . Помітимо, що лінійні і нелінійні провідності гілок, що сполучають вузол s з базисним, входять в матрицю провідності один раз з позитивним знаком, у власну провідність вузла Y_{ss} . Передавальна провідність ПНТ, вхід якого включений між вузлом f і базисним,

а вихід – між вузлом r і базисним, також входить в матрицю провідностей один раз, без інверсії знака, в провідність Yrf .

При формуванні вектора незалежних джерел \mathbf{I} струм J_{kl} джерела, направлено від вузла do до вузла λ , додається до елемента вектора \mathbf{I} і віднімається з елемента do .

Для виключення сингулярності матриці коефіцієнтів, що має місце при $u_{kl}=0$, виділимо з матриці коефіцієнтів рівнянь (2.4) матрицю постійних коефіцієнтів \mathbf{G} і матрицю коефіцієнтів, залежних від змінних $\mathbf{g}(\mathbf{U})$, тоді рівняння (2.4) можна переписати у вигляді:

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{U} + \Phi(\mathbf{U}) - \mathbf{I} = 0, \quad (2.5)$$

де $\Phi(\mathbf{U})$ – вектор нелінійних функцій

$$\Phi(\mathbf{U}) = \mathbf{g}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \varphi_1(\mathbf{U}) \\ \varphi_2(\mathbf{U}) \\ \mathbf{M} \\ \varphi_n(\mathbf{U}) \end{bmatrix}.$$

Вектор функції $\Phi(\mathbf{U})$ може бути одержан без використання матриці $\mathbf{g}(\mathbf{U})$, якщо розглядати нелінійні елементи, як еквівалентні істочники струму

$i_{kl} = \varphi_{kl}(u_{kl})$. В цьому разі вектор функції формується аналогічно вектору \mathbf{I} незалежних істочників, тобто $\varphi_\lambda(\mathbf{U}) := \varphi_\lambda(\mathbf{U}) + \varphi_{k\lambda}(u_{k\lambda}), \varphi_k(\mathbf{U}) := \varphi_k(\mathbf{U}) - \varphi_{k\lambda}(u_{k\lambda})$.

В загальному випадку аналізу статичного режиму виникає ряд труднощів:

- 1) окрім резистивних елементів, керованих напругою, схема містить елементи, керовані струмом, тобто такі, напруги яких є однозначними функціями струмів;
- 2) в схемі можуть бути присутні незалежні або керовані джерела напруги.

В першому випадку резистивний елемент, керований струмом описується рівнянням

$$u_k - u_\lambda = P_{k\lambda}(i_{k\lambda}), \quad (2.6)$$

з якого виходить

$$u_k - u_\lambda - r_{k\lambda}(i_{k\lambda}) \cdot i_{k\lambda}, \quad (2.7)$$

$$r_{k\lambda}(i_{k\lambda}) = \frac{P_{k\lambda}(i_{k\lambda})}{i_{k\lambda}}.$$

Функція $P_{k\lambda}$ звичайно не має зворотного перетворення з функцією $f_{k\lambda}$ в моделі (2.1), тому значення струму $i_{k\lambda}$ в моделі (2.3) залишається невідомим і для отримання сумісної системи рівнянь до n рівнянь (2.4) додамо рівняння (2.7). З урахуванням очевидного співвідношення

$i_k = -i_\lambda = i_{k\lambda}$.., матриця коефіцієнтів збільшиться на один рядок і один стовпець, а вектори невідомих і незалежних джерел на один елемент

$$\begin{array}{c} k \quad \lambda \quad n+1 \\ k \\ \lambda \\ M \\ n+1 \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \dots +1 \\ \dots -1 \\ \dots \dots \\ 1 \quad -1 \quad \dots -r_{k\lambda}(u_{k\lambda}) \end{array} \cdot \begin{array}{c} [u_k] \\ [u_\lambda] \\ [M] \\ [i_{k\lambda}] \end{array} - \begin{array}{c} [J_k] \\ [J_\lambda] \\ [M] \\ [0] \end{array} = \begin{array}{c} [0] \\ [0] \\ [M] \\ [0] \end{array}. \quad (2.8)$$

За наявності m таких нелінійних елементів і лінійних опорів матриця коефіцієнтів складатиметься з чотирьох блок-матриць:

1) матриці вузлових провідностей U розміром $n \times n$ для елементів, що допускають опис у формі лінійної провідності або керованої напругою нелінійної провідності;

2) діагональної матриці R розміром $m \times m$ опорів лінійних елементів або керованих струмом нелінійних опорів;

3) матриці інцидентий A розміром $n \times m$, кожний i -ий стовпець якої містить один або два ненульові елементи в рядках, відповідних вузлам do і λ (один з них може бути базисним) λ

підключення i -го опору. Причому ненульовий елемент рівний «+1», якщо струм направлений від вузла, і «-1» інакше;

4) транспонованої матриці інцидентий AT .

Вектори невідомих, незалежних джерел і нульовий вектор відповідно доповнюються m невідомими струмами і m нулями.

По-друге, можна ввести додаткову змінну-струм i_{lk} в гілці з джерелом напруги, врахувати його в рівняннях (2.4) для вузлів do і λ і додати до системи рівнянь компонентне рівняння $u_l - u_k = E$. В результаті матриця коефіцієнтів збільшується на один рядок і один стовпець, а вектори невідомих і незалежних джерел – на один елемент

$$\begin{array}{c} k \quad \lambda \quad n+1 \\ k \\ \lambda \\ M \\ n+1 \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \dots -1 \\ \dots +1 \\ \dots \dots \\ 1 \quad -1 \quad \dots \end{array} \cdot \begin{array}{c} [u_k] \\ [u_\lambda] \\ [M] \\ [i_{lk}] \end{array} - \begin{array}{c} [M] \\ [M] \\ [M] \\ [E] \end{array} = \begin{array}{c} [0] \\ [0] \\ [M] \\ [0] \end{array}. \quad (2.9)$$

В таблиці 2.3 джерела [5] приведено модифіковані системи вузлових рівнянь для керованих джерел, у яких матриця у-параметров не існує.

2.3. Рішення рівнянь статичного режиму

Для статичного режиму система рівнянь схеми має вигляд

$$\begin{aligned} f_1(u_1, u_2, \dots, u_n) &= 0 \\ f_2(u_1, u_2, \dots, u_n) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ f_n(u_1, u_2, \dots, u_n) &= 0 \end{aligned}$$

або у векторній формі

$$F(U) = 0 \quad (2.10)$$

Вважаючи, що система рівнянь (2.10) має рішення U^* , розкладемо кожен функцію в ряд Тейлора в околиці рішення і збережемо в цьому розкладанні тільки члени першого порядку малості. В результаті приходимо до лінеаризованної системи рівнянь

$$F(U^*) \approx F(U) + J\Delta U \quad (2.11)$$

$$\text{где } J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

– матриця Якобі вектор-функції $F(U)$

$$\Delta U = U^* - U - \text{вектор поправки.} \quad (2.13)$$

Якщо прирівняти нулю систему рівнянь (2.11) і використати верхні індекси для позначення послідовності ітерацій, одержимо

$$F(U_k) + J_k(U_{k+1} - U_k) = 0 \quad (2.14)$$

Рішення рівняння (2.14) можна знайти як

$$U_{k+1} = U_k + J_k^{-1}(-F(U_k)). \quad (2.15)$$

Перепишемо модель (2.14) з обліком (2.13) у вигляді

$$J_k \Delta U_k = -F(U_k). \quad (2.16)$$

Вирішивши систему лінійних рівнянь (2.16), можна визначити ΔU^k , а потім визначити U^{k+1} з виразу

$$U^{k+1} = U^k + \Delta U^k.$$

Наближене рішення U^{k+1} необхідно одержати з наперед заданою точністю $\varepsilon > 0$, тобто U^{k+1} повинне належати ε -клерсνξρςθ точного рішення U^* . На жаль, крапка U^* невідома, що не дозволяє обчислити норму

$$\|U^{k+1} - U^*\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i^{k+1} - u_i^*)^2} \quad (2.17)$$

і визначити, чи виконується умова

$$\|U^{k+1} - U^*\| < \varepsilon. \quad (2.18)$$

На практиці досягнуто в процесі ітерацій точність звичайно оцінюють по нормі вектора поправок $\|\Delta U^k\|$, або по нормі вектора нев'язності. При високій швидкості збіжності ітераційної послідовності до точного рішення поправка на $(k+1)$ -й ітерації буде помітно менше по абсолютній величині, ніж поправка на k -й ітерації, і в цих умовах приймають допущення $\|\Delta U^k\| \cong \|U^{k+1} - U^*\|$ звідки витікає, що обчислення необхідно припиняти при виконанні умови

$$\|\Delta U^k\| < \varepsilon. \quad (2.19)$$

Розглянутий підхід до рішення системи рівнянь (2.10) є реалізацією методу Ньютона-Рафсона.

При реалізації будь-якого методу в програмах машинного аналізу схем, необхідна упевненість, що рішення буде досягнуте. Тому необхідне використання прийомів, що підвищують вірогідність збіжності ньютонівських ітерацій. Деякі з них, найбільш часто вживані на практиці, розглянуті в джерелі [5].

2.4. Визначення елементів матриці Якобі

В загальному випадку схем з будь-якими нелінійними компонентами для обчислення елементів матриці Якобі можна використовувати метод приростів, що полягає в заміні похідних відносинами приростів:

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_j} = \frac{\Delta f_i}{\Delta u_j}. \quad (2.20)$$

Тоді, даючи по черзі малі прирости Δu_j змінним і обчислюючи при цьому відхилення нев'язності Δf_i , одержимо елементи матриці Якобі як відношення цих приростів.

Проте необхідність почергової зміни змінних приводить до виконання $(n+1)$ -го варіанту обчислень нев'язності (n – число незалежних змінних). Оскільки матрицю Якобі вимагається при аналізі обчислювати багато разів, то витрати машинного часу можуть виявитися надмірно великими. Тому частіше використовується аналітичний підхід до визначення матриці Якобі.

Виділимо в рівнянні (2.4) лінійну і нелінійну частини матриці провідностей і перепишемо його у вигляді

$$G.U + G(U) .U - I = 0. \quad (2.21)$$

З урахуванням виразу (2.1) рівняння (2.21) буде записано у вигляді:

$$G.U + \Phi(U) .U - I.U - I = 0 \quad (2.22)$$

де $\Phi(U)$ – вектор функція струмів нелінійних елементів.

Диференціюючи рівняння (2.22) по всіх компонентах вектора U приходимо до матриці Якобі

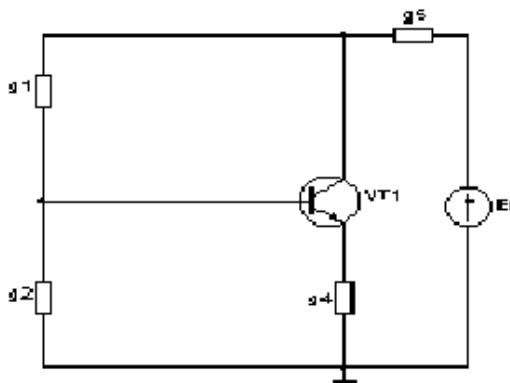
$$J = G + \frac{\partial \Phi(U)}{\partial U}. \quad (2.23)$$

Одержана матриця має точно таку ж структуру, що і вузлова матриця провідностей в моделі (2.1). Лінійні провідності залишаються в матриці незмінними. На місці нелінійних провідностей з'являються похідні від струмів по напрузі

$$\frac{\partial \varphi(u)}{\partial u} .$$

Ці похідні є диференціальними провідності нелінійних елементів і обчислюються при напругах, знайдених на попередній ітерації.

Розглянемо приклад. Знайдемо матрицю Якобі для підсилювального каскаду на біполярному транзисторі, приведенного на малюнку 2.2.



Малюнок 2.2

Перетворивши джерело напруги в еквівалентне джерело струму і замінивши умовне позначення транзистора структури n-p-n моделлю Еберса-Молла, одержимо схемну модель. Нелінійні провідності $g_K(u)$ і $g_{\Delta}(u)$ на цій схемі відповідно до виразу (2.1) мають вигляд:

$$g_K(u) = \frac{I'_{KO} \left(e^{\frac{u_K}{m_K \cdot \varphi_T}} - 1 \right)}{u_K}, \quad (2.24)$$

$$g_{\Delta}(u) = \frac{I'_{\Delta O} \left(e^{\frac{u_{\Delta}}{m_{\Delta} \cdot \varphi_T}} - 1 \right)}{u_{\Delta}}. \quad (2.25)$$

Визначимо диференціальні провідності $\frac{\partial \varphi(u)}{\partial u}$ нелінійних елементів

$$\varphi_{\Delta}(u_{\Delta}) = I'_{\Delta O} \left(e^{\frac{u_{\Delta}}{m_{\Delta} \cdot \varphi_T}} - 1 \right), \quad \frac{\partial \varphi_{\Delta}(u_{\Delta})}{\partial u_{\Delta}} = \frac{I'_{\Delta O} \left(e^{\frac{u_{\Delta}}{m_{\Delta} \cdot \varphi_T}} \right)}{m_{\Delta} \cdot \varphi_T} = g_{\Delta D}, \quad (2.26)$$

$$\varphi_K(u_K) = I'_{KO} \left(e^{\frac{u_K}{m_K \cdot \varphi_T}} - 1 \right), \quad \frac{\partial \varphi_K(u_K)}{\partial u_K} = \frac{I'_{KO} \left(e^{\frac{u_K}{m_K \cdot \varphi_T}} \right)}{m_K \cdot \varphi_T} = g_{KD}. \quad (2.27)$$

Далі замінивши в матриці вузлових провідностей провідності нелінійних елементів $g_{\Delta}(u)$ і $g_K(u)$ знайденими по моделях (2.26) і (2.27) відповідними диференціальними провідностями $g_{\Delta D}$ і g_{KD} , одержимо матрицю Якобі для схеми, представленої на малюнку 2.2:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} g_1 + g_2 + g_{Y\Delta} + g_{YK} + & -g_{Y\Delta} - (1 - \alpha_N)g_{\Delta D} & -g_1 - g_{YK} - \\ + (1 - \alpha_N)g_{\Delta D} + (1 - \alpha_I)g_{KD} & & - (1 - \alpha_I)g_{KD} \\ -g_{Y\Delta} - g_{\Delta D} + \alpha_I g_{KD} & g_4 + g_{Y\Delta} + g_{\Delta D} & -\alpha_I g_{KD} \\ -g_1 - g_{YK} - g_{KD} + \alpha_N g_{\Delta D} & -\alpha_N g_{\Delta D} & g_1 + g_{YK} + \\ & & + g_{KD} + g_5 \end{bmatrix}.$$

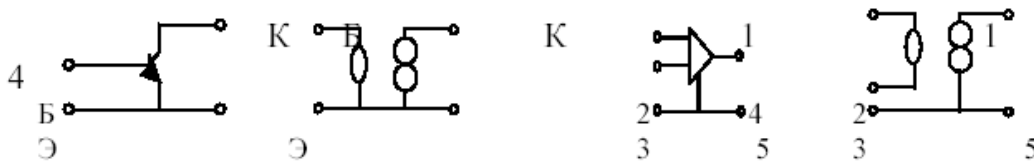
3. Мало сигнальний аналіз схеми в частотній області

Аналіз електронних схем в частотній області допустимий в припущенні їх функціонування в режимі малого сигналу і лінеаризації характеристик елементів в околиці робочої крапки, визначуваної статичним режимом. Для формування

математичної моделі схеми і визначення функцій ланцюги застосовують прямі і непрямі методи. До прямих методів розрахунку ланцюгів відносяться методи, в яких безпосередньо використовуються закони Ома і Кирхгофа. До непрямих методів відносяться методи еквівалентних перетворень опорів, методи еквівалентних перетворень джерел і інші.

3.1 Формування схемної і математичної моделей

При аналізі схем з високоякісними транзисторами і ОУ доцільне вживання схем заміщення електронних компонентів з аномальними елементами (нуллаторами, нораторами, нуллорами) (див. малюнки 3.1 а, б).



а) схема заміщення транзистора

б) схема заміщення ОУ

Малюнок 3.1

Розглянемо особливості формування схемної і математичної моделі схеми з аномальними елементами методом вузлових напруг.

Формування схемної моделі для малосигнального аналізу в частотній області припускає:

- заміну в заданому ланцюзі умовних позначень компонентів (діодів, транзисторів, ОУ, активних перетворювачів) їх відповідними схемами заміщення з аномальними елементами;

- виключення з схеми джерел, визначаючий статичний режим;
- перетворення джерел напруги в джерела струму (див. п.2.1).

Далі, виходячи з схемної моделі, формується математична модель прямими або непрямими методами. Розглянемо формування вузлових рівнянь для ланцюга, що містить аномальні елементи, пасивні двополюсники, незалежні джерела струму:

1. Для регулярної частини ланцюга (аналізований ланцюг без аномальних елементів) записуємо систему рівнянь:

$$Y \cdot U = I \quad (3.1)$$

де Y – матриця провідностей регулярної частини схеми;

U – вектор вузлових напруг;

I – вектор незалежних джерел струму.

2. Оскільки напруга, прикладена до нуллятору, рівна нулю, зрівнюємо відповідні вузлові напруги і підсумовуємо між собою стовпці матриці Y , відповідні вузлам, між якими включені нуллатори. Вважаємо рівними нулю вузлові напруги і

викреслюємо з матриці U стовпці, відповідні вузлам, які сполучені нуллаторами з базисним вузлом. Таким чином, число невідомих вузлових напруг і число стовпців матриці U зменшується на число нуллаторов.

3. Оскільки кількість рівнянь перевищує кількість невідомих вузлових напруг, підсумовуємо між собою рядки матриці U і задаючі вузлові струми, відповідні вузлам, між якими включені нораторы. Видаляємо вузлові струми і рядки матриці U , відповідні вузлам, які сполучені нораторами з базисним вузлом.

4. Одержана система рівнянь є математичною моделлю аналізованої схеми. Рішення одержаної системи рівнянь дає шукані значення вузлових напруг.

3.2 Передавальна функція. Частотні характеристики

Для проведення аналізу електронних схем необхідно використовувати найзручніші форми представлення схемних функцій. Розглянемо їх. В загальному випадку кожна схемна функція є дробово-раціональною функцією комплексної змінної $p = \omega \pm j\omega$, оскільки, згідно формулі Крамера (3.2), вона виражається через доповнення алгебри

Δ_{ij} і визначник $\Delta Z_C = 1 / pC$ матриці еквівалентних параметрів pL схеми. Останні складаються, у свою чергу, з параметрів компонентів схеми, у тому числі реактивних (конденсаторів, що мають опір, індуктивностей $Z_L = pL$). В результаті

$$F_{ij} = \frac{\Delta_{ij}(p)}{\Delta(p)} \quad (3.2)$$

або в загальному випадку

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}. \quad (3.3)$$

Тут всі коефіцієнти a_i і b_i речовинні і визначаються тільки параметрами компонентів еквівалентної схеми ланцюга. Вираз (3.3) можна записати в іншому вигляді відповідно до основної теореми алгебри:

$$F(p) = H \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_n)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_m)}, \quad (3.4)$$

де $H = a_n / b_m$ - постійний множник (масштабний коефіцієнт). Його часто опускають, заздалегідь пронормувати функцію;

z_i - корені чисельника. Коли поточне значення p приймає значення $p = z_i$, функція $F(p) = 0$, тому корені чисельника z_i називають *нулями* (zero) функції;

p_i - корені знаменника. Коли $p = p_i$, функція прагне нескінченності, тому p_i називають *полюсами* (pole) функції.

Якщо є декілька однакових коренів чисельника або знаменателя, то їх називають *кратними нулями* або *кратними полюсами* відповідно, а їх числом визначають порядок кратності нуля або полюса. За відсутності кратних нулів або полюсів їх називають *різними* або *простими*.

Оскільки коефіцієнти функції $F(p)$ можуть бути тільки дійсними, вона володіє властивістю *зв'язаної симетрії*. Це означає, що її нулі і полюси на площині комплексної змінної можуть розташовуватися або на дійсній осі, або симетрично от-носно її, тобто можуть бути або дійсними, або уявними або комплексними, але тільки попарно зв'язаними.

Перехід від функції ланцюга $F(p)$ до комплексної вхідної або передавальної функції

$K(\omega)$ здійснюється заміною у виразі (3.3) змінної p на $j\omega$ [1].

$$K(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} = \frac{N_R(\omega) + jN_I(\omega)}{D_R(\omega) + jD_I(\omega)} \quad (3.5)$$

або $F(p)|_{p=j\omega} = F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$. (3.6)

З моделі (3.5) виходить, що АЧХ визначається по виразу:

$$F(\omega) = |K(\omega)| = \sqrt{\frac{N_R^2(\omega) + N_I^2(\omega)}{D_R^2(\omega) + D_I^2(\omega)}} \quad (3.7)$$

а ФЧХ визначається по виразу:

$$\varphi(\omega) = \arg[K(\omega)] = \operatorname{arctg} \frac{N_I(\omega)}{N_R(\omega)} - \operatorname{arctg} \frac{D_I(\omega)}{D_R(\omega)} \quad (3.8)$$

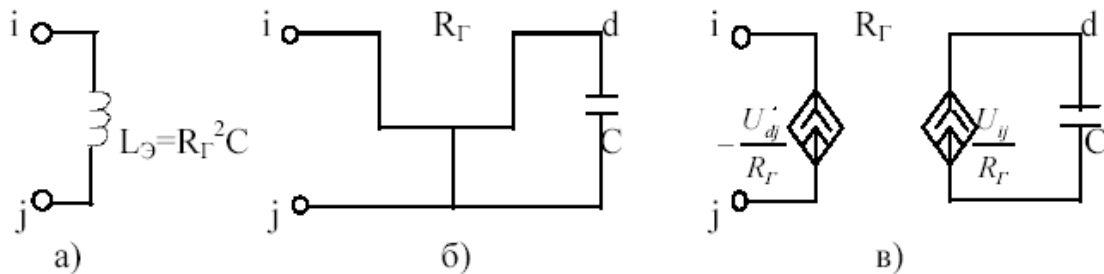
Частотною характеристикою схеми називають сукупність значень функції $F(j\omega)$ на відрізку позитивної напівосі $j\omega$, відповідному деякому заданому діапазону зміни частот ω - $\Delta\omega$.

Амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ) схеми називають відповідну сукупність значень модулів $F(\omega)$ в заданому діапазоні зміни частот $\Delta\omega$.

фазово-частотної, або фазової, характеристикою (ФЧХ) схеми називають відповідну сукупність значень фазових кутів $\varphi(\omega)$ в заданому діапазоні частот $\Delta\omega$

При побудові графіків АЧХ і ФЧХ використовується або рівномірна шкала частот, при якій $f_{i+1} = f_i + \Delta f$ (- крок приросту частоти), або логарифмічна шкала, при якій чергове значення частоти визначається з рекуррентного співвідношення $f_{i+1} = kf_i$.

За наявності індуктивностей в ланцюзі (3.3 а) рівняння слід формувати модифікованим методом вузлових напруг або здійснити заміну індуктивностей гираторами (3.3 би), навантаженими на місткість, схема заміщення в цьому випадку має вигляд, представлений на малюнку 3.3 в [5].



Малюнок 3.3

Гиратора додатковий вузол d , що з'являється при використуванні, приводить до збільшення кількості рівнянь на число індуктивностей.

Розрахунок частотних характеристик проводиться згідно алгоритму, приведенного в навчальному посібнику П.Н. Ганського «Машинний аналіз і розрахунок електронних схем».

3.3. Визначення функції чутливості

Нестабільність схемних параметрів (схемних функцій, параметрів частотних і тимчасових характеристик, окремих струмів і напруг і т.д.) оцінюється їх чутливістю до варіацій значень параметрів компонентів схеми.

Чутливість (відносна) визначається як відношення відносної зміни $\Delta K/K$ схемного параметра (схемної функції і ін.) до відносної зміни $\Delta g_i/g_i$ одного з параметрів компоненти схеми

$$S_{g_i}^{K_j} = \frac{\Delta K_j / K_j}{\Delta g_i / g_i} = \frac{\Delta K_j}{\Delta g_i} \frac{g_i}{K_j}. \quad (3.9)$$

При малих змінах g_i , коли можна вважати, що $g_i \rightarrow 0$ і значить $\Delta g_i = dg_i$, можна перейти до диференціальної, або логарифмічної, форми запису чутливості:

$$S_{g_i}^{K_j} = \frac{dK_j / K_j}{d_i g / g_i} = \frac{d(\ln K_j)}{d(\ln g_i)} = \frac{g_i}{K_j} \cdot \frac{dK_j}{dg_i} = \frac{g_i}{K_j} \cdot \frac{\partial K_j}{\partial g_i}. \quad (3.10)$$

З останнього виразу ясний спосіб обчислення чутливості по відомому виразу для $K_j = K(g_j)$. Він заснований на обчисленні приватних похідних від схемних параметрів (схемних функцій і ін.).

Для чутливостей схемних параметрів характерні деякі співвідношення *інваріантності*, які мають важливе практичне значення [1]. Так:

1. Сума чутливостей деякого схемного параметра до варіаціям параметрів всіх компонентів пасивної схеми є величиною постійною у всьому

діапазоні частот і залишається еквівалентних перетвореннях схеми, тобто

інваріантної при будь-яких

$$\sum_{i=1}^N S_{g_i}^{K_j}(\omega) = \text{const}. \quad (3.11)$$

Вказана властивість інваріантності, як бачимо, залишається справедливим і для активних схем із залежними джерелами струму, керованими напругою, або залежними джерелами напруги, керованими струмом. Тоді їх управляючі параметри мають розмірність провідності або опору.

2. Сума нульової (полусної) чутливості до варіації параметрів всіх компонентів схеми є величиною постійної, рівної нулю:

$$\sum_{i=1}^N S_{g_i}^{z_j} = \sum_{i=1}^N S_{g_i}^{p_j} = 0. \quad (3.12)$$

3. Сума чутливостей схемної функції до варіацій параметрів всіх реактивних компонентів (L, C) інваріантна для всіх схем, описуваних такою ж схемною функцією, і рівна чутливості тієї ж схемної функції до варіацій комплексної змінної (комплексної частоти) p :

$$\sum_{i=1}^l S_{L_i}^{K_j} + \sum_{i=1}^d S_{C_i}^{K_j} = S_p^{K_j}, \quad (3.13)$$

де l - число індуктивних компонентів в схемі;

d - число компонентів місткостей в схемі;

$$S_p^{K_j} = \frac{p}{K_j} \frac{\partial K_j}{\partial p}. \quad (3.14)$$

$$\sum_{i=1}^l S_{L_i}^{K_j} + \sum_{i=1}^d S_{C_i}^{K_j} = l + d. \quad (3.15)$$

4.

$$5. \sum_{i=1}^{l+d} S_{g_i}^{z_j} = -z_j, \quad \sum_{i=1}^{l+d} S_{g_i}^{p_j} = -p_j. \quad (3.16)$$

Для визначення чутливості модуля і фази передавальної функції до змін варіюваного параметра запишемо наступне представлення функції чутливості:

$$S_{g_i}^{K_j} = \frac{\partial |K_j| e^{j\varphi}}{\partial g_i} \frac{g_i}{|K_j| e^{j\varphi}} \quad (3.17)$$

або

$$S_{g_i}^{K_j} = S_{g_i}^{|K_j|} + j\varphi S_{g_i}^{\varphi}. \quad (3.18)$$

Тоді чутливість модуля передавальної функції до змін варіюваного параметра визначиться:

$$S_{g_i}^{K_j} = \operatorname{Re}[S_{g_i}^{K_j}], \quad (3.19)$$

а чутливість фази передавальної функції до змін варійованого параметра визначиться:

$$S_{g_i}^{\varphi} = \frac{1}{\varphi} \operatorname{Im}[S_{g_i}^{K_j}]. \quad (3.20)$$

3.4. Аналіз стійкості схеми

Реакція неавтономної фізичної системи в загальному випадку содер-жит *вимушені складові*, визначувані зовнішньою дією (сигналом ланцюга), і *вільні складові*, визначувані тільки властивостями власне системи (тобто топологією і параметрами ланцюга).

Стійкими (асимптотически) називаються системи (ланцюги), в кото-рых вільні складові реакції (струми і напруги) після зняття зовнішньої дії з часом зменшуються до нуля (затухають).

Нестійкими називають системи (ланцюги), в яких вільні складові реакції після закінчення дії зовнішнього обурення про-должают зростати. В реальних ланцюгах нестійкість викликає самовоз-буждение, тобто генерацію небажаних коливань.

Аналіз і розрахунок схем на стійкість займають в теорії і практиці вживання електронних ланцюгів дуже важливе місце. Одна з глобальних цілей розрахунку схем - забезпечити стійку роботу відповідних це-пей в реальних умовах експлуатації. Невиконання вказаної мети ха-рактеризует не якісність проведених розрахунків.

З приведених раніше визначень тимчасових характеристик схеми виходить, що імпульсна характеристика, що є реакцією схеми на одиничний імпульс дії, є вільною состав-ляющею реакцією схеми в чистому вигляді. По виду імпульсної характеристики, отже, можна згідно визначенню стійкості судити про якість аналізованої схеми. Так, затухаючий характер імпульсної ха-рактеристики свідчить про стійкість процесів в схемі, той, що незату-ганить, говорить про нестійкість схеми. У свою чергу, вид імпульс-ной характеристики схеми, определяея згідно (3.21) зворотного преоб-разованием Лапласа від відповідної (передавальної) схемної функції : $F(p)$

$$g(t) = L^{-1}[1 \cdot F(p)]. \quad (3.21)$$

Більш конкретно можна сказати, що вид імпульсної характеристики $g(t)$ визначається полюсами функції $F(p)$, точніше положенням цих полюсів на комплексній площині. Якщо полюсы (корені знаменника (Fp)) знаходяться в лівій *напівплощині* на карті нулів і полюсів функції, тобто $\operatorname{Re} p < 0$, то з часом імпульсна характеристика $g(t)$ прагне нуля. Це означає, що для стійкості схеми корені p_i її характеристичного рівняння (3.4) повинні бути речовинними негативними або

комплексними з негативними речовинними частинами. В іншому випадку, коли полюси розташовані в правій напівплощині ($y > 0$), експоненціальні складові у виразі мають $g(t)$ позитивний ступінь і імпульсна характеристика з часом необмежено зростає. Звідси витікає широко відоме правило: *схеми, описувані функціями з полюсами в правій напівплощині, є нестійкими. Характер нестійкого процесу* (форма імпульсної характеристики) визначається тим, що розташовує правих полюсів щодо дійсної осі. При комплексно-зв'язаному правому полюсі $p_{\Pi} = \sigma_{\Pi} \pm j\omega_{\Pi}$ відповідна вільна складова реакції є періодичною функцією з частотою ω_{Π} і амплітудою, експоненціально зростаючої із швидкістю σ_{Π} до обмеження її нелінійністю вольт-амперних характеристик компонент схеми, коли відповідний полюс через параметри компонентів схеми, що змінилися, зсунеться в ліву напівплощину. При речовинному правому полюсі вільна складова реакції монотонно (по експоненті) зростає до аналогічного обмеження нелінійністю компонент схеми.

Пасивні схеми завжди стійкі, вільні складові їх реакція затухають унаслідок теплових втрат, що нічим не компенсуються.

Аналіз схеми на стійкість проводять різними способами, заснованими на аналізі коренів знаменника схемної функції (3.4) і відмінними характером критерію, по якому судять про наявність полюсів функції в правій напівплощині. Серед них *критерій алгебри устойчивости Рауса-Гурвица*, дозволяючий визначати знаки дійсної частини полюсів, без обчислення самих коренів, *частотні критерії стійкості Найквіста, Михайлова* і ін., що дозволяють судити про стійкість по вигляду або окремим ознакам частотного годографа.

При розрахунку схем важливо визначити параметри її компонентів та-ким чином, щоб їх невеликі допустимі варіації, неминучі в умовах експлуатації електронного ланцюга, не виводили її із стійкого стану. Таким чином, приходять до поняття *запасу стійкості схеми*, який визначається мінімальною відстанню полюсів до уявної осі, допустимою при заданій їх нестабільності, визначуваній, у свою чергу, допустимою нестабільністю параметрів компонентів схеми.

Список використаних джерел

- 1 Бондарь В.А. Методы анализа и расчета электронных схем: Учеб.пособ. – Томск, 1998.- 436 с.
- 2 Сигорский В.П., Петренко А.И. Алгоритмы анализа электронных схем.- М.: Сов.радио, 1976.- 396 с.
- 3 Иваницкий А.М., Зелинский М.М Классификация трехполюсных идеальных преобразователей.- Труды учебных институтов связи.- 1970.- № 49.

- 4 Основы инженерной электрофизики. Ч. II. Основы анализа и синтеза электронных цепей/ Под ред. П.А. Ионкина.- М.: Высш.школа, 1972.- 340 с.
- 5 Ганский П.Н. Машинный анализ и расчет электронных схем.- М.: Издательство «АВС Паблш», 1999.- 224 с.
- 6 Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы.- М.: Наука, 1989.- 246 с.
- 7 Лисицкая И.Н., Сеницкий Л.А, Шумков Ю.М. Анализ электрических цепей с магнитными и полупроводниковыми элементами.- Киев: Наукова думка, 1969.- 348 с.
- 8 Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники.-.:Высш.школа,1978.- 528 с.
- 9 Матханов П.Н. Основы анализа электрических цепей. Нелинейные цепи.- М.: Высш.школа, 1977.- 574 с.
- 10 Ганский П.Н. Об эквивалентных преобразователях схем с управляемыми источниками.- Радиотехника и электроника.- 1976.- № 10.
- 11 Влах И., Сингхал К. Машинные методы анализа и проектирования электронных схем: Пер. с англ.- М.: Радио и связь, 1988.- 560 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Конспект лекцій

з дисципліни «Математичне моделювання в електроніці»
для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня
зі спеціальності 171 «Електроніка»
за освітньо-професійною програмою «Електроніка»

Укладач: Алік Іванович Трикіло

Підписано до друку _____ 2018 р.

Формат_A4_Обсяг_1,2_др.арк.

Наклад_10_прим. Замовлення ____

51918, м. Кам'янське,

вул. Дніпробудівська, 2