

**Министерство образования и науки РФ**  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования

Днепропетровский государственный технический университет

«Петрозаводский государственный университет»  
Кольский филиал

«Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева»  
Новомосковский институт

**В.Н. БОГАТИКОВ, Л.В. ДРАНИШНИКОВ, А.Е. ПРОРОКОВ**

**ОСНОВЫ ПОСТРОЕНИЯ НЕЧЕТКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**

Апатиты

2011

УДК 681.5  
ББК 32.965в6  
Б 73

Авторы:

Богатиков В. Н., заведующий кафедрой автоматики и электропривода КФ Петр ГУ  
Дранишников Л. В., профессор кафедры программного обеспечения Днепродзержинского  
государственного технического университета  
Пророков А. Е., заведующий кафедрой прикладной информатики Новомосковского института  
Российского химико-технологического университета им. Д. И. Менделеева

Рецензент:

д-р техн. наук, главный научный сотрудник ИИММ КНЦ РАН Горохов А.В.

**Богатиков, В.Н.** Основы построения нечетких систем управления: Учебно–методическое пособие / **В.Н. Богатиков, Л.В. Дранишников, А.Е. Пророков.** - Апатиты: Изд-во КФ ПетрГУ, 2011. – 74 с.

Рассматривается методология построения нечетких систем управления. Показаны основные операции на нечетких множествах, правила вывода и алгоритмы их реализации в среде MATLAB Fuzzy Logic Toolbox. Приводятся примеры применения нечетких моделей в системах управления.

Предназначено для студентов направлений бакалавриата (профилей) – «Информатика и вычислительная техника», «Информационные системы» и «Электроэнергетика и электротехника» (профиль – «Электропривод и автоматика»), а также специальностей – «Автоматизированные системы обработки информации и управления», «Информационные системы и технологии» и «Электропривод и автоматика промышленных установок и комплексов».

Учебно-методическое пособие полезно лицам занимающиеся разработкой систем управления технологических процессов.

Табл. 44. Ил. 62. Библиогр.: 11 назв.

УДК 681.5  
ББК 32.965в6

© Кольский филиал  
Петрозаводского  
государственного  
университета, 2011

© Днепродзержинский  
государственный технический  
университет, 2011

© Новомосковский институт  
Российского химико–  
технологического университета  
им. Д. И. Менделеева, 2011

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                      |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>                                                                | <b>5</b>  |
| <b>1 МЕТОДОЛОГИЯ НЕЧЕТКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ .....</b>                                   | <b>7</b>  |
| <b>2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НЕЧЕТКИХ СИСТЕМ .....</b>                                 | <b>7</b>  |
| 2.1 ОПЕРАЦИИ НА НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВАХ.....                                             | 13        |
| Объединение нечетких множеств (логическая сумма множеств $A \cup B$ ).....           | 14        |
| Пересечение нечетких множеств (логическое произведение множеств $A \cap B$ ).....    | 15        |
| Дополнение нечетких множеств (отрицание множества $\bar{A}$ ).....                   | 15        |
| Равенство множеств A и B.....                                                        | 16        |
| Операция концентрации $CON(A)$ .....                                                 | 16        |
| Операция растяжения $DIL(A)$ .....                                                   | 16        |
| Алгебраическое произведение двух множеств $A * B$ .....                              | 16        |
| Ограниченная сумма двух нечетких множеств $A \mid + B$ .....                         | 17        |
| Ограниченная разность двух нечетких множеств $A \mid - B$ .....                      | 17        |
| Ограниченное произведение двух нечетких множеств $A \mid \cdot B$ .....              | 17        |
| Нормализация множества $NORM(A)$ .....                                               | 17        |
| 2.2 НЕЧЕТКОСТЬ И ВЕРОЯТНОСТЬ.....                                                    | 17        |
| 2.3 НЕЧЕТКИЕ ПРАВИЛА ВЫВОДА.....                                                     | 19        |
| Нечеткое лингвистическое высказывание.....                                           | 19        |
| Нечеткое рассуждение.....                                                            | 19        |
| 2.4 СИСТЕМЫ НЕЧЕТКОГО ВЫВОДА МАМДАНИ-ЗАДЕ .....                                      | 21        |
| 2.4.1. Лингвистические переменные. Нечеткая и лингвистическая переменная .....       | 23        |
| Базовое терм-множество T.....                                                        | 24        |
| Универсальное множество X лингвистической переменной .....                           | 25        |
| Синтаксическая процедура G .....                                                     | 25        |
| Семантическая процедура M .....                                                      | 26        |
| 2.4.2 Формирование базы правил систем нечеткого вывода .....                         | 29        |
| 2.4.3 Фазификация.....                                                               | 30        |
| 2.4.4 Агрегирование.....                                                             | 35        |
| 2.4.5 Активация.....                                                                 | 36        |
| 2.4.6 Аккумуляция .....                                                              | 37        |
| 2.4.7 Дефазификация .....                                                            | 37        |
| Метод центра тяжести.....                                                            | 38        |
| Метод центра тяжести для одноточечных множеств .....                                 | 38        |
| Метод центра площади.....                                                            | 39        |
| <b>3 ОСНОВНЫЕ АЛГОРИТМЫ НЕЧЕТКОГО ВЫВОДА.....</b>                                    | <b>39</b> |
| Алгоритм Мамдани (Mamdani) .....                                                     | 40        |
| Алгоритм Цукамото .....                                                              | 41        |
| Алгоритм Сугено .....                                                                | 41        |
| Алгоритм Ларсена.....                                                                | 42        |
| Упрощенный алгоритм нечеткого вывода .....                                           | 42        |
| Пример нечеткого регулятора .....                                                    | 43        |
| <b>4 ПОСТРОЕНИЕ НЕЧЕТКИХ МОДЕЛЕЙ В СРЕДЕ MATLAB FUZZY LOGIC TOOLBOX .....</b>        | <b>45</b> |
| 4.1 НАЗНАЧЕНИЕ И ВОЗМОЖНОСТИ ПАКЕТА FUZZY LOGIC TOOLBOX .....                        | 45        |
| 4.2 ГРАФИЧЕСКИЙ ИНТЕРФЕЙС FUZZY LOGIC TOOLBOX .....                                  | 45        |
| Редактор систем нечеткого вывода FIS .....                                           | 49        |
| Редактор функции принадлежности .....                                                | 50        |
| Редактор правил системы нечеткого вывода.....                                        | 51        |
| Программы просмотра правил и поверхности системы нечеткого вывода .....              | 52        |
| <b>5 НЕЧЕТКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ.....</b> | <b>54</b> |
| <b>6 ПРИМЕРЫ РАЗРАБОТКИ НЕЧЕТКИХ МОДЕЛЕЙ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В СРЕДЕ MATLAB.....</b>    | <b>56</b> |

|                                                                                                 |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 6.1 Нечеткая модель управления кондиционером воздуха в помещении.....                           | 56        |
| Содержательная постановка задачи .....                                                          | 56        |
| Построение базы нечетких лингвистических правил .....                                           | 58        |
| Фазификация входных переменных .....                                                            | 59        |
| Нечеткая модель управления кондиционером воздуха в помещении .....                              | 60        |
| 6.2 ОЦЕНИВАНИЕ ФИНАНСОВОЙ СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ КЛИЕНТОВ ПРИ ПРЕДОСТАВЛЕНИИ БАНКОВСКИХ КРЕДИТОВ ..... | 64        |
| Нечеткая модель оценивания финансовой состоятельности клиентов .....                            | 67        |
| Фазификация входных и выходных переменных .....                                                 | 67        |
| Формирование базы правил систем нечеткого вывода .....                                          | 68        |
| Построение нечеткой модели средствами Fuzzy Logic Toolbox и анализ полученных результатов ..... | 70        |
| <b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>                                                                         | <b>72</b> |
| <b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>                                                   | <b>73</b> |

## ВВЕДЕНИЕ

В последнее время нечеткое моделирование является одной из наиболее активных и перспективных направлений прикладных исследований в области управления и принятия решений / /. Нечеткое моделирование оказывается особенно полезным, когда в описании технических систем и бизнес-процессов присутствует неопределенность, которая затрудняет или даже исключает применение точных количественных методов и подходов.

Анализ конкретной системы фактически состоит в выделении некоторой подсистемы из более крупной системы. Выделяя подсистему, мы фактически вводим границы, которых на самом деле не существуют. При построении моделей реальных явлений исследователь, желая пользоваться математическими методами, зачастую вносит определенность там, где ее нет по существу. Особенно опасным является использование искусственной определенности при управлении.

Не имея возможности точно описать все связи подсистемы с системой, мы используем или собственные представления об этих связях или обращаемся за помощью к экспертам, которые этими представлениями обладают. Эти представления или, иначе, информация о границах анализируемой подсистемы чаще всего бывает выражена в понятиях, которые имеют нечеткий смысл с точки зрения классической математики.

Язык традиционной математики, опирающийся на теорию множеств и двузначную логику, оказывается недостаточно гибким для моделирования реальных сложных систем, поскольку в нем нет средств описания понятий, которыми пользуются человек и которые имеют неопределенный смысл. Чем сложнее система, тем глубже мы анализируем задачу, тем неопределеннее становится ее решение. Простой пример - классификация объектов по цвету. В традиционной математике классификация - это разбиение некоторой совокупности объектов на непересекающиеся подмножества. Однако мы не в состоянии провести границу между отдельными цветами.

Одна из основных целей построения математических моделей систем - обработка имеющейся информации для выбора рационального (оптимального) варианта управления системой. Очень часто и особенно при исследовании экономических и социальных систем информация о системе носит субъективный характер и, как правило, содержит большое число неопределенностей типа "много", "мало", "сильно", "слабо", "высокий", "низкий" и т.п., которые не имеют аналогов в языке традиционной математики. По глубоко укоренившейся традиции научного мышления понимание явления, к сожалению, отождествляется с возможностью его количественного анализа. Наличие математических средств отражения нечеткости исходной информации позволило бы построить модель, адекватную реальности.

Необходимость успешного использования математических методов для анализа сложных систем привела к созданию средств более точного и полного учета нечетких представлений и суждений людей о реальном мире в математических моделях. Было создано новое направление в прикладной математике, связанное с именем видного американского математика Лотфи Заде и получившее название теории нечетких множеств. Л. Заде сформулировал принцип несовместимости: **чем сложнее система, тем менее мы способны дать точные и в то же время практические суждения о ее поведении. Для систем, сложность которых превосходит некоторый пороговый уровень, точность и практический смысл становятся практически исключаящими друг друга характеристиками.**

В области управления техническими системами нечеткое моделирование позволяет получать более адекватные результаты по сравнению с результатами, которые основываются на использовании традиционных аналитических моделей и алгоритмов управления. Диапазон применения нечетких методов с каждым годом расширяется, охватывая такие области, как проектирование промышленных роботов и бытовых электроприборов, управление доменными печами и движением поездов метро, управление промышленной безопасностью предприятий, автоматическое распознавание речи и

изображений.

Нечеткая логика, которая служит основой для реализации методов нечеткого управления, более естественно описывает характер человеческого мышления и ход его рассуждений, чем традиционные формально-логические системы. Именно поэтому изучение и использование математических средств для представления нечеткой исходной информации позволяет строить модели, которые наиболее адекватно отражают различные аспекты неопределенности, постоянно присутствующей в окружающей нас реальности.

Укажем основные причины, на основе которых отдается предпочтение применению систем с нечеткой логикой:

- 1) концептуально легче для понимания;
- 2) гибкая система устойчива к неточным входным данным;
- 3) может моделировать нелинейные функции произвольной сложности;
- 4) в ней учитывается опыт специалистов-экспертов;
- 5) основана на естественном языке человеческого общения.

Успех нового подхода определяется его прикладной направленностью. Прежде всего, это не сухая теория, а аппарат решения большого класса практических задач. Это и теория алгоритмов и искусственный интеллект, теория принятия решений, распознавание образов, "препарирование" естественного языка (определение нечеткого смысла выражений) и т.п. Теория нечетких множеств - единственная теория, которая математически оперирует со смысловым содержанием слов человека (математическая лингвистика).

Лежащее в основе этой теории понятие нечеткого множества является средством математического моделирования неопределенных понятий, которыми оперирует человек при описании своих представлений о реальной системе, своих желаний, целей и т.п. **Нечеткие множества - это математическая модель класса с нечеткими (размытыми) границами.** В этом понятии учитывается возможность постепенного перехода от принадлежности к не принадлежности элемента множеству, то есть элемент может иметь степень принадлежности множеству, промежуточную между полной принадлежностью и полной не принадлежностью.

Теория нечетких множеств представляет собой обобщение и переосмысление важнейших направлений классической математики. У ее истоков лежат, в частности, идеи и достижения многозначной логики, которая указала на возможность перехода от двух к произвольному числу значений истинности и поставила проблему оперирования понятиями с изменяющимся содержанием.

Заде показал, каким образом нечеткую, качественного характера информацию можно использовать в формализованных процедурах анализа. Было предложено такое расширение языка математики, которое позволяет учитывать нечеткость исходной информации в математических моделях.

В настоящее время в сфере бизнеса и экономики широко используются человеко-машинные системы, предназначенные для обработки нечетких данных, реализующие и оказывающие помощь принятию экономических решений, маркетинг, советы по вложению капитала, различного рода управление и планирование, анализ риска, помощь в подготовке контрактов и т.д.

Для лучшего понимания многих реальных управленческих ситуаций в настоящее время необходимо владение средствами конструктивного анализа ситуаций, использование средств их моделирования. Основа моделирования - математика. Но часто управленческие ситуации, требующие принятия решений, столь сложны и неопределенны (особенно на начальных этапах анализа), что их не удастся описать, используя аппарат классической математики. Во многих управленческих ситуациях классическая математика просто "не работает".

Материалы учебно-методического пособия составлены по источникам, перечисленным в конце учебного пособия [1-11].

## 1 МЕТОДОЛОГИЯ НЕЧЕТКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Прежде всего, следует заметить, что методология нечеткого моделирования не заменяет и не исключает рассмотренную выше методологию системного моделирования (рис.3), а конкретизирует последнюю применительно к процессу построения и использования нечетких моделей сложных систем.

Процесс нечеткого моделирования представляет аналогичную последовательность взаимосвязанных этапов, как и процесс системного моделирования. При этом каждый из этапов выполняется с целью построения и использования нечеткой модели системы решения исходной проблемы.

В общем случае под *нечеткой моделью* понимается информационно-логическая модель системы, построенная на основе теории нечетких множеств и нечеткой логики.

В рамках современной методологии системного моделирования неопределенность может характеризовать следующие аспекты модельных представлений.

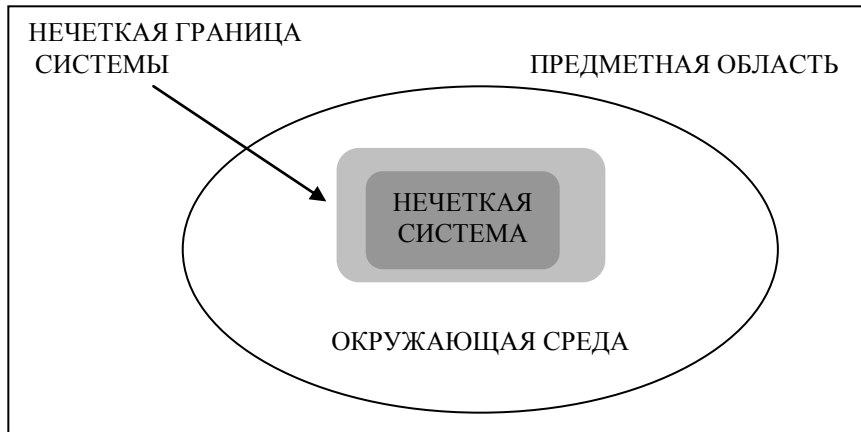
- Неясность или нечеткость границы системы. Так, например, использование дихотомических признаков "большой - маленький", "высокий - низкий", "дорогой - дешевый", "молодой - старый", "опытный - неопытный", "быстрый - медленный" и подобных им для определения состава элементов системы сталкивается с принципиальной трудностью представления структуры модели системы. Характерный пример этого аспекта неопределенности - собственно класс сложных систем в контексте ответа на вопрос: "Какие системы следует считать сложными?"
- Неоднозначность семантики отдельных терминов, которые используются при построении концептуальных моделей систем (модель прически и математическая модель, игровой автомат и автомат как стрелковое оружие, графическая карта местности и игральная карта и т.п.).
- Неполнота модельных представлений о некоторой сложной системе, особенно в связи с решением слабо формализуемых проблем. В этом случае сама попытка построить адекватную модель сложной системы или предметной области сталкивается с принципиальной невозможностью учесть все особенности решаемой проблемы.
- Противоречивость отдельных компонентов модельных представлений или требований, которым должна удовлетворять модель сложной системы. Так, например, требование решить проблему за минимальное время и с минимальными финансовыми затратами содержит в себе элемент противоречия.
- Неопределенность наступления тех или иных событий, относящихся к возможности нахождения системы-оригинала в том или ином состоянии в будущем. Речь идет о том, что анализ процесса поведения системы не дает основания для однозначного ответа на вопрос: "Будет ли находиться система-оригинал в некотором состоянии в момент времени, который относится к ее будущему?". Этот аспект неопределенности часто называют стохастическим, поскольку он традиционно исследовался средствами теории вероятностей и математической статистики.

Таким образом, нечеткая модель системы-оригинала, или нечеткая система в первую очередь характеризуется неопределенностью типа неясности (нечеткости) границы системы, а также, возможно, отдельных ее состояний, входных и выходных воздействий. В этом случае исходная структуризация нечеткой системы может быть изображена графически в виде фигуры с расплывчатыми границами (рис.1).

## 2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НЕЧЕТКИХ СИСТЕМ

Понятие нечетких множеств (fuzzy sets) как обобщение обычных (четких) множеств было введено Лотфи Заде в 1965 г. О множестве известно, как минимум, что оно состоит из элементов, обладающих некоторым общим свойством. В дальнейшем множество будем обозначать заглавными

буквами латинского алфавита, а элементы множества - строчными буквами. Принадлежность элемента  $a$  множеству  $M$  обозначается как:  $a \in M$  непринадлежность  $a \notin M$  или  $a \bar{\in} M$ . Множество  $A$  является *подмножеством* множества  $B$  (обозначается  $A \subseteq B$ ), если любой элемент из  $A$  является элементом  $B$ . Если при этом  $A \neq B$  то  $A$  называется *строгим (собственным) подмножеством* множества  $B$  (обозначается  $A \subset B$ ).



**Рис.1** Графическая иллюстрация нечеткой системы как системы с нечеткой границей

Множество, для которого все рассматриваемые множества являются подмножествами, называется *универсальным множеством (универсумом)*. Универсальное множество, таким образом, представляет полное пространство, область рассуждений ( $X, Y, Z, U, V$  - универсальные множества;  $A, B, C, \dots$  - подмножества универсальных множеств;  $a, b, c, \dots, x, y, z, u, v$  - элементы соответствующих множеств).

*Способы задания множеств:*

1. Перечислением (списком) элементов - только для конечных множеств. Например:  
 $A = \{a, b, c, d\}$ .
2. Описанием свойств, которыми должны обладать его элементы. Это обозначается как  $M = \{x | P(x)\}$  или  $M = \{x : P(x)\}$  и читается: множество  $M$  состоит из таких элементов  $x$ , что  $x$  обладает свойством  $P$ .
3. Порождающей процедурой, описывающей способ получения элементов. Например, новых элементов  $b$  множества  $M$  из уже имеющихся элементов  $a$ :  
 $M = \{b : b = (a + 1)^2, a \in N\}$ , откуда при  $a = 1, 2, 3$  получаем набор  $M = \{4, 9, 16, \dots\}$ .
4. С помощью характеристической функции. Этот способ особенно важен с точки зрения понятия нечеткого множества.

Традиционный способ представления элемента множества  $A$  состоит в применении характеристической функции.

*Характеристическая функция  $\chi_A$* , определяющая множество  $B$  в полном пространстве  $X$ , представляет собой отображение, для которого  $X$  есть область определения, а  $\{0, 1\}$  (двузначное множество из 0 и 1) есть область значений:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}$$

т.е.  $\chi_A(x) = 1$ , если элемент  $x$  удовлетворяет свойствам  $A$ , и  $\chi_A = 0$ , если не удовлетворяет. Если отложить значения  $X$  на горизонтальной оси, а  $\{0, 1\}$  на вертикальной, то получим графическое



представление, показанное на рис.2.

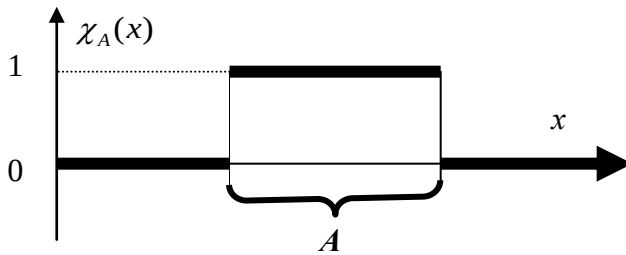


Рис.2 Характеристическая функция  $\chi_A$

В нечетких системах элемент может частично принадлежать к любому множеству. Степень принадлежности к множеству  $A$ , представляющая собой обобщение характеристической функции, называется функцией принадлежности  $\mu_A(x)$ , причем  $\mu_A(x) \in [0,1]$ .

В традиционной (классической) математике множество понимается как совокупность элементов (объектов), обладающих некоторым общим свойством. Для любого элемента при этом рассматриваются лишь две возможности: либо этот элемент принадлежит данному множеству (т.е. обладает данным свойством), либо не принадлежит данному множеству (т.е. не обладает данным свойством).

Однако при попытках математического описания ряда систем язык обычных множеств может оказаться недостаточно гибким. Часто имеющаяся о системе информация формулируется на языке нечетких понятий, которые невозможно формализовать с помощью обычных множеств.

Предположим, что некоторое явление, свойство, событие, например качество функционирования некоторой системы оценивается параметром (показателем)  $A$ , причем  $A$  может принимать ряд нечетких (расплывчатых) значений:

- $x_1 = \{\text{работает отлично}\},$
- $x_2 = \{\text{работает очень хорошо}\},$
- $x_3 = \{\text{работает хорошо}\},$
- $x_4 = \{\text{работает плохо}\},$
- $x_5 = \{\text{не работает}\},$

Понятие нечеткого множества - попытка математической формализации нечеткой информации с целью ее использования при построении математических моделей систем. В основе этого понятия лежит представление о том, что элементы данного множества, обладающие общим свойством, могут обладать этим свойством в различной степени и, соответственно, принадлежать данному множеству с различной степенью. При таком подходе высказывания типа: "элемент  $x$  принадлежит данному множеству  $A$  ( $x \in A$ )" теряет смысл, поскольку необходимо указать насколько "сильно" или с какой степенью данный элемент  $x$  принадлежит данному множеству  $A$ .

Один из простейших способов математического описания нечеткого множества - характеристика степени принадлежности элемента к множеству  $A$  числом, например, из интервала  $[0,1]$ . Построение меры принадлежности может быть связано с экспертным подходом.

Вернемся, к примеру, оценки качества функционирования некоторой системы. При формализации расплывчатости каждому значению  $x_i$  приписывается некоторое число  $p_i$ , которое количественно оценивает меру того, что параметр  $A$  принимает значение  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Пусть для этого привлекается группа из  $N$  равноправных и независимых экспертов, каждый из которых имеет ровно  $n$  голосов. Каждый эксперт, оценивая тот факт, что параметр  $A$  принимает значение  $x_i$ , может отдать один голос значению  $x_i$ , а может и не отдать, причем один эксперт может отдать по одному голосу

сразу нескольким  $x_i$ . В этом проявляется *нечеткость знания экспертов*. Максимальное количество голосов, которое может собрать значение  $x_i$ , равно  $N$ , и это в том случае, когда все эксперты отдали по одному голосу значению  $x_i$ .

Пусть значение  $x_i$  набрало  $N_i$  голосов. Тогда в качестве количественной оценки того факта, что параметр  $A$  приобретает значение  $x_i$ , примем

$$p_i = \frac{N_i}{N}, \quad i = 1, \dots, n, \quad 0 \leq p_i \leq 1.$$

Формализуем данные рассмотренного примера. Пусть  $X$  - некоторое множество (обычное):  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Свяжем с параметром  $A$  *нечеткое подмножество*  $A$  (чаще используется термин "нечеткое множество"), под которым понимают совокупность пар вида  $(x_i, p_i)$ , где число  $p_i$  определяет степень принадлежности элемента  $x_i$  нечеткому множеству  $A$ .

Функция  $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$ , определяемая по правилу  $\mu_A(x_i) = p_i$ , называется *функцией принадлежности* нечеткого множества  $A$ . Значение  $p_i$  этой функции для конкретного элемента  $x_i$  называется *степенью принадлежности этого элемента нечеткому множеству*  $A$ .

Универсальное множество  $X$  нечеткого множества  $A$  понимается как область определения функции принадлежности  $\mu_A$ .

Таким образом, область определения нечеткого множества - обычное (четкое) множество. Как видно из этого определения, нечеткое множество полностью определяется своей функцией принадлежности, поэтому функцию принадлежности часто используют как обозначение нечеткого множества.

Значения функции являются рациональными числами из интервала  $[0,1]$ , где 0 означает отсутствие принадлежности к множеству, а 1 - полную принадлежность. Конкретное значение функции принадлежности называется *степенью* или *коэффициентом принадлежности*. Эта степень может быть определена явным образом в виде функциональной зависимости, например,

$$\mu_A(x) = \exp \left[ - \left( \frac{x-3}{0,2} \right)^2 \right]$$

либо дискретно - путем задания конечной последовательности значений  $x$ .

Существуют различные формы записи нечетких множеств. Например, конечное нечеткое множество можно записать в виде:

$$A = \{x_1 | p_1, x_2 | p_2, \dots, x_n | p_n\}$$

или

$$A = \{x_1 | \mu_A(x_1), x_2 | \mu_A(x_2), \dots, x_n | \mu_A(x_n)\}$$

или

$$A(x) = \left\{ \frac{x_1}{\mu(x_1)}, \frac{x_2}{\mu(x_2)}, \dots, \frac{x_n}{\mu(x_n)} \right\}, \quad A(x) = \left\{ \frac{\mu(x_1)}{x_1}, \frac{\mu(x_2)}{x_2}, \dots, \frac{\mu(x_n)}{x_n} \right\}.$$

Например, для последовательности дискретных значений переменной  $x$ , равных  $x_1 = 7, x_2 = 8, x_3 = 9, x_4 = 10, x_5 = 11, x_6 = 12, x_7 = 13$ , их коэффициент принадлежности к числам, близким 10, может быть определен в виде

$$A(x) = \left\{ \frac{0,1}{7}, \frac{0,3}{8}, \frac{0,8}{9}, \frac{1,0}{10}, \frac{0,8}{11}, \frac{0,3}{12}, \frac{0,1}{13} \right\}.$$

Одноточечное нечеткое множество содержит один элемент:

$$A = \mu_A(x) | x.$$

Любое нечеткое множество можно рассматривать как объединение составляющих его одноточечных множеств:

**Определение.** Нечеткое подмножество  $A$  универсального множества  $X$  характеризуется функцией принадлежности  $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$ , которая ставит в соответствие каждому элементу  $x \in X$  числа  $\mu_A$  из интервала  $[0,1]$ , характеризующее степень принадлежности элемента  $x$  подмножеству  $A$ .

Форма записи нечеткого подмножества  $A$  универсального множества  $X$  имеет вид

$$A = \mu_1 / x_1 + \mu_2 / x_2 + \dots + \mu_n / x_n \text{ или } A = \sum_{i=1}^n \mu_i / x_i,$$

где  $\mu_i$  – степень принадлежности элемента  $x_i \in X$  нечеткому подмножеству  $A$  универсального множества  $X$ ; знак суммирования обозначает объединение одноточечных множеств  $\mu_i / x_i$ . В случае, если  $\mu_i$  задано непрерывной функцией, нечеткое подмножество  $A$  универсального множества  $X$  представляется в виде

$$A = \int_X \mu_A(x) / x,$$

где символ интеграла обозначает операцию объединения одноточечных множеств  $\mu_A / x$ , а не суммирование.

Приведенное определение является основой для формализации различного вида неопределенностей.

**Пример 1.** Пусть диапазон изменения параметра определяется универсальным множеством  $U = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ , а значение величины параметра при наблюдении характеризуют нечетким термином "высокий". На этапе формализации качественной информации термин "высокий" сопоставляется с нечетким подмножеством  $A$  универсального множества  $U$ . Допустим, что это сопоставление дало результат:

$$A = \text{высокий} = 0/0 + 0,1/1 + 0,2/2 + 0,5/3 + 0,8/4 + 1/5.$$

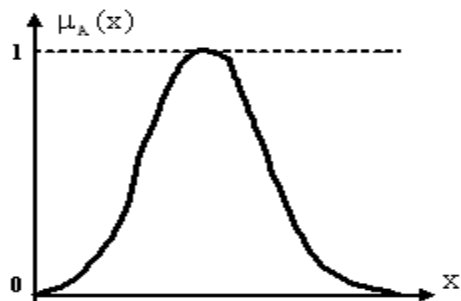
Данное выражение показывает, что значение величины параметра  $u_1 = 0$  не может быть отнесено к понятию "высокий", поэтому  $\mu_1(u_1) = 0$ . Величина параметра  $u_4 = 3$  со степенью  $\mu(u_4) = 0,5$  отнесена к понятию "высокий", а для  $u_6 = 5$  степень принадлежности к данному термину принята равной 1. Последнее показывает, что значение величины параметра  $u_6 = 5$  при заданном универсальном множестве  $U$  строго соответствует термину "высокий".

Нечеткое множество, таким образом, формируется путем введения обобщенного понятия принадлежности, т.е. расширения двухэлементного множества характеристической функции  $\{0,1\}$  до континуума  $[0,1]$ . Это означает, что переход от полной принадлежности объекта классу к полной его принадлежности происходит не скачком (см. рис.2), а плавно, постепенно (рис.3).

Обычные множества при этом составляют подкласс класса нечетких множеств. Функцией принадлежности обычного множества  $B \subset X$  является его характеристическая функция

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin B \\ 1, & \text{если } x \in B, \end{cases}$$

т.е. обычное (четкое) множество можно определить как совокупность пар вида  $(x, \mu_B(x))$ , где  $\mu_B(x)$  принимает только два значения: 0 и 1.

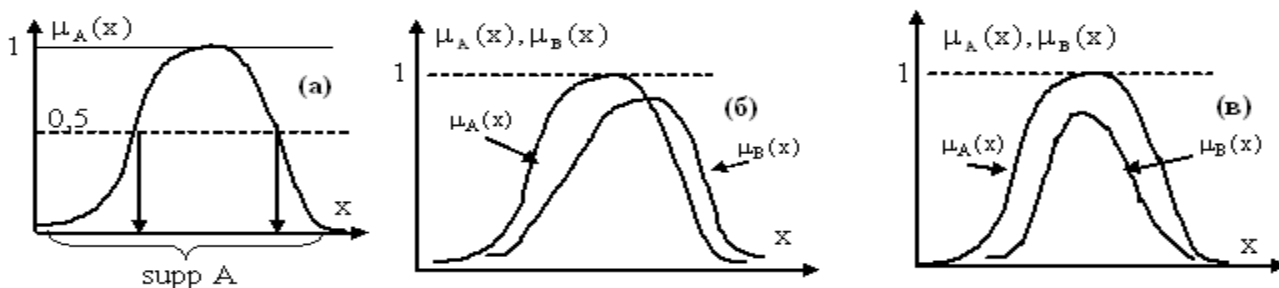


**Рис.3 Функция принадлежности.**

Таким образом, нечеткое множество представляет собой более широкое понятие, чем обычное множество, в том смысле, что функция принадлежности нечеткого множества может быть произвольной функцией и принимать значения в интервале  $[0,1]$ .

Если в экспертной оценке для каждого  $x_i \in X$  выполнено равенство  $p_i = 0$ , то каждому  $x_i$  ни один из экспертов не отдал голоса, то есть с точки зрения экспертов явление, свойство или событие  $A$  не имеет места. В этом случае нечеткое множество  $A$  будет пустым  $\emptyset$ :  $\mu_{\emptyset}(x) = 0, \quad \forall x \in X$ . ( $\forall$  – квантор общности, для всех  $x$ ). Таким образом, универсальное множество  $X$  можно описать функцией принадлежности.

Носителем нечеткого множества  $A$  (обозначается  $\text{supp } A$ ) с функцией принадлежности  $\mu_A(x)$  называется множество в обычном смысле вида (рис.4 а):  $\text{supp } A = \{x \mid x \in X, \mu_A(x) > 0\}$ . Иными словами, носителем нечеткого подмножества  $A$  называется множество элементов  $x \in X$ , для которых функция степеней принадлежности  $\mu_A(x) > 0$ .



**Рис.4 Варианты функций распределения**

Точкой перехода нечеткого множества  $A$  называется такой элемент  $x \in X$ , для которого  $\mu_A(x) = 0,5$  (см. рис.4 а).

Нечеткое множество называется нормальным, если верхняя граница его функции принадлежности достигает значения, равного 1 (множество  $A$  на рис.4 б):  $\sup_{x \in X} \mu_A(x) = 1$ .

В противном случае множество называют суб-нормальным (множество  $B$  на рис.4 в).

Пусть  $A$  и  $B$  – нечеткие множества в  $X$ , а  $\mu_A(x)$  и  $\mu_B(x)$  – их функции принадлежности. Говорят, что множество  $A$  включает в себя множество  $B$  ( $B \subseteq A$ ), если для любого  $x \in X$  выполняется неравенство  $\mu_B(x) \leq \mu_A(x)$ . При этом  $\sup_{x \in X} \mu_B(x) \leq \sup_{x \in X} \mu_A(x)$  (рис.4, в).

Множества  $A$  и  $B$  совпадают (эквивалентны), если  $\mu_A(x) = \mu_B(x)$  при любом  $x \in X$ .

**Пример 2.** Пусть, например, универсальное множество рассматриваемых контрактов состоит из 4 элементов:  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ .

Нечеткое множество:

$$A = (\text{выгодный контракт}) = \{x_1 \mid \text{мало}, x_2 \mid \text{средне}, x_3 \mid \text{сильно}, x_4 \mid \text{средне}\}.$$

Здесь нечеткие степени принадлежности: мало, средне, сильно являются нечеткими подмножествами вспомогательного универсального множества  $V$ , определенного, например, следующим образом:

$$V = \{0; 0,1; 0,2; 0,3; \dots; 0,9; 1\}$$

При этом нечеткие степени принадлежности определяются, например, так:

$$\text{мало} = \{0,2 \mid 0,5; 0,3 \mid 0,7; 0,4 \mid 1; 0,5 \mid 0,5\};$$

$$\text{средне} = \{0,5 \mid 0,7; 0,6 \mid 1; 0,7 \mid 0,7; 0,8 \mid 0,5\};$$

$$\text{сильно} = \{0,7 \mid 0,5; 0,8 \mid 0,8; 1 \mid 1\}.$$

Выбор вида функций принадлежности и их параметров определяются в большей степени опытом, интуицией и другими субъективными факторами лица, принимающего решение.

В теории нечетких множеств, помимо переменных цифрового типа, существуют лингвистические переменные с приписываемыми им значениями. Пусть переменная  $x$  обозначает температуру ( $x = \text{"температура"}$ ). Можно определить нечеткие множества "отрицательная", "близкая к нулю", "положительная", характеризуемые функциями принадлежности  $\mu_{\text{отр}}(x)$ ,  $\mu_{\text{блнл}}(x)$ ,  $\mu_{\text{полож}}(x)$ . Так же как обычная переменная может принимать различные значения, лингвистическая переменная "температура" может принимать различные лингвистические значения. В данном примере это: "отрицательная", "близкая к нулю" и "положительная". Следовательно, лингвистическое выражение может иметь вид: "температура отрицательная", "температура, близкая к нулю", "температура положительная". На рис.5 приведена графическая иллюстрация принадлежности переменной  $x = T$  (где  $T$  означает температуру) для трех названных множеств значений температуры.



Рис.5 Иллюстрация понятия степени принадлежности температуры к области отрицательной, близкой к нулю либо положительной (пунктирные линии - нечеткая система, сплошные линии - точная система).

## 2.1 Операции на нечетких множествах

На нечетких множествах, рассматриваемых как обобщение обычных множеств, можно определить ряд математических операций, являющихся обобщением аналогичных операций, выполняемых на "четких" множествах. Операции над нечеткими множествами позволяют формировать другие нечеткие множества, соответствующие сложным явлениям, событиям или свойствам, составленным из более простых компонентов.

Пусть имеются два свойства  $A$  и  $B$ , каждое из которых может принимать значения из одного множества  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

Группа из  $N$  экспертов оценивает возможность принятия свойствам  $A$  и  $B$  значений  $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ . Пусть для свойства  $A$  значение  $x_i$  набрало  $N_i$  голосов, а для свойства  $B$  это же значение  $x_i$  набрало  $M_i$  голосов. Тогда с этими свойствами связаны нечеткие множества

$$A = \{x_1 | p_1, \dots, x_n | p_n\}, \quad p_i = N_i / N;$$

$$B = \{x_1 | q_1, \dots, x_n | q_n\}, \quad q_i = M_i / N.$$

Операции над нечеткими множествами можно, вообще говоря, определить различными способами. Выбор конкретного из них зависит от смысла, вкладываемого в соответствующие операции в рамках рассматриваемой задачи.

**Объединение нечетких множеств (логическая сумма множеств  $A \cup B$ ).**

Рассмотрим свойство  $C$ , заключающееся в том, что имеет место либо свойство  $A$ , либо свойство  $B$ , либо оба одновременно. Оценим число голосов  $R_i$ , которое набрало значение  $x_i$  для свойства  $C$ . Зная только числа  $N_i$  и  $M_i$ , мы не можем точно сказать, каково значение  $R_i$ , однако нетрудно определить, что

$$\max(N_i, M_i) \leq R_i \leq \min(N_i + M_i; N).$$

Пусть, например,  $N_i = 5, M_i = 8; N = 20$ . Тогда  $8 \leq R_i \leq 13$  (см. рис.6).

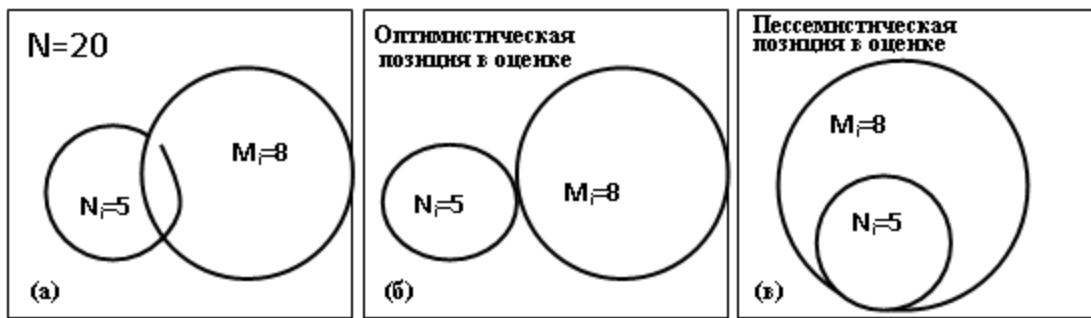


Рис.6 Диаграмма Венна. Свойства нечетких множеств

Если принять пессимистическую позицию, соответствующую крайней осторожности в оценке  $R_i$ , то минимальное значение  $R_i = \max(N_i, M_i)$ , в нашем примере  $R_i = 8$  (рис.6в).

В соответствии с принятым подходом свяжем со свойством  $C$  нечеткое множество

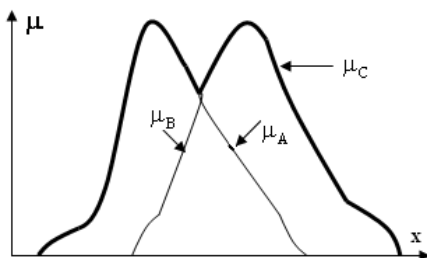
$$C = \{x_1 | r_1, \dots, x_n | r_n\}, \quad r_i = R_i / N.$$

Таким образом, при позиции крайней осторожности в оценке  $R_i$

$$r_i = \max(p_i, q_i) \text{ или } \mu_C(x_i) = \max(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i)).$$

**Определение.** Объединением  $A \cup B$  нечетких множеств  $A$  и  $B$  одного универсального множества  $X$ , с соответствующими функциями принадлежности  $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$  и  $\mu_B : X \rightarrow [0,1]$  называется нечеткое множество  $C$  универсального множества  $X$ , функция принадлежности которого (рис.7) задается формулой:

$$\mu_C(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)].$$



Операция объединения связана с использованием союза "ИЛИ".

Рис.7 Объединение нечетких множеств

**Пример 3.** Пусть даны два нечетких множества  $A$  и  $B$ , определенные следующим образом:

$$A = \left\{ \frac{1,0}{x_1}, \frac{0,7}{x_2}, \frac{0,5}{x_3}, \frac{0,1}{x_4} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{0,2}{x_1}, \frac{0,5}{x_2}, \frac{0,6}{x_3}, \frac{0,7}{x_4} \right\}.$$

Логическая сумма этих множеств  $C = A \cup B$  равна:

$$C = \left\{ \frac{1,0}{x_1}, \frac{0,7}{x_2}, \frac{0,6}{x_3}, \frac{0,7}{x_4} \right\}.$$

**Пересечение нечетких множеств (логическое произведение множеств  $A \cap B$ ).**

Рассмотрим свойство  $D$ , заключающееся в том, что имеет место и свойство  $A$ , и свойство  $B$ . Оценим число голосов  $L_i$ , которое набрало значение  $x_i$  для свойства  $D$ . Несложно определить, что  $M_i + N_i = R_i + L_i$ .

Если ориентироваться на принцип объединения нечетких множеств, соответствующей формуле  $\mu_C(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$  и рис.8, то для определения  $L_i$  следует принять  $L_i = \min(N_i, M_i)$ .

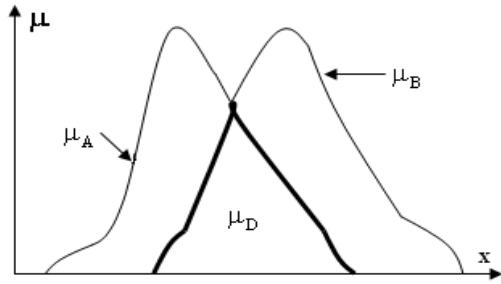
Отсюда, считая  $l_i = L_i / N$ , получим  $l_i = \min(p_i, q_i)$  или

$$\mu_D(x_i) = \min[\mu_A(x_i), \mu_B(x_i)].$$

**Определение.** Пересечением  $A \cap B$  нечетких множеств  $A$  и универсального множества  $X$  с функциями принадлежности соответственно  $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$  и  $\mu_B : X \rightarrow [0,1]$  называется нечеткое множество  $D$  универсального множества  $X$ , функция принадлежности которого (рис.8) задается формулой

$$\mu_D(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

Отметим, что операция пересечения связана с использованием союза "И".



**Рис.8 Операция пересечения**

Для данных из Примера 3 множество  $C$ , являющееся логическим произведением множеств  $A$  и  $B$ , будет иметь вид

$$C = \left\{ \frac{0,2}{x_1}, \frac{0,5}{x_2}, \frac{0,5}{x_3}, \frac{0,1}{x_4} \right\}.$$

**Дополнение нечетких множеств (отрицание множества  $\bar{A}$ )**

Понятие дополнение  $\bar{A}$  нечеткого множества  $A$  связывается со свойством  $E$ , заключающимся в том, что свойство  $A$  не имеет смысла. Если свойство  $A$  для значения  $x_i$  набрало  $N_i$  голосов, то свойство  $E$  - соответственно  $(N - N_i)$  голосов. Свяжем со свойством  $E$  нечеткое множество

$$E = \{x_1 | k_1, \dots, x_n | k_n\}, \quad k_i = (N - N_i) / N = 1 - p_i.$$

Откуда

$$\mu_{\bar{A}}(x_i) = 1 - \mu_A(x_i).$$

**Определение.** Дополнением  $\bar{A}$  нечеткого множества  $A$  универсального множества  $X$  называется множество  $E$  с функцией принадлежности

$$\mu_{\bar{A}}(x_i) = 1 - \mu_A(x_i).$$

Операция дополнения связана с использованием отрицания "НЕ". На рис.9 графически показано пересечение нечетких множеств  $A \cap \bar{A}$ . Уровень различия  $A$  и  $\bar{A}$  определяет меру нечеткости множества  $A$ .

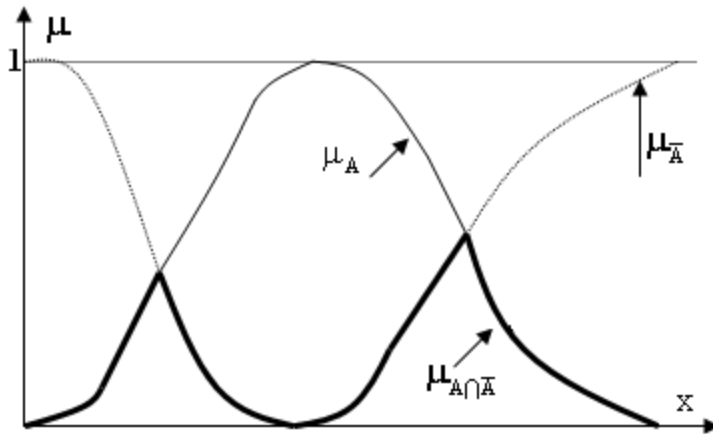


Рис.9 Дополнение нечетких множеств

В отличие от обычных множеств (четких) множеств, где отрицание элементов, принадлежащих к множеству, дает пустое множество, отрицание нечеткого множества определяет непустое множество, состоящее из элементов, функции принадлежности которых также определены на интервале  $[0,1]$ .

**Пример 4.** Пусть универсальное множество  $U=1+2+3+4$ , а нечеткое множество  $A$ , характеризующее понятие "высокий", задано в виде  $A=высокий=0/1+0,6/2+0,8/3+1/4$ .

Тогда  $\bar{A}=не\ высокий=1/1+0,4/2+0,2/3+0/4$ .

**Равенство множеств  $A$  и  $B$**

Нечеткие множества  $A(x)$  и  $B(x)$  равны между собой, когда для всех элементов  $x_i$  обоих множеств выполняется условие  $\mu_A(x_i) = \mu_B(x_i)$ .

**Операция концентрации  $CON(A)$**

$$\mu_{CON}(x) = [\mu_A(x)]^2.$$

Выполняя операцию концентрации для Примера 4, получим:

$$B=CON(A)=очень\ высокий=0/1+0,36/2+0,64/3+1/4.$$

Эта операция весьма часто выполняется при действиях с лингвистической переменной, в которых она отождествляется с интенсификатором "очень".

**Операция растяжения  $DIL(A)$**

$$\mu_{DIL}(x) = [\mu_A(x)]^{0,5}.$$

Лингвистическое значение этой операции формулируется как "примерно" либо "приблизительно". Эта операция противоположна по своему смыслу операции концентрации и соответствует терму «довольно». Операция растяжения используется в случаях, когда требуется моделировать потерю информации.

**Алгебраическое произведение двух множеств  $A * B$**

$$\mu_{A*B}(x) = \mu_A(x) * \mu_B(x)$$

Алгебраическое произведение для примера 3 будет равно:

$$C = \left\{ \frac{0,2}{x_1}, \frac{0,35}{x_2}, \frac{0,3}{x_3}, \frac{0,07}{x_4} \right\}$$



### **Ограниченная сумма двух нечетких множеств $A|+|B$**

$$\mu_{A|+|B}(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}.$$

Ограниченная сумма двух нечетких множеств для Примера 3 будет равна:

$$C = \left\{ \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{0,8}{x_4} \right\}$$

### **Ограниченная разница двух нечетких множеств $A|-|B$**

$$\mu_{A|-|B}(x) = \max\{0, \mu_A(x) - \mu_B(x)\}.$$

Ограниченная разница двух нечетких множеств для Примера 3 будет равна:

$$C = \left\{ \frac{0,8}{x_1}, \frac{0,2}{x_2}, \frac{0}{x_3}, \frac{0}{x_4} \right\}$$

### **Ограниченное произведение двух нечетких множеств $A||B$**

$$\mu_{A||B}(x) = \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}$$

Ограниченное произведение двух нечетких множеств для примера 1 будет равно:

$$C = \left\{ \frac{0,2}{x_1}, \frac{0,2}{x_2}, \frac{0,1}{x_3}, \frac{0}{x_4} \right\}$$

### **Нормализация множества $NORM(A)$**

$$\mu_{NORM}(x) = \frac{\mu_A(x)}{\max\{\mu_A(x)\}}.$$

Отметим, что множество  $A$  считается подмножеством множества  $B$ , т.е.  $A \subset B$ , когда для всех элементов выполняется неравенство  $\mu_A(x_i) \leq \mu_B(x_i)$ . Например, если  $A = \{0,5/x_1, 0,3/x_2, 0,1/x_3\}$  и  $B = \{0,6/x_1, 0,5/x_2, 0,4/x_3\}$ , то  $A \subset B$ .

Определенные на нечетких множествах операции обладают свойствами ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности, причем эти свойства понимаются следующим образом:

- ассоциативность:  $(A * B) * C = A * (B * C)$ ;
- коммутативность:  $A * B = B * A$  (за исключением ограниченной разности);
- дистрибутивность:  $A * (B \circ C) = (A * B) \circ (A * C)$ ,

где операторы  $*$  и  $\circ$  обозначают любую определенную выше операцию на нечетких множествах.

## **2.2 Нечеткость и вероятность**

В теории вероятностей событие  $u \in U$  ( $\in$  – знак принадлежности элемента  $u$  множеству  $U$ , о множестве известно, как минимум, что оно состоит из элементов, обладающих некоторым общим свойством) либо происходит, либо нет, а вероятность  $p(u)$  представляет меру того, что оно состоится или случайная переменная  $x$  примет значение  $u$ . Оценка вероятности  $p(u)$  может быть рассчитана как отношение количества экспериментов, в которых указанное событие совершилось, к общему количеству экспериментов. Например, если день 21 ноября в течение последних 100 лет был дождливым 82 раза, то вероятность дождя в этот день в настоящем году оценивается как 0,82. Следует подчеркнуть, что вероятность события относится исключительно к будущему. Когда

соответствующий день наступит, данное событие либо произойдет, либо нет, и в этот момент понятие вероятности его свершения утрачивает смысл. Например, в момент начала дня 21 ноября все еще не ясно, будет этот день дождливым или нет, однако, когда он завершится, мы будем говорить о том, произошло или нет событие, а не о его вероятности.

Понятие нечеткости оценивается совершенно по-другому. Оно измеряется степенью, с которой событие  $x = u$  (например, только что произошедшее) принадлежит к некоторому множеству событий  $A$ . Фактически измеряется степень, в которой множество  $U$  содержится в подмножестве  $A$ . Например, если 21 ноября дождь шел на протяжении 15 часов, то степень его принадлежности к множеству дождливых дней можно определить как  $15/24$ . С этой точки зрения понятие нечеткости относится не только к прошлому, как это имеет место в случае вероятности, но также к настоящему и к будущему.

Следует отметить, что вероятность может быть определена как нечеткое значение, особенно тогда, когда оно оценивается приближенно, а не точным способом. Поэтому можно сказать, что вероятность наступления определенного события составляет, например, "около 0,7", поскольку переменная "около 0,7" является лингвистической. Если же нечеткое понятие относится к будущему, ему можно приписать некоторую вероятность.

**Пример 5.** Рассмотрим вероятность выпадения кости с определенным номером из интервала  $[1,6]$ . Допустим, что имеются три нечетких множества чисел: "малое", "среднее" и "большое", функции принадлежности к которым представлены на рис.10а.

Вероятность  $p(x)$  наступления нечеткого события, что  $x$  - это малое, среднее или большое число, определяется по формуле:

$$p(x) = \sum_{i=1}^6 \mu(x_i) \cdot p(x_i),$$

где  $p(x_i)$  – обозначает вероятность выпадения определенного числа из  $[1,6]$ .

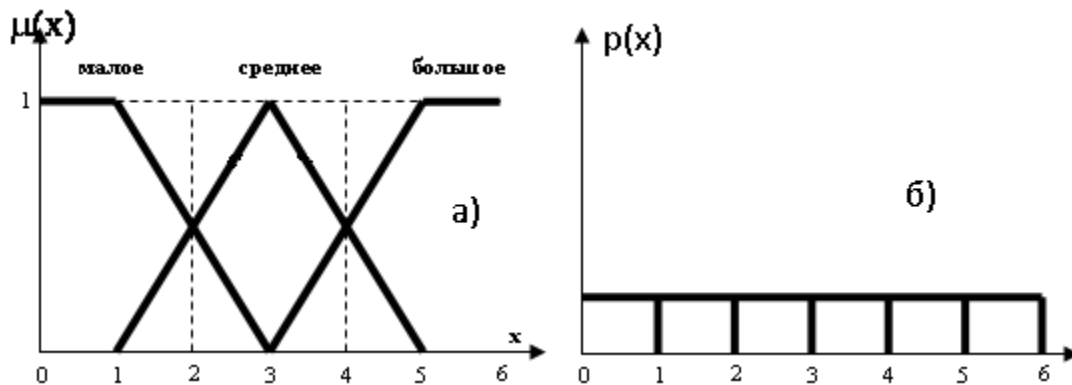


Рис.10 Графическая иллюстрация данных примера выбрасывания кости: а) функции принадлежности; б) вероятность выпадения соответствующего номера

Если допустить равномерное распределение вероятности выпадения каждого числа ( $p(x_i) = 1/6$ ) так, как это представлено на рис.10б, получим:

$$p(x = \text{"малое"}) = \frac{1}{6} \cdot (1 + 0,5) = 0,25,$$

$$p(x = \text{"среднее"}) = \frac{1}{6} \cdot (0,5 + 1 + 0,5) = 0,333,$$

$$p(x = \text{"большое"}) = \frac{1}{6} \cdot (0,5 + 1 + 1) = 0,418.$$

В приведенном результате учитывается понятие нечеткости лингвистической переменной: "малое число", "среднее число", "большое число", а каждому событию приписывается вероятность его наступления.

### 2.3 Нечеткие правила вывода

Нечеткий вывод занимает центральное место в нечеткой логике и системах нечеткого управления. Процесс нечеткого вывода представляет собой некоторую процедуру или алгоритм получения нечетких заключений на основе нечетких условий или предпосылок. Этот процесс соединяет в себе все основные концепции теории нечетких множеств: функции принадлежности, лингвистические переменные, нечеткие логические операции, методы нечеткой импликации и нечеткой композиции.

#### **Нечеткое лингвистическое высказывание.**

Нечетким лингвистическим высказыванием называют высказывания следующих видов:

1. Высказывание « $\beta$  есть  $\alpha$ », где  $\beta$  – наименование лингвистической переменной,  $\alpha$  – ее значение, которому соответствует отдельный лингвистический терм из базового терм-множества  $T$  лингвистической переменной  $\beta$ .
2. Высказывание « $\beta$  есть  $\nabla\alpha$ », где  $\nabla$  – модификатор, соответствующий таким словам, как: «ОЧЕНЬ», «БОЛЕЕ ИЛИ МЕНЕЕ», «МНОГО БОЛЬШЕ» и другие.
3. Составные высказывания, образованные из высказываний видов 1 и 2 и нечетких логических операций в форме связок: «И», «ИЛИ», «ЕСЛИ-ТО», «НЕ».

Например, высказывание «скорость автомобиля высокая» представляет собой нечеткое высказывание первого вида, в рамках которого лингвистической переменной «скорость автомобиля» присваивается значение «высокая». Нечеткое высказывание второго вида «скорость автомобиля очень высокая» означает, что лингвистической переменной «скорость автомобиля» присваивается значение «высокая» с модификатором «очень», который изменяет значение соответствующего лингвистического термина «высокая» на основе использования некоторой расчетной формулы, например для операции концентрирования. Нечеткое высказывание второго вида «скорость автомобиля более и ли менее высокая» означает, что лингвистической переменной «скорость автомобиля» присваивается значение «высокая» с модификатором «БОЛЕЕ ИЛИ МЕНЕЕ», который изменяет значение соответствующего лингвистического термина «высокая» на основе использования некоторой расчетной формулы, например для операции растяжения.

Базовое правило вывода типа "если - то" (англ.: if - then rule) называется также *нечеткой импликацией*, принимающей форму

*если  $x$  это  $A$ , то  $y$  это  $B$ ,*

где  $A$  и  $B$  - это лингвистические значения, идентифицированные нечетким способом через соответствующие функции принадлежности для переменных  $x$  и  $y$ . Часть " $x$  это  $A$ " называется *условием* (предпосылкой), а " $y$  это  $B$ " - *следствием* (заключением). Импликацию *если  $x$  это  $A$ , то  $y$  это  $B$*  можно записать в сокращенном виде  $A \rightarrow B$ .

#### **Нечеткое рассуждение.**

*Нечеткое рассуждение* - это процедура, которая позволяет определить заключение, вытекающее из множества правил "если - то". Такое множество при  $N$  переменных  $x_i$  может принимать вид

*если  $x_1$  это  $A_1$  и  $x_2$  это  $A_2$  и ... и  $x_N$  это  $A_N$ , то  $y$  это  $B$ . (A)*

Переменные  $x_1, x_2, \dots, x_N$  образуют  $N$  - мерный вектор  $x$ , составляющий аргумент условия, в котором  $A_1, A_2, \dots, A_N$  и  $B$  обозначают величины соответствующего коэффициента принадлежности

$\mu_A(x_i)$  и  $\mu_B(y)$ . Необходимо обратить внимание, что здесь присутствуют индивидуальные функции принадлежности для каждой переменной  $x_i$  и отдельно для  $y$ . Случайное значение функции принадлежности  $\mu_A(x)$ , где  $x$  - это вектор  $x = [x_1, x_2, \dots, x_N]$  относящееся к условию импликации (уровень активации правила), должно в последующем интерпретироваться с использованием введенных ранее нечетких операций. Возможна интерпретация в форме логического произведения множества либо в форме алгебраического произведения:

- интерпретация в форме логического произведения

$$\mu_A(x) = \min \left( \mu_A(x_i) \right)_{i=1, \dots, N}$$

- интерпретация в форме алгебраического произведения

$$\mu_A(x) = \prod_{i=1}^N \mu_A(x_i).$$

Приписывание единственного значения функции принадлежности, описывающей многомерное условие, будем называть *агрегированием предпосылки*. Каждой импликации  $A \rightarrow B$ , определенной выражением (A), можно также придать единственное значение функции принадлежности  $\mu_{A \rightarrow B}(x, y)$ .

Наиболее популярные интерпретации этой функции также имеют форму логического или алгебраического произведения:

- классическая нечеткая импликация, предложенная Л.Заде

$$\mu_{A \rightarrow B} = \max \{ \min \{ \mu_A(x), \mu_B(y) \}, 1 - \mu_A(x) \},$$

- форма логического произведения (нечеткая импликация, предложенная Э. Мамдани)

$$\mu_{A \rightarrow B} = \min \{ \mu_A(x), \mu_B(y) \},$$

- форма алгебраического произведения

$$\mu_{A \rightarrow B} = \mu_A(x) \cdot \mu_B(y).$$

Приписывание единственного значения функции принадлежности всей импликации будем называть процедурой *агрегирования* на уровне импликации.

Системы нечеткого вывода предназначены для преобразования значений входных переменных процесса управления в выходные переменные на основе использования нечетких правил продукций. Для этого системы нечеткого вывода должны содержать базу правил нечетких продукций и реализовать нечеткий вывод заключений на основе посылок или условий, представленных в форме нечетких лингвистических высказываний.

В общем случае система нечеткого логического вывода может быть представлена так, как это показано на рис.11.

- **Приведение к нечеткости** (фазификация): функции принадлежности, определенные на входных переменных, применяются к их фактическим значениям для определения степени истинности каждой предпосылки каждого правила.

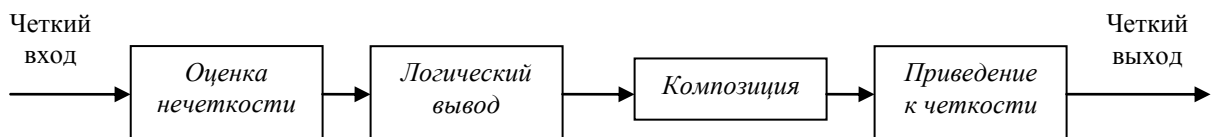


Рис.11 Схема нечеткого вывода

- **Логический вывод:** вычисленное значение истинности для предпосылок каждого правила применяется к заключениям каждого правила. Это приводит к одному нечеткому множеству, которое будет назначено каждой переменной вывода для каждого правила. Это приводит к одному нечеткому подмножеству, которое будет назначено каждой переменной вывода для каждого правила. В качестве правил логического вывода обычно используются только операции **min** или **prod** (умножение). В логическом выводе **минимума** функция принадлежности «отсекается» по высоте, соответствующей вычисленной степени истинности предпосылки правила (нечеткая логика «И»). В логическом выводе **умножения** функция принадлежности вывода масштабируется при помощи вычисленной степени истинности предпосылки правила.
- **Композиция:** выходы всех правил вычисляются отдельно, но в правой части нескольких из них может быть указана одна и также нечеткая переменная. Нечеткие подмножества, назначенные для каждой переменной вывода (или одной переменной), объединяются вместе для формирования одного нечеткого подмножества. При подобном объединении обычно используются операции **max** или **sum**. При композиции **максимума** комбинированный вывод нечеткого подмножества конструируется как поточечный максимум по всем нечетким подмножествам (нечеткая логика «ИЛИ»). При композиции **суммы** комбинированный вывод нечеткого подмножества конструируется как поточечная сумма по всем нечетким подмножествам, назначенным переменной вывода правилами логического вывода.
- **Приведение к четкости (дефазификация):** этот прием используется, когда необходимо перейти от нечеткого вывода к четкому выходному значению. При переходе от нечеткого вывода к четкому выходу используются различные способы, в частности, метод центра тяжести, метод среднего максимума.

## 2.4 Системы нечеткого вывода Мамдани-Заде

Разработка и применение систем нечеткого вывода включает в себя ряд этапов, реализация которых выполняется с помощью основных положений нечеткой логики. Информацией, которая поступает на вход системы нечеткого вывода, являются измеренные некоторым образом входные переменные. Эти переменные соответствуют реальным переменным процесса управления. Информация, которая формируется на выходе системы нечеткого вывода, соответствует выходным переменным, которыми являются управляющие переменные процесса управления.

Системы нечеткого вывода предназначены для преобразования значений входных переменных процесса управления в выходные переменные на основе использования нечетких правил продукций. Для этого системы нечеткого вывода должны содержать базу правил нечетких продукций и реализовать нечеткий вывод заключений на основе посылок или условий, представленных в форме нечетких лингвистических высказываний.

Основными этапами нечеткого вывода являются (рис.12).

- Формирование базы правил систем нечеткого вывода.
- Фазификация входных переменных.
- Агрегирование подусловий в нечетких правилах продукций.
- Активизация или композиция подзаключений в нечетких правилах продукций.
- Аккумуляирование заключений нечетких правил продукций.



Рис.12 Диаграмма деятельности процесса нечеткого вывода

Элементы теории нечетких множеств, правила импликации и нечетких рассуждений образуют систему нечеткого вывода. В ней можно выделить множество используемых в системе нечетких правил, базу данных, содержащую описания функций принадлежности, а также механизм вывода и агрегирования, который формируется применяемыми правилами импликации. Следует упомянуть, что в случае технической реализации в качестве входных и выходных сигналов выступают измеряемые величины, однозначно сопоставляющие входным значениям соответствующие выходные значения. Для обеспечения взаимодействия множеств этих двух видов вводится нечеткая система с так называемым **фазификатором**

(преобразователем множества входных данных в нечеткое множество) на входе и **дефазификатором** (преобразователем нечетких множеств в конкретное значение выходной переменной) на выходе. В контексте нечеткой логики под фазификацией понимается не только отдельный этап выполнения нечеткого вывода, но и собственно процесс или процедура нахождения значений функций принадлежности нечетких множеств (термов) на основе обычных (не нечетких) исходных данных.

Целью этапа фазификации является установление соответствия между конкретным (обычно - численным) значением отдельной входной переменной системы нечеткого вывода и значением функции принадлежности соответствующего ей терма входной лингвистической переменной.

После завершения этого этапа для всех входных переменных должны быть определены конкретные значения функций принадлежности по каждому из лингвистических термов, которые используются в подусловиях базы правил системы нечеткого вывода. Структура такой системы представлена на рис.13.

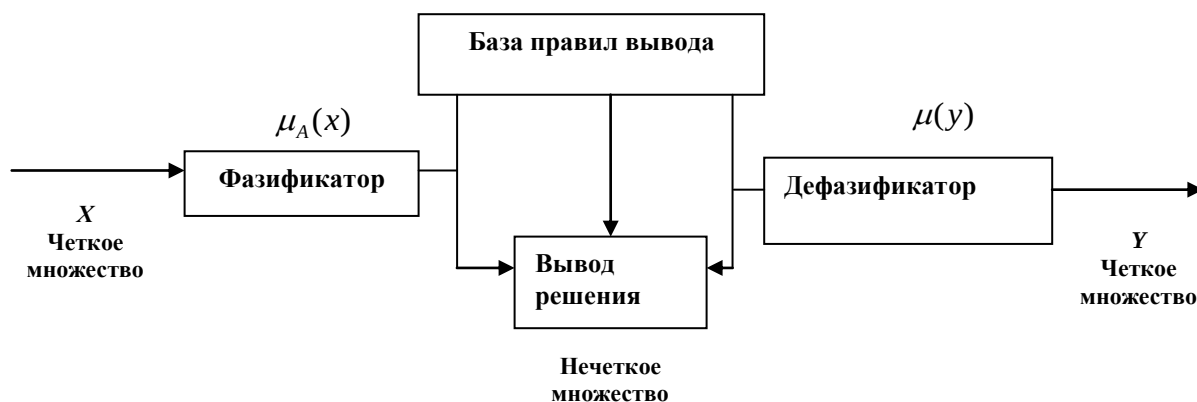


Рис.13. Структура нечеткой системы с фазификатором и дефазификатором

Фазификатор преобразует точное множество входных данных в нечеткое множество, определяемое с помощью значений функций принадлежности, тогда как дефазификатор решает обратную задачу - он формирует однозначное решение относительно значения выходной переменной на основании многих нечетких выводов, вырабатываемых исполнительным механизмом нечеткой системы.

Выходной сигнал этого модуля может иметь  $M$  нечетких множеств, определяющих диапазон изменения выходной переменной. Дефазификатор преобразует этот диапазон в одно конкретное значение, принимаемое в качестве выходного сигнала всей системы. Отметим, что существуют системы нечеткого вывода, в которых исполнительный механизм непосредственно генерирует четкие значения, которые уже не требуется подвергать дефазификации. Такой системой является система Такаги-Сугено-Канга.

Обобщенная функциональная структура системы, приведенная на рис.13., может быть представлена в расширенной форме, которая в явном виде демонстрирует правила нечеткого вывода так, как это изображено на рис.14.

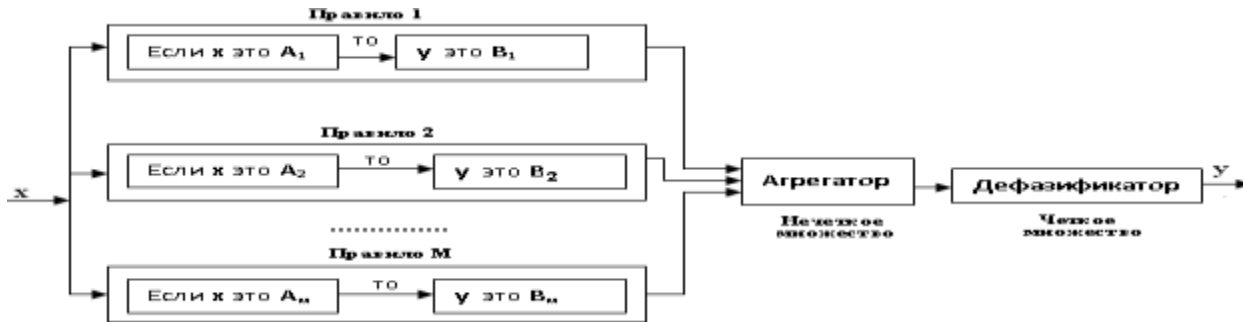


Рис.14 Организация вывода в нечеткой системе при наличии  $M$  правил вывода

Поскольку допускается применение множества нечетких правил, в ней также предусмотрен блок агрегирования, чаще всего реализуемый в виде логического сумматора (оператор  $\max$ ).

Описываемая система вывода называется системой Мамдани-Заде. Она очень популярна в обычных (неадаптивных) нечетких системах.

Как правило, в модели Мамдани-Заде присутствуют следующие операторы:

- оператор логического или арифметического произведения для определения результирующего уровня активации, в котором учитываются все компоненты вектора  $x$  условия;
- оператор логического или арифметического произведения для определения значения функции принадлежности для всей импликации  $A \rightarrow B$ ;
- оператор логической суммы как агрегатор равнозначных результатов импликации многих правил;
- оператор дефазификации, трансформирующий нечеткий результат  $\mu(y)$  в четкое значение выходной переменной  $y$ .

#### 2.4.1. Лингвистические переменные. Нечеткая и лингвистическая переменная

Структура нечеткой переменной может быть представлена в виде:

$$\langle \alpha, X, C \rangle,$$

где  $\alpha$  – наименование нечеткой переменной, ее имя (символ);  $X = \{x\}$  – область ее определения (универсальное множество, являющееся областью рассуждений);  $C = \bigcup_{x \in X} \mu_{\alpha}(x)$  – совокупность

нечетких множеств на  $X$ , описывающая ограничения на возможные значения нечеткой переменной  $\alpha$ .

В качестве примера нечеткой переменной рассмотрим нечеткое множество  $B$ , которое будет характеризовать "горячий кофе". В этом случае соответствующая нечеткая переменная может быть представлена следующим образом:

$$\langle \text{Горячий кофе}, \{x | 0^{\circ}C < x < 100^{\circ}C\}, B \rangle,$$

где  $B = \{x, \mu_B(x)\}$  – нечеткое множество с функцией принадлежности  $\mu_B(x)$ , которая может быть

задана, в частности, графически.

Таким образом, основой понятия нечеткой переменной является нечеткое множество. Дополнительно вводится указание имени (символа) этого нечеткого множества и универсального множества. В таком понимании  $\alpha$  – символ нечеткого множества  $C$ , определенного на универсальном множестве  $X$ .

Если значениями нечеткой переменной становятся предложения или слова в специальном (формальном) языке, то такие нечеткие переменные Заде называет *лингвистическими переменными*. Примером лингвистической переменной является нечеткая переменная ВЫСОТА. Ее значения могут быть образованы понятиями: ВЫСОКИЙ, НИЗКИЙ, СРЕДНИЙ и дополнительными словами: НЕ, ОЧЕНЬ, ДОВОЛЬНО, БОЛЕЕ ИЛИ МЕНЕЕ и т.п. Лингвистические переменные предназначены для характеристики сложных и плохо определенных явлений и систем, для которых не подходят обычные количественные оценки.

Структура лингвистической переменной в общем виде может быть представлена пятеркой:

$$\langle \beta, T, X, G, M \rangle$$

например:  $\langle \text{СТОИМОСТЬ}, T, [0, 5000], G, M \rangle$ ,

где  $\beta$  – наименование лингвистической переменной; в приведенном примере это СТОИМОСТЬ;  $T = \{T_i\}$  – множество значений лингвистической переменной (базовое терм-множество);  $X$  – универсальное множество (область рассуждений), являющееся областью определения значений лингвистической переменной;  $G$  – грамматика (синтаксическая процедура), которая описывает процесс образования или генерирования из множества  $T$  новых, осмысленных в рассматриваемом контексте значений для данной лингвистической переменной;  $M$  – семантическая процедура, которая позволяет поставить в соответствие каждому новому значению данной лингвистической переменной, получаемому с помощью процедуры  $G$ , некоторое осмысленное содержание посредством формирования соответствующего нечеткого множества.

**Базовое терм-множество  $T$**

Базовое терм-множество  $T = \{T_i\}$  представляет собой наименования значений лингвистической переменной на естественном или формальном языке, областью определения которых является множество  $X$ . Мощность множества  $T$ , исходя из практических соображений, не должна превышать 5...9. Каждый терм  $T_i$  – это слово или предложение.

Для приведенного выше примера трехэлементное терм-множество может быть построено, например, следующим образом:

$$T = \left\{ \underset{\text{малая}}{T_1}, \underset{\text{средняя}}{T_2}, \underset{\text{высокая}}{T_3} \right\}.$$

Каждому терму  $T_i$ , т.е. каждому значению лингвистической переменной, соответствует нечеткая переменная  $\langle T_i, X, C_i \rangle$ , где  $C_i$  – нечеткое множество с функцией принадлежности  $\mu_{T_i}(x)$  (рис.15).

Таким образом, значения  $T_i$  лингвистической переменной с наименованием  $\beta$  являются, в свою очередь, символами (именами) нечетких подмножеств  $C_i$  универсального множества  $X$ , полностью описываемых своими функциями принадлежности  $\mu_{T_i}$ .

Часто терм  $T_i$  (символ) и соответствующее ему нечеткое множество  $C_i$  отождествляют, если это не вызывает путаницы.



Например, если

$$\mu_{\text{молодой}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq 25 \\ \left(1 + \left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right)^{-1}, & \text{если } x > 25, \end{cases}$$

то нечеткое множество  $C_i \subseteq X$ , обозначенное как МОЛОДОЙ, можно представить в виде

$$T_i = C_i = \text{МОЛОДОЙ} = \int_0^{25} 1 |x + \int_{25}^{100} \left(1 + \left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right)^{-1} |x.$$

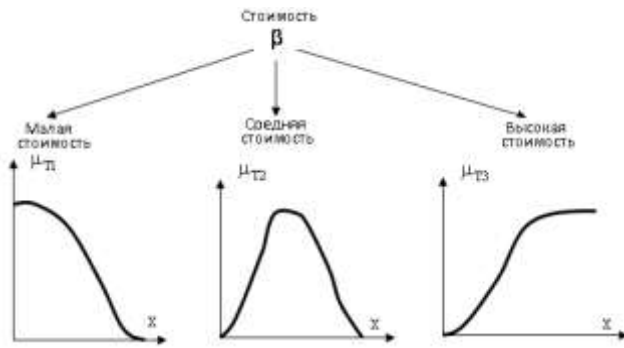


Рис.15 Базовое терм множество "Стоимость"

### Универсальное множество $X$ лингвистической переменной

Универсальное множество  $X$  лингвистической переменной является областью определения (областью рассуждений) для значений лингвистической переменной. Если максимальная стоимость не превышает, скажем, 5000 тыс. руб., то множество  $X$  определено континуумом  $[0, 5000]$ . Возможный вид функций принадлежности  $\mu_{T_i}$  на этом универсальном множестве показан на рис.16.

В зависимости от характера множества  $X$  лингвистические переменные могут быть разделены на числовые и нечисловые.

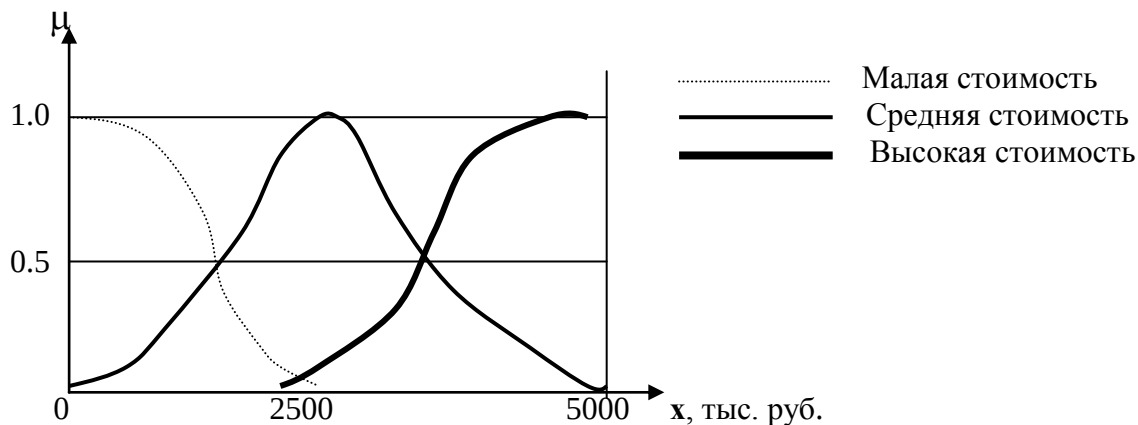


Рис.16 Формирование универсального множества лингвистической переменной "Стоимость"

*Числовой* называется лингвистическая переменная, для которой область определения  $X$  есть подмножество числовой оси. Нечеткие переменные, соответствующие значениям числовой лингвистической переменной представляются *нечеткими числами*. Примером нечисловой лингвистической переменной является переменная КОМПЕТЕНТНОСТЬ со значениями: КОМПЕТЕНТНЫЙ, ВЫСОКОКОМПЕТЕНТНЫЙ, НЕДОСТАТОЧНО КОМПЕТЕНТНЫЙ и т.п. Но в этом случае можно построить нечеткие множества на универсальном множестве  $U$ , обозначенном некоторыми символами впечатлений, т.н. "психологическом континууме" (рис.17).

### Синтаксическая процедура $G$

Синтаксическая процедура  $G$  (в частности, формальная грамматика) описывает процесс образования новых, осмысленных для данной задачи значений лингвистической переменной, исходя из ее базового терм-множества  $T$ . По своей сути это процедура расширения базового терм-множества.

Такая синтаксическая процедура должна, например, образовывать новые значения: **ОЧЕНЬ МАЛАЯ СТОИМОСТЬ**, **ОЧЕНЬ ВЫСОКАЯ СТОИМОСТЬ**, **НЕВЕРОЯТНО ВЫСОКАЯ СТОИМОСТЬ** и т.п. Такие составные термины должны быть генерированы лишенной контекста грамматикой.

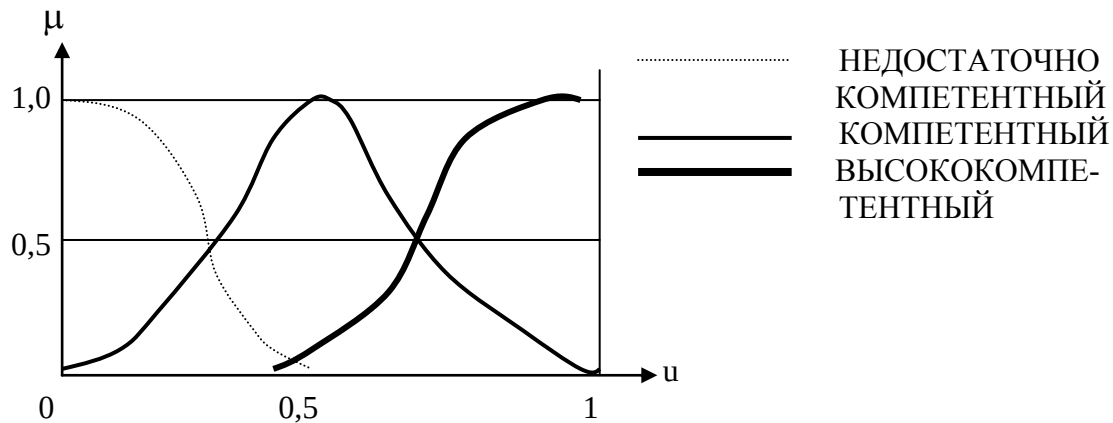


Рис.17 Нечисловая лингвистическая переменная **КОМПЕТЕНТНОСТЬ**

Иногда процедура  $G$  состоит в простом перечислении возможных термов (как и обычное множество можно задать не только порождающей процедурой, но и списком).

Грамматическая структура составных терминов значений лингвистической переменной имеет 4 категории элементов:

- 1) первичные термины  $T_i$  базового терм-множества  $T = \{T_i\}$ , например, **ВЫСОКИЙ**;
- 2) отрицание НЕ, союзы И, ИЛИ;
- 3) *модификаторы* или *лингвистические неопределенности* типа **ОЧЕНЬ**, **МНОГО**, **СЛАБО**, **БОЛЕЕ**, **МЕНЬШЕ**, **ВПОЛНЕ**, **ЧРЕЗВЫЧАЙНО** и т.п., обозначаемые символом  $h$ ;
- 4) *маркеры* - разделители (пробелы), вводные слова.

Синтаксическую процедуру  $G$  (формальную грамматику) можно рассматривать как оператор, действующий на базовое терм-множество, что приводит к образованию *расширенного терм-множества*  $T^*$  лингвистической переменной  $T^* = T \cup G(T)$ .

#### **Семантическая процедура $M$**

Семантическая процедура  $M$  ставит в соответствие термину  $T_i$  нечеткое множество  $C_i$ , т.е.  $M(T_i) = C_i$ .

Семантическая процедура  $M$  позволяет также превратить каждое новое значение лингвистической переменной, образуемое синтаксической процедурой  $G$  (например, **ОЧЕНЬ ВЫСОКАЯ СТОИМОСТЬ**), в нечеткое формирование нечеткого множества (рис.18). Эта процедура часто связана с экспертным опросом.

Так, по смыслу операций  $\cup, \cap$  и дополнения ( $\overline{\phantom{x}}$ ) имеем:

$$M(T_i \text{ и } T_j) = C_i \cap C_j;$$

$$M(T_i \text{ или } T_j) = C_i \cup C_j;$$

$$M(\text{не } T_i) = \overline{C_i}; M(T_i) = C_i.$$

Заметим здесь, что если терм  $T_i$  - это слово или предложение, то  $M(T_i)$  - это значение, смысл термина в виде нечеткого множества  $C_i$ .

Операции над множествами  $C_i$  и  $C_j$  сводится к преобразованию функций принадлежности

(рис.19).

При определении семантики новых значений расширенного терм-множества  $T^*$ , лингвистической переменной используются ранее описанные операции (объединения, пересечения и дополнения) над нечеткими множествами, а также некоторые новые операции, используемые только для лингвистических переменных (концентрации, растяжения и т.п.) при учете лингвистических неопределенностей.

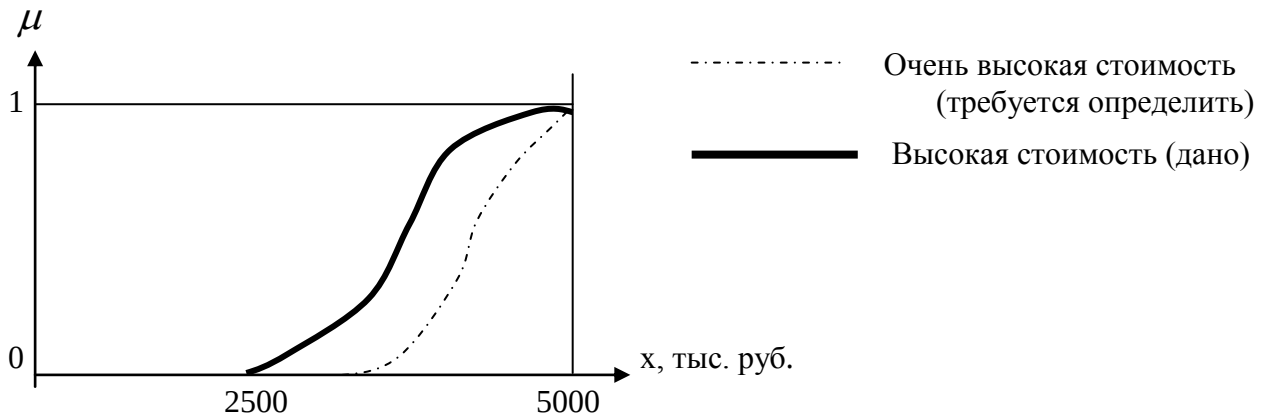


Рис.18 Семантическая процедура

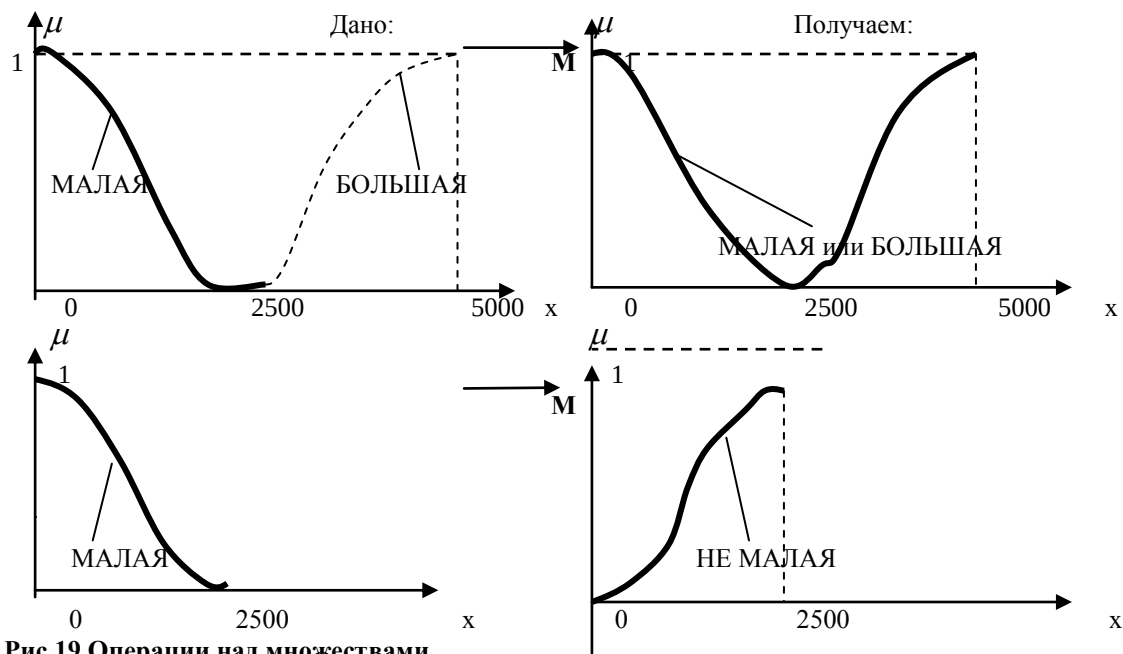


Рис.19 Операции над множествами

Учет лингвистических неопределенностей необходим в случае вычисления значения составного термина. Структуру составного (расширенного) термина можно определить как

$$T_i^* = h \cdot T_i,$$

где  $h$  - модификатор (лингвистическая неопределенность),  $T_i$  - термин базового терм-множества.

Например:  $h = \text{ОЧЕНЬ}$ ;  $T_i = \text{ВЫСОКИЙ}$ ;  $T_i^* = h \cdot T_i = \text{ОЧЕНЬ ВЫСОКИЙ}$ .

Лингвистическую неопределенность  $h$  можно понимать как оператор, переводящий нечеткое множество  $C_i^* = M(hT_i)$ , представляющее значение  $T_i^* = hT_i$ .

Таким образом, лингвистические неопределенности  $h$  выполняют функцию генерации большого множества значений для лингвистической переменной из небольшого набора первичных терминов

$$T = \{T_i\}.$$

Для определения лингвистической неопределенности  $h$  как оператора удобно использовать специальные операции над нечеткими множествами (концентрации, растяжения и т.д.). Так в повседневном использовании лингвистическая неопределенность **ОЧЕНЬ** действует как усилитель, генерируя подмножество того множества, к которому она применяется.

Специальная операция, имеющая такое свойство, это операция концентрации:

$$CON(A) = A^2.$$

В результате ее применения к множеству  $A$  уменьшается степень принадлежности элементов данному множеству, причем для элементов с высокой степенью принадлежности это уменьшение сравнительно мало, а для элементов с малой степенью принадлежности относительно велико.

Применительно к лингвистической неопределенности:

$$\text{ОЧЕНЬ } T_i = T_i^2$$

или более определенно

$$\text{ОЧЕНЬ } T_i = \int_x \mu_{T_i^2}(x) | x.$$

Например, если (рис.18)

$$C_i = (T_i) = \text{ВЫСОКАЯ } \text{СТОИМОСТЬ} = \int_{2500}^{5000} \left( 1 + \left( \frac{x - 2500}{250} \right)^{-2} \right)^{-1} | x, \text{ то}$$

$$C_i = (T_i) = hT_i = \text{ОЧЕНЬ } \text{ВЫСОКАЯ } \text{СТОИМОСТЬ} = \int_{2500}^{5000} \left( 1 + \left( \frac{x - 2500}{250} \right)^{-2} \right)^{-2} | x.$$

При этом степень принадлежности элемента, скажем,  $x = 3000$  к классу **ВЫСОКАЯ СТОИМОСТЬ** равна

$$\left( 1 + \left( \frac{3000 - 2500}{250} \right)^{-2} \right)^{-1} = 0,8$$

а степень принадлежности того же элемента к классу **ОЧЕНЬ ВЫСОКАЯ СТОИМОСТЬ** равна  $0,8^2 = 0,64$  (рис.20).

В то же время степени принадлежности элемента  $x = 4500$  к классам **ВЫСОКАЯ СТОИМОСТЬ** и **ОЧЕНЬ ВЫСОКАЯ СТОИМОСТЬ** отличаются незначительно (соответственно 0,98 и 0,96).

Рассматриваемый оператор может сочетаться с самим собой. Так,

$$\text{ОЧЕНЬ ОЧЕНЬ } T_i = (\text{ОЧЕНЬ } T_i)^2 = T_i^4.$$

В том же примере степень принадлежности  $x = 3000$  к классу **ОЧЕНЬ ВЫСОКАЯ СТОИМОСТЬ** составляет  $0,64^2 = 0,41$ .

Таким образом, семантика термов  $T_i^* \in T^*$ , задаваемая процедурой  $M(T_i) = C_i$ :

$$M(\text{ОЧЕНЬ } T_i) = C_i^2;$$

$$M(\text{ОЧЕНЬ ОЧЕНЬ } T_i) = C_i^4;$$

$$M(\text{НЕ ОЧЕНЬ } T_i) = (\bar{C}_i)^2.$$

При вычислении значения составного лингвистического термина, исключаяющего кроме лингвистической неопределенности  $h$  союзы (связки) И, ИЛИ, НЕ, используются обычные правила предшествования (очередности), действующие при преобразовании булевых формул:

| Предшествующие (очередность) | Операция |
|------------------------------|----------|
| 1                            | h, НЕ    |
| 2                            | И        |
| 3                            | ИЛИ      |

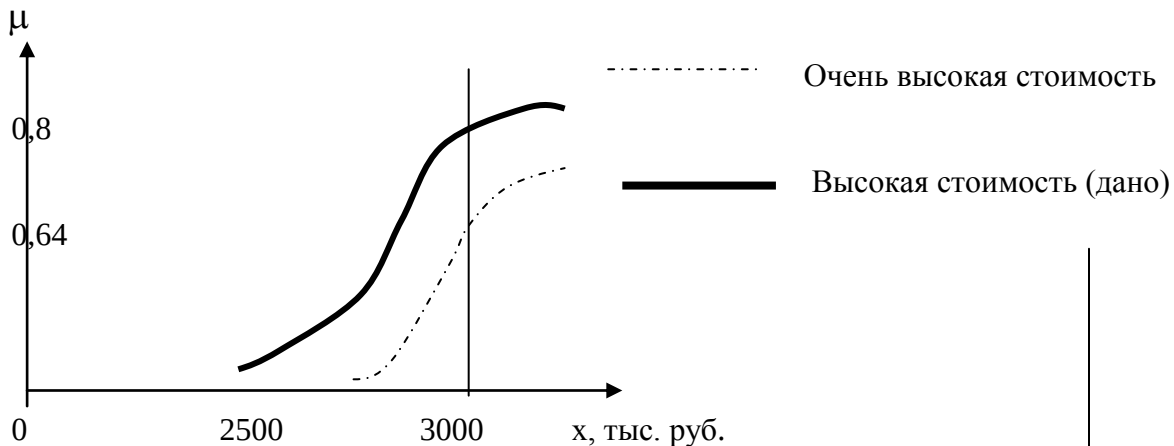


Рис.20 Классы ВЫСОКАЯ СТОИМОСТЬ и ОЧЕНЬ ВЫСОКАЯ СТОИМОСТЬ.

#### 2.4.2 Формирование базы правил систем нечеткого вывода

База правил систем нечеткого вывода предназначена для формального представления эмпирических знаний или знаний экспертов в той или иной проблемной области. В системах нечеткого вывода используются правила нечетких продукций, в которых условия и заключения сформулированы в терминах нечетких лингвистических высказываний. Совокупность таких правил называют базами правил нечетких продукций.

Простейший вариант правила нечеткой продукции, который наиболее часто встречается в системах нечеткого вывода, может быть записан в форме:

ПРАВИЛО #: ЕСЛИ " $\beta_1$  есть  $\alpha'$ ", ТО " $\beta_2$  есть  $\alpha$ ".

Здесь нечеткое высказывание " $\beta_1$  есть  $\alpha'$ " представляет собой условие данного правила нечеткой продукции, а нечеткое высказывание " $\beta_2$  есть  $\alpha$ " - нечеткое заключение данного правила.

База правил нечетких продукций – представляет собой конечное множество правил нечетких продукций, согласованных относительно используемых в них лингвистических переменных. Наиболее часто база правил представляется в форме структурированного текста:

ПРАВИЛО 1: ЕСЛИ «Условие 1» ТО «Заключение 1» ( $F_1$ )

ПРАВИЛО 2: ЕСЛИ «Условие 2» ТО «Заключение 2» ( $F_2$ )

...

## ПРАВИЛО $n$ : ЕСЛИ «Условие 1» ТО «Заключение $n$ » ( $F_n$ )

Здесь через  $F_i (i \in \{1, 2, \dots, n\})$  обозначены коэффициенты определенности или весовые коэффициенты соответствующих правил. Эти коэффициенты могут принимать значения из интервала  $[0, 1]$ . В случае, если эти весовые коэффициенты отсутствуют, удобно принять, что их значения равны 1.

В качестве условий и заключений правил могут использоваться только нечеткие лингвистические высказывания, при этом в каждом из нечетких высказываний должны быть определены функции принадлежности значений терм-множества для каждой из лингвистических переменных.

В системах нечеткого вывода лингвистические переменные, которые используются в нечетких высказываниях подусловий правил нечетких продукций, часто называют *входными лингвистическими переменными*, а переменные, которые используются в нечетких высказываниях подзаключений правил нечетких продукций, часто называют *выходными лингвистическими переменными*.

Лингвистическая переменная считается заданной или определенной, если для нее определено базовое терм-множество с соответствующими функциями принадлежности каждого терма, а также две процедуры G и M. Наиболее распространенным случаем является использование в качестве функций принадлежности термов треугольных или трапециевидных функций принадлежности, рассмотренных ниже.

### 2.4.3 Фазификация

Под *фазификацией* понимается не только отдельный этап выполнения нечеткого вывода, но и собственно процесс или процедура нахождения значений функций принадлежности нечетких множеств (термов) на основе обычных исходных данных.

Целью этапа фазификации является установление соответствия между конкретным (обычно численным) значением отдельной входной переменной системы нечеткого вывода и значением функции принадлежности соответствующего ей терма входной лингвистической переменной. После завершения этого этапа для всех выходных переменных должны быть определены конкретные значения функций принадлежности по каждому из лингвистических термов, которые используются в подусловиях базы правил системы нечеткого вывода.

До начала этапа фазификации предполагаются известными конкретные значения всех входных переменных системы нечеткого вывода.

Далее рассматривается каждое из подусловий вида « $\beta_i$  есть  $\alpha'$ » правил системы нечеткого вывода, где  $\alpha'$  - некоторый терм с известной функцией принадлежности  $\mu(x)$ . При этом значение  $a_i$  используется в качестве аргумента  $\mu(x)$ , тем самым находится количественное значение  $b'_i = \mu(a_i)$ . Это значение и является результатом фазификации подусловия « $\beta_i$  есть  $\alpha'$ ».

Этап фазификации считается законченным, когда будут найдены все значения  $b'_i = \mu(a_i)$  для каждого из подусловий всех правил, входящих в рассматриваемую базу правил системы нечеткого вывода. При этом если некоторый терм  $\alpha''$  лингвистической переменной  $\beta_i$  не присутствует ни в одном из нечетких высказываний, то соответствующее ему значение функции принадлежности не находится в процессе фазификации.

Фазификатор преобразует  $N$ -мерный входной вектор  $x$  в нечеткое множество  $A$ , характеризуемое функцией принадлежности  $\mu_A(x)$  с четкими переменными. Несмотря на то, что нечеткие системы могут иметь функции принадлежности произвольной структуры, с практической точки зрения наибольшей популярностью пользуются функции гауссовского типа, а также треугольные и трапециевидные функции.

Наиболее характерным примером кусочно-линейных функций принадлежности являются "треугольная" (рис.21а) и "трапецевидная" (рис.21б) функции принадлежности.

Первая из этих функций принадлежности в общем случае может быть задана аналитически следующим выражением:

$$f_{\Delta}(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & c \leq x \end{cases},$$

где  $a, b, c$  – некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением  $a \leq b \leq c$  (в нашем примере  $a = 2, b = 4, c = 7$ ).

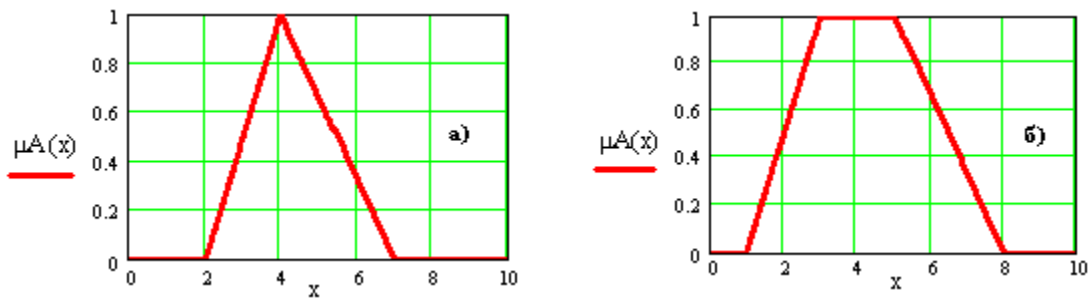


Рис.21 Графики функций принадлежности треугольной (а) и трапецевидной (б) формы

Трапецевидная функция принадлежности в общем случае может быть задана аналитически следующим выражением:

$$f_T(x, a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & d \leq x \end{cases},$$

где  $a, b, c, d$  – некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением  $a \leq b \leq c \leq d$  (в нашем примере  $a = 1, b = 3, c = 5, d = 8$ ).

Эти функции используются для задания таких свойств множеств, которые характеризуют неопределенность типа: "приблизительно равно", "среднее значение", "расположен в интервале", "подобен объекту", "похож на предмет" и др. Они также служат для представления нечетких чисел и интервалов.

К типу  $S$  – образных и одновременно  $Z$  – образных функций принадлежности может быть отнесена так называемая *сигмоидальная* функция (сигмоид), которая в общем случае задается аналитически следующим выражением:

$$f_s(x, a, b) = \frac{1}{1 + \exp[-a \cdot (x - b)]},$$

где  $a, b$  – некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и

упорядоченные отношением  $a \leq b$ , а  $\exp$  - основание натуральных логарифмов, которое инициирует задание соответствующей экспоненциальной функции. При этом в случае  $a > 0$  может быть получена  $S$  – образная функция, а в случае  $a < 0$  –  $Z$  – образная функция принадлежности.

Графики этой функции для некоторого нечеткого множества  $A$  и универсума  $X = [0,10]$  изображены на рис.22.



Рис.22 Графики сигмоидальной функции принадлежности для значений параметров  $a = 3, b = 6$  (а) и  $a = -3, b = 6$  (б) ( $b$  – точка перехода)

$S$  – образные функции принадлежности используются для представления таких нечетких множеств, которые характеризуются неопределенностью типа: "большое количество", "большое значение", "значительная величина", "высокий уровень доходов и цен", "высокая норма прибыли", "высокое качество услуг" и много других. Общим для всех таких ситуаций является высокая степень проявления того или иного качественного или количественного признака. Особенность нечеткого моделирования при этом заключается в представлении соответствующих нечетких множеств с помощью неубывающих (монотонно возрастающих) функций принадлежности. В качестве частных случаев  $Z$  – и  $S$  – образных кривых удобно рассматривать так называемую *линейную  $Z$  – образную* функцию (рис.23а) и *линейную  $S$  – образную* функцию (рис.23б).

Первая из этих функций в общем случае может быть задана аналитически следующим выражением:

$$f_{\downarrow}(x, a, b) = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ \frac{b-x}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & b \leq x \end{cases}$$

где  $a, b$  – некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением  $a < b$ .

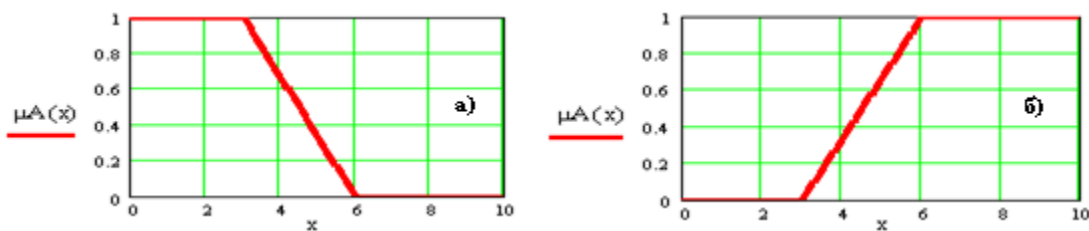


Рис.23 Графики линейной  $Z$  – образной функции (а) и линейной  $S$  – образной функции (б) принадлежности для значений параметров  $a = 3, b = 6$ .

Вторая из этих функций в общем случае может быть задана аналитически следующим выражением:

$$f_{\uparrow}(x, a, b) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b, \\ 1, & b \leq x \end{cases}$$

**Π-образные функции принадлежности.** К данному типу функций принадлежности можно отнести целый класс кривых, которые по своей форме напоминают колокол, сглаженную трапецию или букву "Π".



Функция этого типа может определяться как произведение двух сигмоидальных функций и в общем случае задается аналитическим выражением:

$$f_{\Pi}(x, a, b, c, d) = f_s(x, a, b) \cdot f_s(x, c, d),$$

где  $a, b, c, d$  – некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения, причем  $a > 0, c < 0$ , и упорядоченные отношением  $a \leq b \leq c \leq d$  (рис.24).

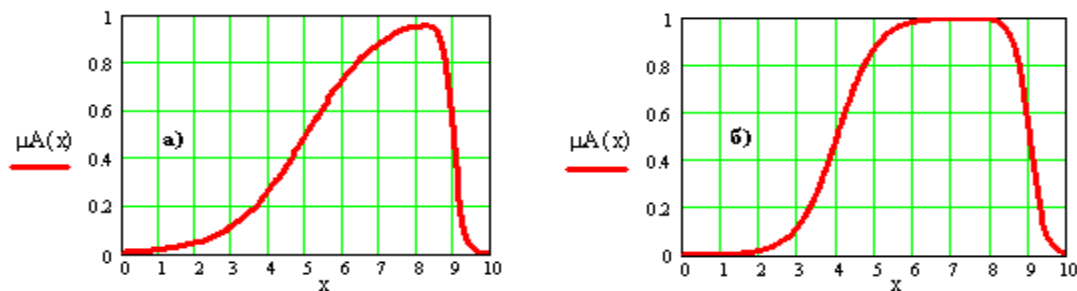


Рис.24 Графики П-образных функций принадлежности  $f_{\Pi}$  для значений параметров  $a=1, b=5, c=-7, d=9$  (а) и для значений  $a=2, b=4, c=-5, d=9$  (б)

К П-образным функциям относится также так называемая *колоколообразная* функция, которая в общем случае задается аналитически следующим выражением:

$$f_{\Pi}(x, a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-c}{a} \right|^{2b}},$$

где  $a, b, c$  – некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением  $a \leq b \leq c$ , причем параметр  $b > 0$  (рис.25а).

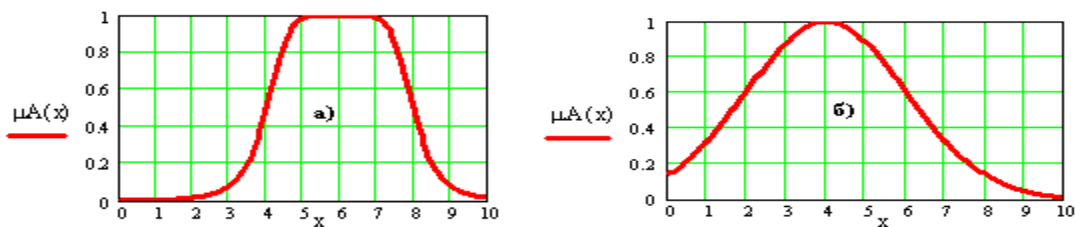


Рис.25 Графики П-образных функций принадлежности колоколообразная для значений  $a=2, b=3, c=6$  (а) и функция плотности нормального распределения для значений параметров  $\sigma=2, c=4$  (б).

И, наконец, последней из рассматриваемых функций данного типа является хорошо известная в теории вероятностей функция плотности нормального распределения (рис.25б) в предположении, что  $\sqrt{2\pi}\sigma=1$ , и которая задается следующим выражением:

$$f_{\Pi}(x, \sigma, c) = \exp \left[ -\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2} \right],$$

где  $\sigma, c$  – числовые параметры, при этом квадрат первого из них называется в теории вероятностей *дисперсией*, а второй параметр  $c$  – *математическим ожиданием*.

На рис.26. представлена форма типовых гауссовских функций при различных значениях параметров  $c$  и  $\sigma$ , причем на рис.26а показано влияние размещения центра  $c$  при неизменном значении  $\sigma$ , а на рис.26б - влияние значения  $\sigma$  при фиксированном  $c$ . Параметр  $c$  обозначает центр нечеткого множества, а его изменение соответствует смещению функции принадлежности по горизонтальной оси. Параметр  $\sigma$ , иногда называемый коэффициентом широты, отвечает за форму

функции. Чем меньше его значение, тем больше крутизна функции. Следует отметить, что при соответствующем смещении центра гауссовская функция может реализовать и сигмоидальную функцию (чаще всего при смещении вправо с  $c = 4$ ).

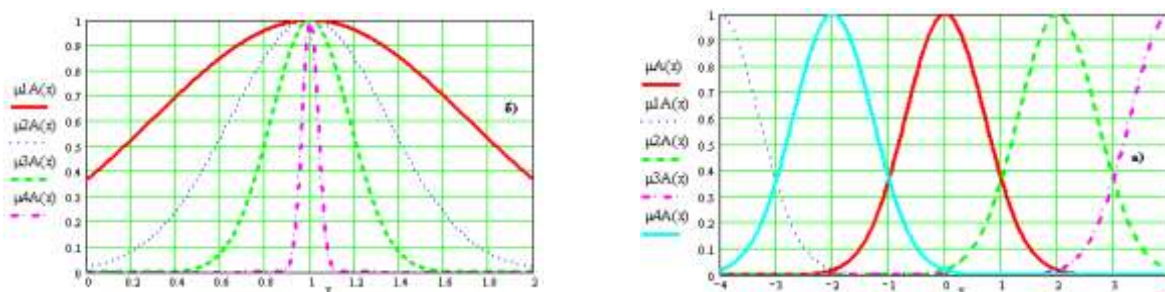


Рис.26 Иллюстрация влияния параметров гауссовской функции на ее форму:

а) влияние размещения центра  $c$  при  $\sigma = 1$  ( $c = -4, c = -2, c = 0, c = 2, c = 4$ ); б) влияние значения  $\sigma$  при постоянном  $c = 1$  ( $\sigma = 1, \sigma = 0,5, \sigma = 0,25, \sigma = 0,05$ ).

**Пример 6.** В качестве примера рассмотрим ситуацию со скоростью движения автомобильного транспорта в пределах городской черты. Хотя правила дорожного движения регламентируют величину этой скорости, однако многие автолюбители предпочитают давать собственную субъективную оценку своей скорости движения. При этом используются такие определения, как "малая скорость", "средняя скорость" и "высокая скорость" движения. Очевидно, что подобная практическая оценка скорости может относиться к диапазону скоростей в пределах интервала от 0 км/час до некоторой величины, определяемой личными предпочтениями того или иного водителя. Пусть в нашем примере из соображения удобства это будет величина 100 км/час.

Формализация субъективной оценки скорости движения может быть выполнена с помощью следующей лингвистической переменной  $\langle \beta_1, T, X, G, M \rangle$ , где  $\beta_1$  – скорость движения автомобиля;  $T = \{\text{"малая скорость", "средняя скорость", "высокая скорость"}\}$ ;  $X = [0, 100]$ ;  $G$  – процедура образования новых термов с помощью логических связок "И", "ИЛИ" и модификация типа "очень", "НЕ", "слегка" и др. Например: "малая или средняя скорость", "очень высокая скорость" и др.;  $M$  – процедура задания на  $X = [0, 100]$  нечетких переменных  $\alpha_1 = \text{"малая скорость"}$ ,  $\alpha_2 = \text{"средняя скорость"}$ ,  $\alpha_3 = \text{"высокая скорость"}$ , а также соответствующих нечетких множеств для термов из  $G(T)$  в соответствии с правилами трансляции нечетких связок и модификаторов "И", "ИЛИ", "НЕ", "очень", "слегка".

Для рассматриваемого примера нечеткие множества  $A_1, A_2, A_3$ , соответствующие нечетким переменным:  $\alpha_1 = \text{"малая скорость"}$ ,  $\alpha_2 = \text{"средняя скорость"}$ ,  $\alpha_3 = \text{"высокая скорость"}$ , удобно задать графически с помощью кусочно-линейных функций принадлежности. Один из возможных вариантов этих нечетких множеств изображен на рис.27.

Прокомментируем этап фазификации трех нечетких высказываний на этом примере. Им соответствуют нечеткие высказывания первого вида: " $\beta_1$  есть  $\alpha_1$ ", " $\beta_1$  есть  $\alpha_2$ ", " $\beta_1$  есть  $\alpha_3$ ". Предположим, что текущая скорость автомобиля равна 55 км/час, т.е.  $\alpha_1 = 55$  км/час.

Фазификация первого нечеткого высказывания дает в результате число 0, которое означает его степень истинности и получается подстановкой значения  $\alpha_1 = 55$  км/ч в качестве аргумента функции принадлежности терма  $\alpha_1$  (рис.27а). Фазификация второго нечеткого высказывания дает в результате число 0,67 (приближенное значение), которое означает его степень истинности и получается подстановкой значения  $\alpha_1 = 55$  км/ч в качестве аргумента функции принадлежности терма  $\alpha_2$  (рис.27б).

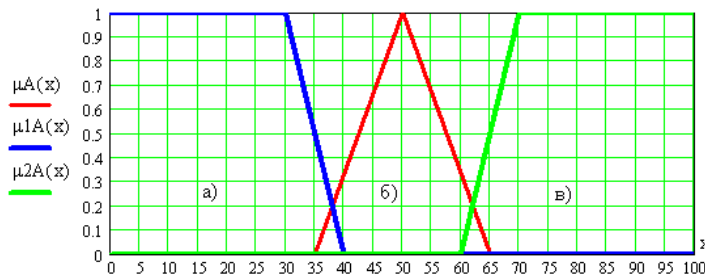


Рис.27 Графики функций принадлежности нечетких множеств  $A_1, A_2, A_3$  соответствующих нечетким переменным  $\alpha_1$  = "малая скорость" (а),  $\alpha_2$  = "средняя скорость" (б),  $\alpha_3$  = "высокая скорость" (в) для лингвистической переменной  $\beta_1$ .

Фазификация третьего нечеткого высказывания дает в результате число 0, которое означает его степень истинности и получается подстановкой значения  $\alpha_1 = 55 \text{ км/ч}$  в качестве аргумента функции принадлежности терма  $\alpha_3$  (рис.27в).

#### 2.4.4 Агрегирование

**Агрегирование** представляет собой процедуру определения степени истинности условий по каждому из правил системы нечеткого вывода.

Процедура агрегирования выполняется следующим образом. До начала этого этапа предполагаются известными значения истинности всех подусловий системы нечеткого вывода. Если условие правила представляет собой нечеткое высказывание вида 1 или 2, то степень его истинности равна соответствующему значению  $b_i$ .

Если же условие состоит из нескольких подусловий вида:

ПРАВИЛО <#>: ЕСЛИ " $\beta_1$  есть  $\alpha$ " И " $\beta_2$  есть  $\alpha$ " ТО " $\beta_3$  есть  $\nu$ " или

ПРАВИЛО <#>: ЕСЛИ " $\beta_1$  есть  $\alpha$ " ИЛИ " $\beta_2$  есть  $\alpha$ " ТО " $\beta_3$  есть  $\nu$ ",

причем лингвистические переменные в подусловиях попарно неравны друг другу, то определяется степень истинности сложного высказывания на основе известных значений истинности подусловий. При этом для определения результата нечеткой конъюнкции или связки «И» может быть использована одна из формул:

логическая конъюнкция:

$$T(A \wedge B) = \min\{T(a), T(b)\}$$

алгебраическое произведение степеней истинности нечетких высказываний:

$$T(A \wedge B) = T(a) \cdot T(b)$$

граничное произведение степеней истинности нечетких высказываний:

$$T(A \wedge B) = \max\{T(a) + T(b) - 1, 0\}$$

драстическое произведение степеней истинности нечетких высказываний:

$$T(A \wedge B) = \begin{cases} T(B), & \text{если } T(A) = 1; \\ T(A), & \text{если } T(B) = 1; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для определения результата нечеткой дизъюнкции или связки «ИЛИ» может быть использована одна из формул:

логическая дизъюнкция:

$$T(A \vee B) = \max\{T(a), T(b)\}$$

алгебраическое сумма степеней истинности нечетких высказываний:

$$T(A \vee B) = T(a) + T(b) - T(A) \cdot T(B)$$

границная сумма степеней истинности нечетких высказываний:

$$T(A \vee B) = \min \{T(a) + T(b), 1\}$$

драстическая сумма степеней истинности нечетких высказываний:

$$T(A \vee B) = \begin{cases} T(B), & \text{если } T(A) = 0; \\ T(A), & \text{если } T(B) = 0; \\ 1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

При этом значения  $b_i'$  используются в качестве аргументов соответствующих логических операций. Тем самым находятся количественные значения истинности всех условий правил системы нечеткого вывода.

Этап агрегирования считается законченным, когда будут найдены все значения  $b_k''$  для каждого из правил, входящих в рассматриваемую базу правил Р системы нечеткого вывода.

#### 2.4.5 Активация

**Активация** в системах нечеткого вывода представляет собой процедуру или процесс нахождения степени истинности каждого из подзаключений правил нечетких продукций. При формировании базы правил системы нечеткого вывода задаются весовые коэффициенты  $F_i$  для каждого правила (по умолчанию предполагается, если весовой коэффициент не задан явно, то его значение равно 1).

Формально процедура активации выполняется следующим образом. До начала этого этапа предполагаются известными значения истинности всех условий системы нечеткого вывода, т.е. множество значений  $B'' = \{b_1'', b_2'', \dots, b_n''\}$  и значения весовых коэффициентов  $F_i$  для каждого правила. Далее рассматривается каждое из заключений правил системы нечеткого вывода. Если заключение правила представляет собой нечеткое высказывание вида 1 или 2, то степень его истинности равна алгебраическому произведению соответствующего коэффициента  $b_1''$  на весовой коэффициент  $F_i$ .

Если же заключение состоит из нескольких подзаключений вида

ПРАВИЛО <#>: ЕСЛИ " $\beta_1$  есть  $\alpha'$ " И " $\beta_2$  есть  $\alpha''$ " ТО " $\beta_3$  есть  $\nu$ " или

ПРАВИЛО <#>: ЕСЛИ " $\beta_1$  есть  $\alpha'$ " ИЛИ " $\beta_2$  есть  $\alpha''$ " ТО " $\beta_3$  есть  $\nu$ ", причем лингвистические переменные в подзаключениях попарно не равны друг другу, то степень истинности каждого из них равна алгебраическому произведению соответствующего значения  $b_1''$  на весовой коэффициент  $F_i$ . Таким образом, находятся все значения степеней истинности подзаключений для каждого из правил, входящих в рассматриваемую базу правил системы нечеткого вывода. Это множество значений обозначим через  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_q\}$ , где  $q$  – общее количество подзаключений в базе правил.

После нахождения множества  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_q\}$  определяются функции принадлежности каждого из подзаключений для рассматриваемых выходных лингвистических переменных. Для этой цели можно использовать один из методов, являющихся модификацией того или иного метода нечеткой композиции:

*min – активизация* :  $\mu'(y) = \min\{c_i, \mu(y)\};$

*prod – активизация* :  $\mu'(y) = c_i \cdot \mu(y);$

*average – активизация* :  $\mu'(y) = 0.5 \cdot (c_i + \mu(y)),$

где  $\mu(y)$ - функция принадлежности терма, который является значением некоторой выходной переменной, заданной на универсуме  $Y$ .

Этап активизации считается законченным, когда для каждой из выходных лингвистических переменных, входящих в отдельные подзаключения правил нечетких продукций, будут определены функции принадлежности нечетких множеств их значений, т.е. совокупность нечетких множеств:  $c_1, c_2, \dots, c_q$ , где  $q$  – общее количество подзаключений в базе правил.

#### 2.4.6 Аккумуляция

**Аккумуляция** или аккумулялирование в системах нечеткого вывода представляет собой процедуру или процесс нахождения функции принадлежности для каждой из выходных лингвистических переменных множества  $W = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s\}$ .

Цель аккумуляции заключается в том, чтобы объединить или аккумулялировать все степени истинности заключений (подзакключений) для получения функции принадлежности каждой из выходных переменных. Причина необходимости выполнения этого этапа состоит в том, что подзакключения, относящиеся к одной и той же выходной лингвистической переменной, принадлежат различным правилам системы нечеткого вывода.

Формально процедура аккумуляции выполняется следующим образом. До начала этого этапа предполагаются известными значения истинности всех подзакключений для каждого из правил  $R_k$ , входящих в рассматриваемую базу правил системы нечеткого вывода, в форме совокупности нечетких множеств:  $c_1, c_2, \dots, c_q$ , где  $q$  – общее количество подзакключений в базе правил. Затем последовательно рассматривается каждая из выходных лингвистических переменных и относящиеся к ней нечеткие множества. Результат аккумуляции для выходной лингвистической переменной определяется как объединение нечетких множеств по одной из формул: объединения нечетких множеств, алгебраическое объединение нечетких множеств, граничное объединение нечетких множеств, драстическое объединение нечетких множеств.

Этап аккумуляции считается законченным, когда для каждой из выходных лингвистических переменных будут определены итоговые функции принадлежности нечетких множеств их значений.

#### 2.4.7 Дефазификация

**Дефазификация** в системах нечеткого вывода представляет собой процедуру или процесс нахождения обычного значения для каждой из выходных лингвистических переменных.

Цель дефазификации заключается в том, чтобы, используя результаты аккумуляции всех выходных лингвистических переменных, получить обычное количественное значение каждой из выходных переменных, которое может быть использовано специальными устройствами, внешними по отношению к системе нечеткого вывода.

Формально процедура дефазификации выполняется следующим образом. До начала этого этапа предполагаются известными функции принадлежности всех выходных лингвистических переменных в форме нечетких множеств:  $C'_1, C'_2, \dots, C'_s$ , где  $s$  – общее количество выходных лингвистических переменных в базе правил системы нечеткого вывода. Результат дефазификации для выходной лингвистической переменной определяется в виде количественное значения, получаемого по одной из рассматриваемых ниже формул.

Этап дефазификации считается законченным, когда для каждой из выходных лингвистических

переменных будут определены итоговые количественные значения в форме некоторого действительного числа, т.е. в виде  $y_1, y_2, \dots, y_s$ .

Для выполнения численных расчетов на этапе дефазификации могут быть использованы следующие формулы, получившие названия *методов дефазификации*.

**Метод центра тяжести**

Центр тяжести или центроид площади рассчитывается по формуле:

$$y = \frac{\int_{Min}^{Max} x \cdot \mu(x) dx}{\int_{Min}^{Max} \mu(x) dx},$$

где  $y$  – результат дефазификации;  $x$  – переменная, соответствующая выходной лингвистической переменной;  $\mu(x)$  – функция принадлежности нечеткого множества, соответствующего выходной переменной после этапа аккумуляции;  $Min$  и  $Max$  – левая и правая точки интервала носителя нечеткого множества рассматриваемой выходной переменной.

При дефазификации методом центра тяжести обычное значение выходной переменной равно абсциссе центра тяжести площади, ограниченной графиком кривой функции принадлежности соответствующей выходной переменной.

**Метод центра тяжести для одноточечных множеств**

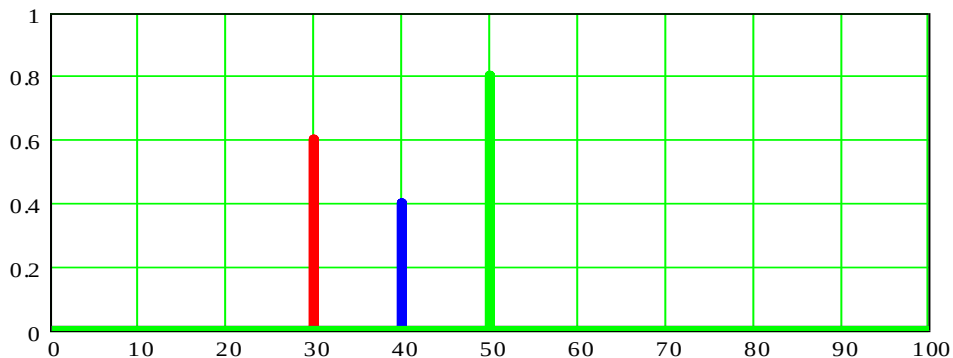
Центр тяжести для одноточечных множеств рассчитывается по формуле:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \mu(x_i)}{\sum_{i=1}^n \mu(x_i)},$$

где  $n$  – число одноточечных (одноэлементных) нечетких множеств, каждая из которых характеризует единственное значение рассматриваемой выходной лингвистической переменной.

Пример дефазификации методом центра тяжести для одноточечных множеств функции принадлежности выходной лингвистической переменной «скорость движения автомобиля» показан на рис.28. В этом случае  $y_1 = 41 \text{ км/ч}$  (приближенное значение):

$$y_1 = \frac{30 \cdot 0,6 + 40 \cdot 0,4 + 50 \cdot 0,8}{0,6 + 0,4 + 0,8}.$$



**Рис.28** Пример дефазификации выходной лингвистической переменной «скорость движения автомобиля» методом центра тяжести для одноточечных множеств

### Метод центра площади

Центр площади равен  $y = u$ , где значение  $u$  определяется из уравнения:

$$\int_{Min}^u \mu(x) dx = \int_u^{Max} \mu(x) dx$$

Центр площади равен абсциссе, которая делит площадь, ограниченную графиком кривой функции принадлежности соответствующей выходной переменной, на две равные части.

### 3 ОСНОВНЫЕ АЛГОРИТМЫ НЕЧЕТКОГО ВЫВОДА

Пусть некоторая система описывается следующими нечеткими правилами:

П<sub>1</sub>: если  $x$  есть  $A$ , тогда  $\omega$  есть  $D$ ;

П<sub>2</sub>: если  $y$  есть  $B$ , тогда  $\omega$  есть  $E$ ,

П<sub>3</sub>: если  $z$  есть  $C$ , тогда  $\omega$  есть  $F$ ,

где  $x$ ,  $y$  и  $z$  – имена входных переменных;  $\omega$  – имя переменной вывода;  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  - некоторые заданные значения ФП треугольной формы.

Процедура получения логического вывода иллюстрируется рис.28.

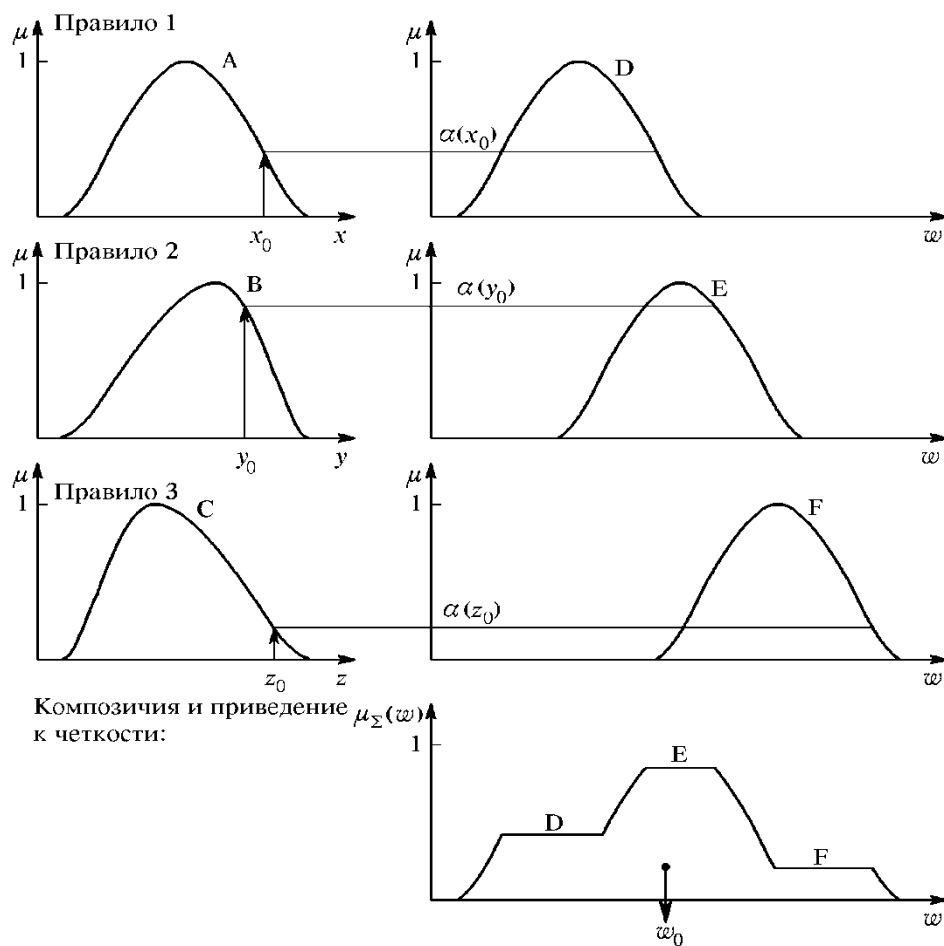


Рис.28 Иллюстрация к процедуре логического вывода

Предполагается, что входные переменные приняли некоторые конкретные (четкие) значения -  $x_0, y_0$  и  $z_0$ . В соответствии с приведенными выше этапами, на первом этапе для данных значений и исходя их функций принадлежности  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , находятся степени истинности  $\alpha(x_0), \alpha(y_0), \alpha(z_0)$  для

предпосылок каждого из трех приведенных правил (см. рис.28а).

На этапе 2 происходит «отсекание» функций принадлежности заключений правил (т.е.  $D, E, F$ ) на уровнях  $\alpha(x_0), \alpha(y_0), \alpha(z_0)$ .

На третьем этапе рассматриваются усеченные на втором этапе функции принадлежности и производится их объединение с использованием операции **max**, в результате чего получается комбинированное нечеткое подмножество, описываемое функцией принадлежности  $\mu_{\Sigma}(\omega)$  и соответствующая логическому выводу для выходной переменной  $\omega$ .

На 4-м этапе – при необходимости – находится четкое значение выходной переменной, например, с применением центроидного метода: четкое значение выходной переменной определяется как центр тяжести для кривой  $\mu_{\Sigma}(\omega)$ , т.е.

$$\omega_0 = \frac{\int_{\Omega} \omega \mu_{\Sigma}(\omega) d\omega}{\int_{\Omega} \mu_{\Sigma}(\omega) d\omega}.$$

Рассмотрим следующие наиболее часто используемые **модификации алгоритма нечеткого вывода**, полагая, что базу правил образуют два нечетких правила вида:

П<sub>1</sub>: если  $x$  есть  $A_1$  и  $y$  есть  $B_1$ , тогда  $z$  есть  $C_1$ ;

П<sub>2</sub>: если  $x$  есть  $A_2$  и  $y$  есть  $B_2$ , тогда  $z$  есть  $C_2$ ,

где  $x$  и  $y$  – имена входных переменных;  $z$  – имя переменной вывода;  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  – некоторые заданные значения ФП, при этом четкое значение  $z_0$  необходимо определить на основе приведенной информации и четких значений  $x_0$  и  $y_0$ .

Выбор конкретных вариантов параметров каждого из этапов определяет некоторый алгоритм, который в полном объеме реализует нечеткий вывод в системах правил нечетких продукций. К настоящему времени предложено несколько алгоритмов нечеткого вывода.

#### **Алгоритм Мамдани (Mamdani)**

Алгоритм Мамдани является одним из первых, который нашел применение в системах нечеткого вывода. Данный алгоритм математически может быть описан следующим образом.

1. Нечеткость (ФП, определенные на входных переменных, применяются к их фактическим значениям для определения степени истинности): находятся степени истинности для предпосылок каждого правила  $A_1(x_0), A_2(x_0), B_1(y_0), B_2(y_0)$ .

2. Нечеткий вывод: находятся уровни «отсечения» для предпосылок каждого из правил с использованием операции «min»

$$\alpha_1 = A_1(x_0) \wedge B_1(y_0);$$

$$\alpha_2 = A_2(x_0) \wedge B_2(y_0),$$

После чего находятся «усеченные» функции принадлежности:

$$C'_1(z) = (\alpha_1 \wedge C_1(z));$$

$$C'_2(z) = (\alpha_2 \wedge C_2(z))$$

3. Композиция - выходы всех правил вычисляются отдельно, но в правой части нескольких из них может быть указана одна и та же переменная; нечеткие подмножества, назначенные для каждой



переменной вывода, объединяются вместе для формирования одного нечеткого подмножества. Производится объединение найденных усеченных функций с использованием операции «тах», что приводит к получению итогового нечеткого подмножества для переменной выхода с ФП вида:

$$\mu_{\Sigma}(z) = C(z) = C_1'(z) \vee C_2'(z) = (\alpha_1 \wedge C_1(z)) \vee (\alpha_2 \wedge C_2(z)).$$

4. Приведение к четкости для нахождения  $z_0$  определяется методом центра тяжести.

#### Алгоритм Цукамото

Исходные посылки те же, как и у предыдущего алгоритма, но функции  $C_1(z), C_2(z)$  являются монотонными.

1. Первый этап – такой же, как в алгоритме Мамдани.

2. На втором этапе определяются уровни отсечения, а затем посредством решения уравнений  $\alpha_1 = C_1(z_1)$ ,  $\alpha_2 = C_2(z_2)$  находят четкие значения  $z_1, z_2$  для каждого из исходных правил.

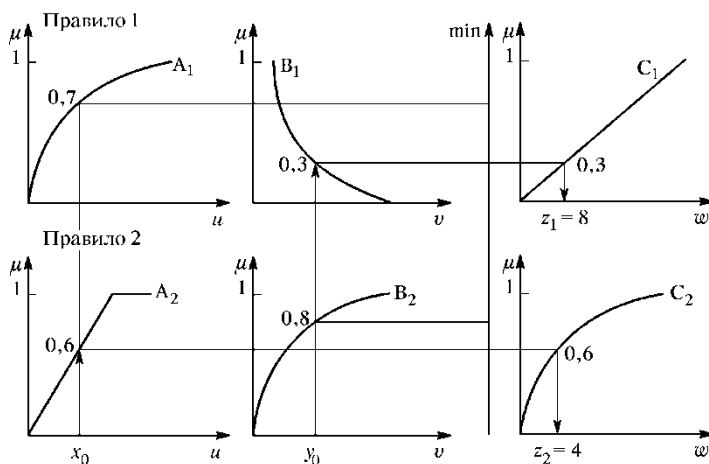
3. Определяют четкое значение переменной вывода как взвешенное среднее  $z_1, z_2$ :

$$z_0 = \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2}{\alpha_1 + \alpha_2};$$

в общем случае (дискретный вариант центроидного метода)

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$$

**Пример.** Пусть имеем  $A_1(x_0)=0,7$ ,  $A_2(x_0)=0,6$ ,  $B_1(y_0)=0,3$ ,  $B_2(y_0)=0,8$ , соответствующие уровни отсечения



$\alpha_1 = \min(A_1(x_0), B_1(y_0)) = \min(0,7;0,3) = 0,3$ ,  
 $\alpha_2 = \min(A_2(x_0), B_2(y_0)) = \min(0,6;0,8) = 0,6$   
 и значения  $z_1 = 8$  и  $z_2 = 4$ , найденные в результате решения уравнений

$$C_1(z_1) = 0,3, \quad C_2(z_2) = 0,6.$$

При этом четкое значение переменной вывода (см. рис.28б )

$$z_0 = (8 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,6) / (0,3 + 0,6) = 6.$$

Рис.28б Иллюстрация к алгоритму Цукамото

#### Алгоритм Сугено

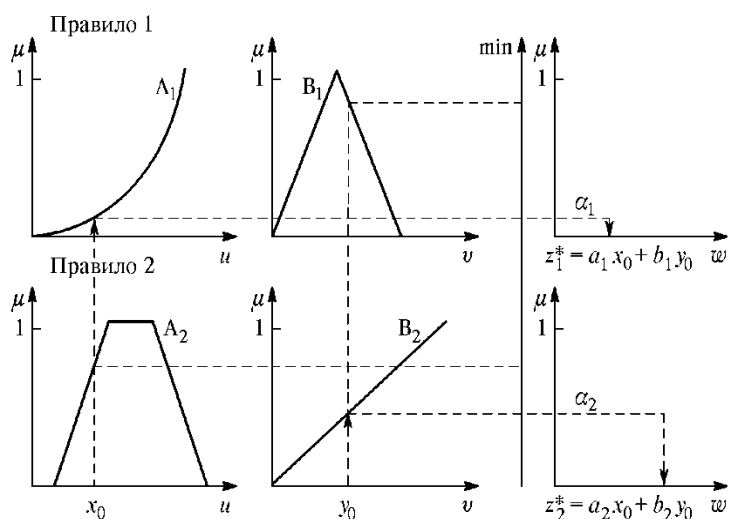
В этом алгоритме использован набор правил в следующей форме:

П<sub>1</sub>: если  $x$  есть  $A_1$  и  $y$  есть  $B_1$ , тогда  $z = a_1 x + b_1 y$ ;

П<sub>2</sub>: если  $x$  есть  $A_2$  и  $y$  есть  $B_2$ , тогда  $z = a_2 x + b_2 y$ .

1. Первый этап - такой же, как в алгоритме Мамдани.

2. На втором этапе определяются значения



$$\alpha_1 = A_1(x_0) \wedge B_1(y_0);$$

$$\alpha_2 = A_2(x_0) \wedge B_2(y_0)$$

и индивидуальные выходы правил

$$z_1^* = a_1 x_0 + b_1 y_0;$$

$$z_2^* = a_2 x_0 + b_2 y_0.$$

3. На третьем этапе рассчитывается четкое значение переменной:

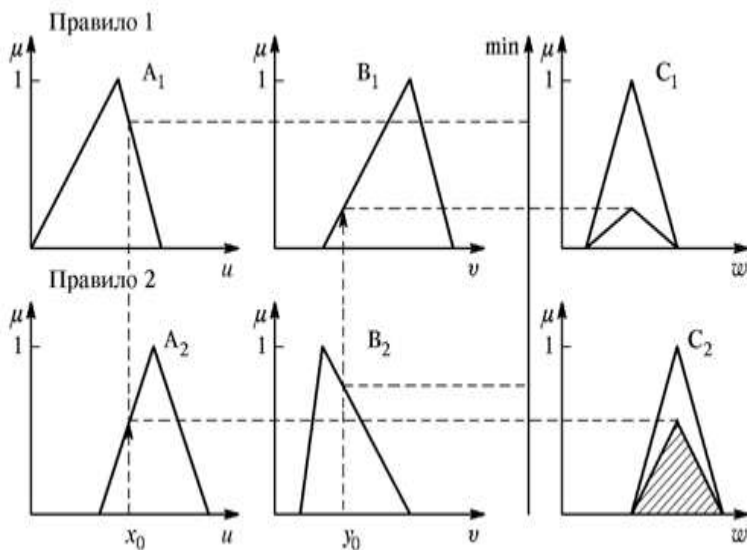
$$z_0 = \frac{\alpha_1 z_1^* + \alpha_2 z_2^*}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

Иллюстрация алгоритма на рис.28в.

Рис.28в Иллюстрация к алгоритму Сугено

### Алгоритм Ларсена

1. Первый этап - такой же, как в алгоритме Мамдани.
2. На втором этапе определяются значения



$$\alpha_1 = A_1(x_0) \wedge B_1(y_0);$$

$$\alpha_2 = A_2(x_0) \wedge B_2(y_0),$$

а затем частные нечеткие подмножества  $\alpha_1 C_1(z), \alpha_2 C_2(z)$ .

3. Находят итоговое нечеткое подмножество с ФП вида:

$$\mu_{\Sigma}(z) = C(z) = \alpha_1 C_1(z) \vee \alpha_2 C_2(z).$$

4. Приведение к четкости, как и в предыдущих случаях.

Алгоритм Ларсена иллюстрируется на рис.28г.

Рис.28г Иллюстрация к алгоритму Ларсена

### Упрощенный алгоритм нечеткого вывода

В этом алгоритме использован набор правил в следующей форме:

$$П_1: \text{если } x \text{ есть } A_1 \text{ и } y \text{ есть } B_1, \text{ тогда } z = \tilde{N}_1;$$

$$П_2: \text{если } x \text{ есть } A_2 \text{ и } y \text{ есть } B_2, \text{ тогда } z = \tilde{N}_2,$$

$\tilde{N}_1, \tilde{N}_2$  — некие четкие числа.

1. Первый этап - такой же, как в алгоритме Мамдани.

1. На втором этапе определяются значения

$$\alpha_1 = A_1(x_0) \wedge B_1(y_0);$$

$$\alpha_2 = A_2(x_0) \wedge B_2(y_0),$$

3. Определяют четкое значение переменной вывода как взвешенное среднее:

$$Z_0 = \frac{\alpha_1 \tilde{N}_1 + \alpha_2 \tilde{N}_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

Иллюстрация алгоритма приведена на рис.28д.

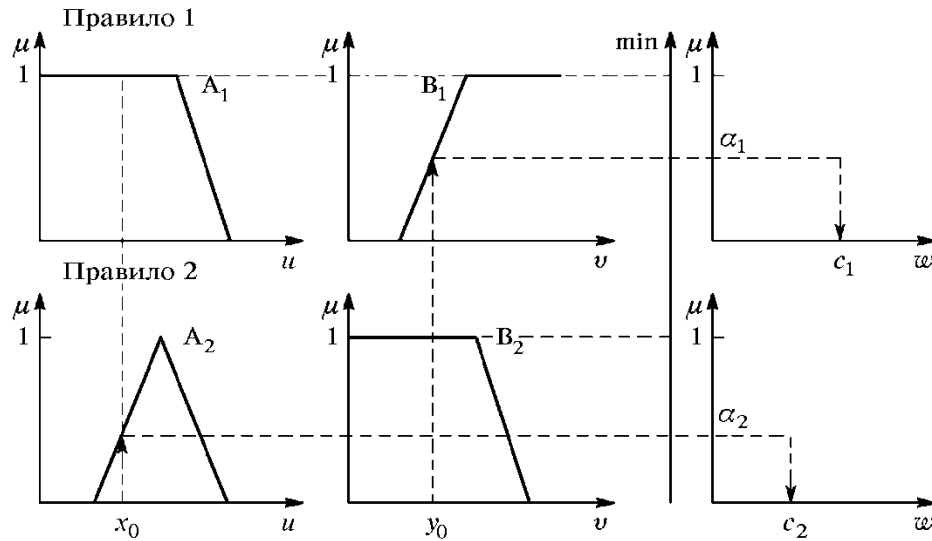
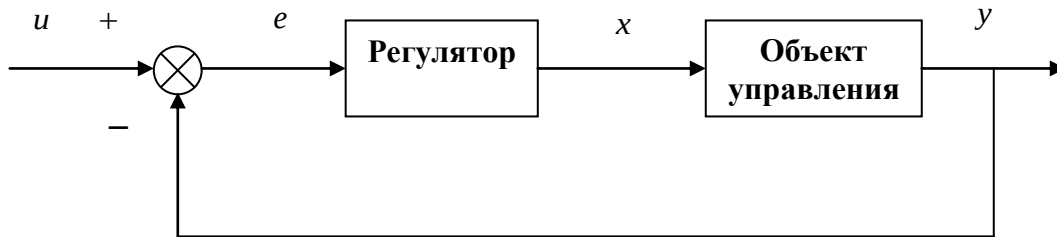


Рис.28д Иллюстрация упрощенного алгоритма нечеткого вывода

#### Пример нечеткого регулятора

Рассмотрим пример использования аппарата нечеткой логики в задаче управления замкнутой системы регулирования ( $u$ ,  $y$ ,  $e$ ,  $x$  – соответственно, поступающий на вход регулятора, и выходной сигнал регулятора):



В рассматриваемой системе регулятор вырабатывает управляющий сигнал  $x$  в соответствии с выбранным алгоритмом регулирования, например, пропорционально сигналу ошибки, либо ее интегралу и т.п. Покажем, что для выработки такого сигнала применимы методы аппарата нечеткой логики.

Предположим, что функции регулятора выполняет микроконтроллер, при этом аналоговый сигнал  $e$  ограничен диапазоном  $[-1,1]$  и преобразует в цифровую форму аналогово-цифровым преобразователем с дискретностью 0,25, а выходной сигнал регулятора  $x$  формируется с помощью цифроаналогового преобразователя и имеет всего 5 уровней: -1, -0,5, 0, 0,5, 1.

Принимая во внимание данные уровни, введем лингвистические переменные:

$A_1$ : большой положительный,

$A_2$  :малый положительный,

$A_3$  :нулевой,

$A_4$  :малый отрицательный,

$A_5$  :большой отрицательный,

и на дискретном множестве возможных значений сигнала рассогласования  $e$  и  $\Delta e$  определим функции принадлежности так, как это приведено в табл.1.

Предположим, далее что функционирование регулятора определяется следующими правилами:

$\Pi_1$ : если  $e = A_3$  и  $\Delta e = A_3$ , то  $x = 0$ ,

$\Pi_2$ : если  $e = A_2$  и  $\Delta e = A_2$ , то  $x = 0,5$ ,

$\Pi_3$ : если  $e = A_4$  и  $\Delta e = A_4$ , то  $x = 1$ ,

$\Pi_4$ : если  $e = A_1$  и  $\Delta e = A_1$ , то  $x = -1$ ,

где  $\Delta e$  — первая разность сигнала ошибки в текущий дискретный момент времени.

**Таблица 1. Значения функции принадлежности**

|          | -1  | -0,75 | -0,5 | -0,25 | 0   | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1   |
|----------|-----|-------|------|-------|-----|------|-----|------|-----|
| $A_1(e)$ | 0   | 0     | 0    | 0     | 0   | 0    | 0,3 | 0,7  | 1   |
| $A_2(e)$ | 0   | 0     | 0    | 0     | 0,3 | 0,7  | 1   | 0,7  | 0,3 |
| $A_3(e)$ | 0   | 0     | 0,3  | 0,7   | 1   | 0,7  | 0,3 | 0    | 0   |
| $A_4(e)$ | 0,3 | 0,7   | 1    | 0,7   | 0,3 | 0    | 0   | 0    | 0   |
| $A_5(e)$ | 1   | 0,7   | 0,3  | 0     | 0   | 0    | 0   | 0    | 0   |

Отметим, что набор правил может быть, и каким-то другим. Если, например, используется упрощенный алгоритм нечеткого вывода, то при значениях, скажем  $e = 0,25$  и  $\Delta e = 0,5$  имеем:

$$\alpha_1 = \min(0,7; 0,3) = 0,3u \quad x_1 = 0,$$

$$\alpha_2 = \min(0,7; 1) = 0,7u \quad x_2 = -0,5,$$

$$\alpha_3 = \min(0; 0) = 0u \quad x_3 = 1,$$

$$\alpha_4 = \min(0; 0,3) = 0,3u \quad x_4 = -1,$$

и выход регулятора

$$x = \frac{0,3 \cdot 0 + 0,7 \cdot (-0,5) + 0 \cdot 1 + 0,3 \cdot (-1)}{0,3 + 0,7 + 0 + 0,3} = \frac{-0,65}{1,3} = -0,5.$$

Аналогичным образом значения выходного сигнала регулятора рассчитываются при других значениях  $e$  и  $\Delta e$ .

Отметим, что при проектировании подобных регуляторов основным этапом является задание набора нечетких правил. Другие аспекты: выбор формы функций принадлежности, алгоритма приведения к четкости.

## 4 ПОСТРОЕНИЕ НЕЧЕТКИХ МОДЕЛЕЙ В СРЕДЕ MATLAB FUZZY LOGIC TOOLBOX

### 4.1 Назначение и возможности пакета Fuzzy Logic Toolbox

Пакет Fuzzy Logic Toolbox (пакет нечеткой логики) — это совокупность прикладных программ, относящихся к теории *размытых* или *нечетких* множеств и позволяющих конструировать так называемые нечеткие экспертные и/или управляющие системы.

Основные возможности пакета:

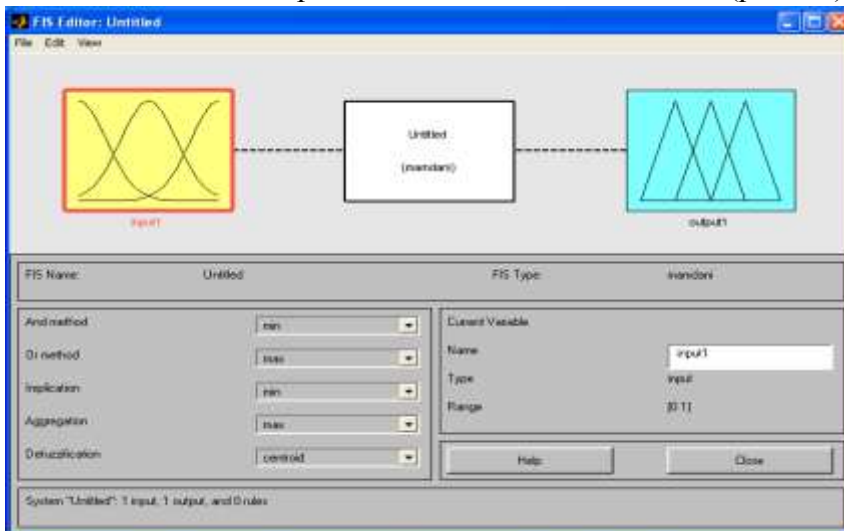
- построение систем нечеткого вывода (экспертных систем, регуляторов, аппроксиматоров зависимостей);
- построение адаптивных нечетких систем (гибридных нейронных сетей);
- интерактивное динамическое моделирование в Simulink.
- Пакет позволяет работу:
  - в режиме графического интерфейса;
  - в режиме командной строки;
  - с использованием блоков и примеров пакета Simulink.

### 4.2 Графический интерфейс Fuzzy Logic Toolbox

**Состав графического интерфейса.** В состав программных средств Fuzzy Logic Toolbox входят следующие основные программы, позволяющие работать в режиме графического интерфейса: редактор нечеткой системы вывода Fuzzy Inference System Editor (FIS Editor или FIS-редактор) вместе со вспомогательными программами — редактором функций принадлежности (Membership Function Editor), редактором правил (Rule Editor), просмотрщиком правил (Rule Viewer) и просмотрщиком поверхности отклика (Surface Viewer); редактор гибридных систем (ANFIS Editor, ANFIS-редактор);

Для разработки и дальнейшего применения систем нечеткого вывода могут быть использованы следующие графические средства, входящие в состав пакета **Fuzzy Logic Toolbox**.

- Редактор систем нечеткого вывода FIS (рис. 29).



- Редактор функций принадлежности систем нечеткого вывода (рис. 30 - 32).

- Редактор правил систем нечеткого вывода (рис. 33).

- Редактор просмотра правил систем нечеткого вывода (рис. 34).

- Программа просмотра поверхности системы нечеткого вывода (рис. 35, 39).

Рис.29 Графический интерфейс редактора FIS, вызываемый функцией fuzzy

**Пример 8. Построение нечеткой аппроксимирующей системы.** Командой (функцией) **Fuzzy** из режима командной строки запускается основная интерфейсная программа пакета Fuzzy Logic — редактор нечеткой системы вывода (Fuzzy Inference System Editor, Fis Editor, Fis-редактор). Вид окна

при этом показан на рис.29.

Главное меню редактора содержит позиции:

File — работа с файлами моделей (их создание, сохранение, считывание и печать); Edit — операции редактирования (добавление и исключение входных и выходных переменных); View — переход к дополнительному инструментарию.

Сконструируем нечеткую систему, отображающую зависимость между переменными X и Y, заданную таблично.

Таблица. Значения X и y

|   |    |      |     |      |   |
|---|----|------|-----|------|---|
| X | 1  | 0,6  | 0,0 | 0,4  | 1 |
| Y | -1 | 0,36 | 0,0 | 0,16 | 1 |

Представленные в таблице данные отражают зависимость  $y = x^2$ .

Требуемые действия отобразим следующими пунктами.

1. В позиции меню File выбираем опцию New Sugeno FIS (новая система типа Sugeno), при этом в блоке, отображаемом белым квадратом, в верхней части окна редактора появится надпись Untitled2 (sugeno).

2. Щелчком левой кнопкой мыши по блоку, озаглавленному input1 (входы). Затем в правой части редактора в поле, озаглавленном Name (Имя), вместо input1 введем обозначение нашего аргумента, т.е. x. Обратим внимание, что если теперь сделать где-нибудь (вне блоков редактора) однократный щелчок мыши, то имя отмеченного блока изменится на ж; то же достигается нажатием после ввода клавиши Enter.

3. Дважды щелкнем по этому блоку. Перед нами откроется окно редактора функций принадлежности — Membership Function Editor (рис.30). Войдем в позицию меню Edit данного редактора и выберем в нем опцию Add MFs (Add Membership Functions — добавить функции принадлежности). При этом появится диалоговое окно (рис.31), позволяющее задать тип (MF type) и количество (Number of MFs) функций принадлежности (в данном случае все относится к входному сигналу, т. е. к переменной x). Выберем гауссовы функции принадлежности (gaussmf), а их количество зададим равным пяти — по числу значений аргумента в табл.. Подтвердим ввод информации нажатием кнопки OK, после чего произойдет возврат к окну редактора функций принадлежности.

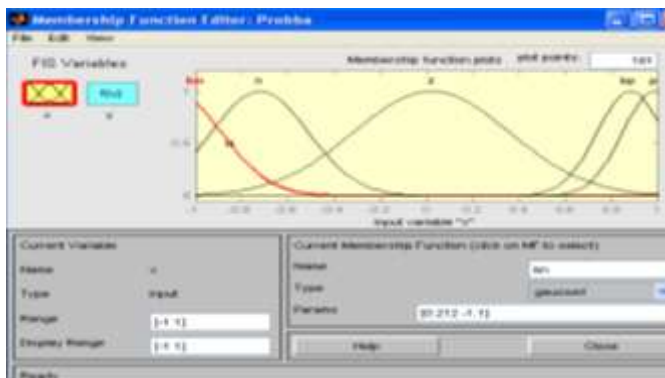


Рис.30 Окно редактора функций принадлежности

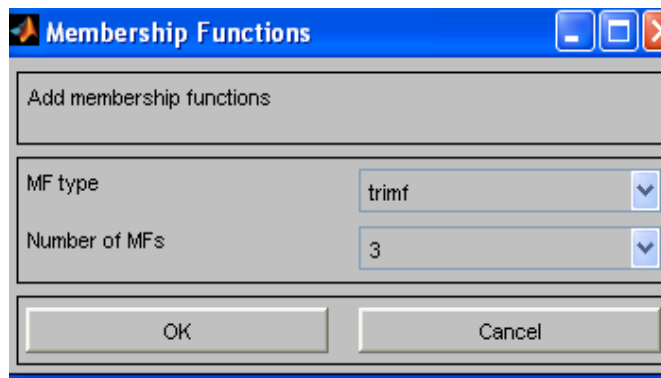


Рис.31. Диалоговое окно задания типа и количества функций принадлежности

4. В поле Range (Диапазон) установим диапазон изменения x от —1 до 1, т.е. диапазон, соответствующий табл. Щелкнем затем левой кнопкой мыши где-нибудь в поле редактора (или нажмем клавишу ввода Enter). Обратим внимание, что после этого произойдет соответствующее изменение диапазона в поле Display Range (Диапазон дисплея).

5. Обратимся к графикам заданных нами функций принадлежности, изображенным в верхней части окна редактора функций принадлежности. Заметим, что для успешного решения поставленной задачи необходимо, чтобы ординаты максимумов этих функций совпадали с заданными значениями аргумента  $x$ . Для левой, центральной и правой функций такое условие выполнено, но две другие необходимо «подвинуть» вдоль оси абсцисс. «Передвижка» делается весьма просто: подводим курсор к нужной кривой и щелкаем левой кнопкой мыши. Кривая выбирается, окрашиваясь в красный цвет, после чего с помощью курсора ее и можно подвинуть в нужную сторону (более точную установку можно провести, изменяя числовые значения в поле Params – в данном случае каждой функции принадлежности соответствуют два параметра, при этом первый определяет размах кривой, а второй – положение ее центра). Для выбранной кривой в поле Name можно изменить имя. Прделаем требуемые перемещения кривых и зададим всем пяти кривым новые имена, например:

- самой левой - bn,
- следующей - n,
- центральной - z,
- следующей за ней справа - p,
- самой правой - br.

Нажать кнопку Close.

Сделать однократный щелчок по голубому блоку (output1). В окне Name заменим имя output1 на  $y$ .

Дважды щелкнем по отмеченному блоку и перейдем к редактору функций принадлежности. В позиции меню Edit выберем опцию Fdd MFs. Появляющееся окно (рис.31) позволяет задать в качестве функции принадлежности только линейные или постоянные в зависимости от того, какой алгоритм Sugeno выбирают. В данной задаче необходимо выбрать постоянные функции принадлежности с общим числом 4. Введенные данные подтверждают нажатием кнопки OK.

Изменим имена функций принадлежности (их графики при использовании алгоритма Sugeno для выходных переменных не приводятся), например, задав их как соответствующие числовые значения  $y$ , т.е. 0, 0,16, 0,36, 1; одновременно эти же числовые значения введем в поле Params (рис.32). Закроем окно кнопкой Close.

Дважды щелкнем по среднему блоку – открывается редактор правил (Rule Editor). Введем соответствующие правила. При вводе каждого правила необходимо обозначить соответствие между каждой функцией принадлежности аргумента  $x$  и числовым значением  $y$ . Кривая, обозначенная нами bn, соответствует  $x = -1$ , т.е.  $y = 1$ . Выберем, поэтому в левом поле (с заголовком  $x$  is) bn, а в правом 1 и нажмем кнопку Add rule (добавить правило). Введенное правило появится в окне правил и будет представлять собой запись: 1. If ( $x$  is bn) then ( $y$  is 1) (1). Аналогично поступим для всех других значений  $x$ , в результате чего сформируется набор из 5 правил (см. рис.33). Закроем окно редактора правил и возвратимся в окно FIS-редактора. Построение системы закончено и можно начать эксперименты по ее исследованию. Заметим, что большинство опций выбиралось нами по умолчанию.



Рис.32. Параметры функций принадлежности переменной  $y$



Рис.33. Окно редактора правил

10. Предварительно сохраним на диске (используя пункты меню File/Save to disk as...)

созданную систему под каким-либо именем, например, Proba.

11. Выберем позицию меню View. Как видно из выпадающего при этом подменю, с помощью пунктов Edit membership functions и Edit rules можно совершить переход к двум выше рассмотренным программам — редакторам функций принадлежности и правил (то же можно сделать и нажатием клавиш Ctrl+2 или Ctrl+3), но сейчас нас будут интересовать два других пункта — View rules (просмотр правил) и View surface (Просмотр поверхности). Выберем пункт View rules, при этом откроется окно (см. рис.34) еще одной программы — просмотра правил (Rule Viewer).

12. В правой части окна в графической форме представлены функции принадлежности аргумента  $x$ , в левой — переменной выхода  $y$  с пояснением механизма принятия решения. Красная вертикальная черта, пересекающая графики в правой части окна, которую можно перемещать с помощью курсора, позволяет изменять значения переменной входа (это же можно делать, задавая числовые значения в поле Input (Вход)), при этом соответственно изменяются значения  $y$  в правой верхней части окна. Зададим, например,  $x = 0.5$  в поле Input и нажмем затем клавишу ввода (Enter). Значение  $y$  сразу изменится и станет равным 0.202. Таким образом, с помощью построенной модели и окна просмотра правил можно решать задачу интерполяции, т.е. задачу, решение которой и требовалось найти. Изменение аргумента путем перемещения красной вертикальной линии очень наглядно демонстрирует, как система определяет значения выхода.

13. Закроем окно просмотра правил и выбором пункта меню View/View surface перейдем к окну просмотра поверхности отклика (выхода), в нашем случае — к просмотру кривой  $y(x)$  (рис.35).

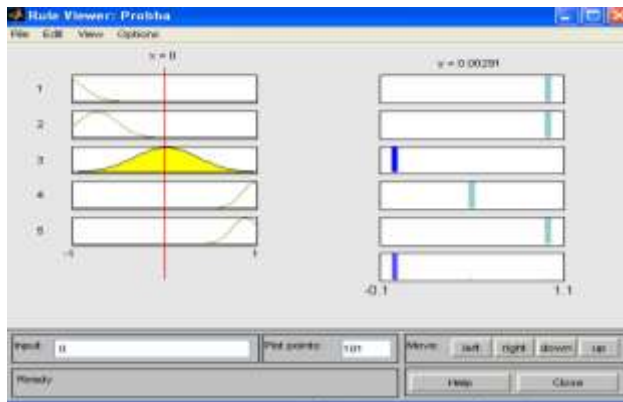


Рис.34 Окно просмотра правил

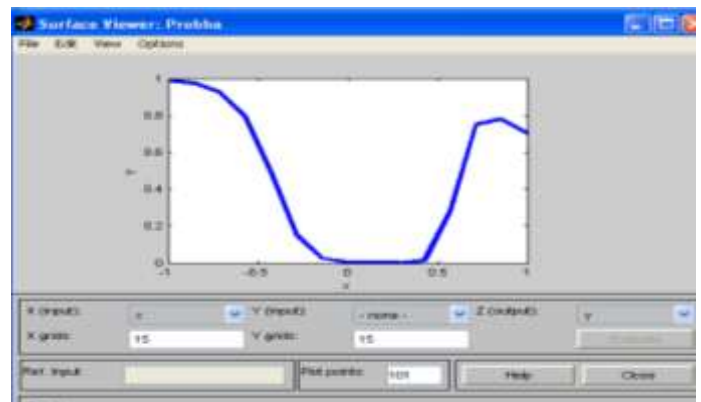


Рис.35 Окно просмотра поверхности отклика

Видно, что смоделированное системой по таблице данных отображение не очень-то напоминает функцию  $x^2$ . Ну что ж, ничего удивительного в этом нет: число экспериментальных точек невелико, да и параметры функций принадлежности (для  $x$ ) выбраны, скорее всего, неоптимальным образом. Ниже мы рассмотрим возможность улучшения качества подобной модели с помощью гибридных (нечетких) нейронных систем.

В заключение рассмотрения примера отметим, что с помощью вышеуказанных программ-редакторов на любом этапе проектирования нечеткой модели в нее можно внести необходимые коррективы, вплоть до задания какой-либо особенной пользовательской функции принадлежности. Из опций, устанавливаемых в FIS- редакторе по умолчанию при использовании алгоритма Sugeno, можно отметить:

- логический вывод организуется с помощью операции умножения (prod);
- композиция — с помощью операции логической суммы (вероятностного ИЛИ, probor);
- приведение к четкости — дискретным вариантом центроидного метода (взвешенным средним, wtaver).

Используя соответствующие поля в левой нижней части окна FIS -редактора, данные опции можно, при желании, изменить.



Таким образом, нечеткое моделирование в среде MATLAB осуществляется с использованием пакета расширения **Fuzzy Logic Toolbox**, в котором реализованы десятки функций нечеткой логики и нечеткого вывода. Пользователь может выполнять необходимые действия по разработке и использованию нечетких моделей в одном из следующих режимов:

- в интерактивном режиме с помощью графических средств редактирования и визуализации всех компонентов систем нечеткого вывода;
- в режиме команд с помощью ввода имен соответствующих функций с необходимыми аргументами непосредственно в окно команд системы MATLAB.

#### **Редактор систем нечеткого вывода FIS**

Редактор систем нечеткого вывода FIS является основным средством, которое используется для создания или редактирования систем нечеткого вывода в графическом режиме. Редактор FIS может быть открыт с помощью ввода функции **fuzzy** в окне команд. Эта функция предоставляет пользователю возможность задавать и редактировать на высоком уровне свойства системы нечеткого вывода, такие как число входных и выходных переменных, тип системы нечеткого вывода, используемый метод дефазификации и т.д.

Если функция **fuzzy** вызывается без аргументов, то редактор FIS вызывается для вновь создаваемой системы нечеткого вывода с именем **Untitled** по умолчанию (рис.29). При этом по умолчанию задается также ряд параметров, таких как тип системы вывода (Мамдани), нечеткие логические операции, методы импликации, агрегирования и дефазификации и некоторые другие. Пользователь может согласиться с этими значениями или изменить их.

Редактор FIS обладает графическим интерфейсом и позволяет вызывать все другие редакторы и программы систем нечеткого вывода.

В верхней части рабочего интерфейса редактора изображается диаграмма, представляющая в визуальной форме **входы** и **выходы** системы нечеткого вывода, в центре которых находится иак называемый процессор **нечетких** правил. Щелчок на прямоугольнике с изображением входа или выхода выделяет соответствующую переменную и делает ее текущей (выделяется красным цветом). Двойной щелчок на прямоугольнике с изображением входной или выходной переменной вызывает редактор функций принадлежности с загруженной в него соответствующей переменной. Двойной щелчок на изображении процессора нечетких правил вызывает редактор правил для соответствующей системы нечеткого вывода. Если некоторая переменная существует в системе нечеткого вывода, но не используется в правилах вывода, то связь ее с процессором нечетких правил изображается не сплошной, а пунктирной линией.

Пункт меню **File** редактора **FIS** содержит следующие операции:

- **New Fis ....** Позволяет выбрать тип задаваемой системы нечеткого вывода: Mamdani или Sugeno. При этом задаваемая система нечеткого вывода не имеет ни входных, ни выходных переменных.
- **Import** – позволяет загрузить в редактор FIS существующую систему нечеткого вывода одним из следующих способов: **From Workspace...** - из рабочего пространства программы MATLAB или **From Disk ...** - из внешнего файла.
- **Export** – позволяет сохранить редактируемую систему нечеткого вывода: **To Workspace...** - в рабочем пространстве программы MATLAB или **To Disk...** - во внешнем файле.
- **Close** – закрывает редактор.

Пункт меню **Edit** содержит следующие операции:

- **Undo** – отменяет выполнение последнего действия;
- **Add Variable....** – позволяет добавить в редактируемую систему нечеткого вывода переменную одного из следующих типов: **Input** - входную переменную или **Output** – выходную переменную;
- **Remove Selected Variable** – удаляет выбранную переменную;
- **Membership Function...** - вызывает редактор функций принадлежности;

- Rules – вызывает редактор правил нечеткого вывода.

Пункт меню **Wiev** содержит следующие операции:

- Rules – вызывает программу просмотра правил нечеткого вывода;
- Surface – вызывает программу просмотра поверхности нечеткого вывода.

В левой нижней части рабочего интерфейса редактора имеется 5 всплывающих меню:

**And method** (Метод логической конъюнкции) – позволяет задать один из следующих методов для выполнения логической конъюнкции в условиях нечетких правил:

- min – метод минимального значения;
- prod – метод алгебраического произведения;
- Gustom - метод, определенный пользователем.

**Or method** (Метод логической дизъюнкции) – позволяет задать один из следующих методов для выполнения логической дизъюнкции в условиях нечетких правил:

- max – метод максимального значения;
- probor – метод алгебраической суммы;
- Gustom - метод, определенный пользователем.

**Implication method** (Метод вывода заключения) — позволяет задать один из следующих методов для выполнения (активизации) логического заключения в каждом из нечетких правил:

- min – метод минимального значения;
- prod – метод алгебраического произведения;
- Gustom - метод, определенный пользователем.

**Aggregation method** (Метод агрегирования) - позволяет задать один из следующих методов для агрегирования значений **функции принадлежности каждой из выходных переменных в заключениях нечетких правил:**

- max – метод максимального значения;
- sum – метод граничной суммы;
- probor – метод алгебраической суммы;
- Gustom - метод, определенный пользователем.

**Defuzzification method**(Метод дефазификации) – позволяет задать один из следующих методов для выполнения дефазификации выходных переменных в системе нечеткого вывода типа Мандани;

- centroid – метод центра тяжести для дискретного множества значений функции принадлежности;
- bisektor – метод центра площади;
- nom – метод среднего максимума, определяемой как среднее арифметическое левого и правого модальных значений;
- som – метод наименьшего (левого) модального значения;
- lom - метод наибольшего (правого) модального значения;
- Gustom - метод, определенный пользователем.

Для систем нечеткого вывода типа Сугено можно выбрать один из следующих методов дефазификации:

- wtaver – метод взвешенного среднего;
- wtsum – метод взвешенной суммы.

#### **Редактор функции принадлежности**

Редактор функции принадлежности предназначен для задания и редактирования функций принадлежности отдельных термов системы нечеткого вывода в графическом режиме. Редактор может быть открыт вводом функции **mfedit** или нажатием клавиш <Ctrl>+<2>.

Для каждой функции принадлежности можно изменять ее имя, тип и параметры. Пользователь

имеет возможность выбрать любую из 11 встроенных функций принадлежности, а также задать собственную.

Результат вызова редактора функций принадлежности с помощью функции `mfedit` ('tipper') показан на рис. 36.

Для отображения графиков функций принадлежности следует выбрать необходимую переменную в левой части графического интерфейса редактора под заголовком **Fis Variables**. Чтобы выбрать нужную функцию принадлежности, следует щелкнуть на ней или ее метке в основном окне с графиками функций принадлежности.

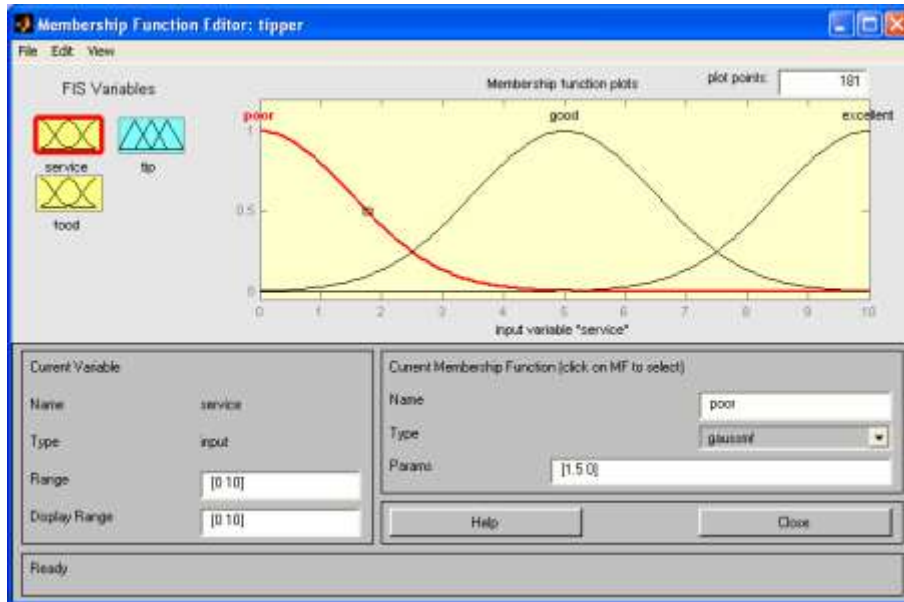


Рис.36 Редактора функций принадлежности, вызываемый функцией `mfedit` ('tipper')

Пункт меню **File** редактора функций принадлежности содержит такие операции, что и соответствующий пункт редактора **Fis**.

Пункт меню **Edit** содержит следующие операции:

- Undo – отменяет выполнение последнего действия;
- Add MF ... - позволяет добавить встроенную функцию принадлежности термов для выбранной переменной;
- Add Custom MF... - позволяет добавить пользовательскую функцию принадлежности термов для отдельной переменной;
- Remove Current MF - позволяет удалить отдельную функцию принадлежности;
- Remove All MFs - позволяет удалить все функции принадлежности для отдельной переменной;
- Fis Properties – вызывает редактор Fis.

Пункт меню **Wiev** содержит следующие операции:

- Rules – вызывает программу просмотра правил нечеткого вывода;
- Surface – вызывает программу просмотра поверхности нечеткого вывода.

Раскрывающийся список типов функций принадлежности позволяет выбрать одну из 11 встроенных функций принадлежности. Используя соответствующие поля ввода, можно изменить имена термов выбранной переменной в поле ввода **Name**, модифицировать параметры встроенных функций принадлежности в поле ввода **Params**.

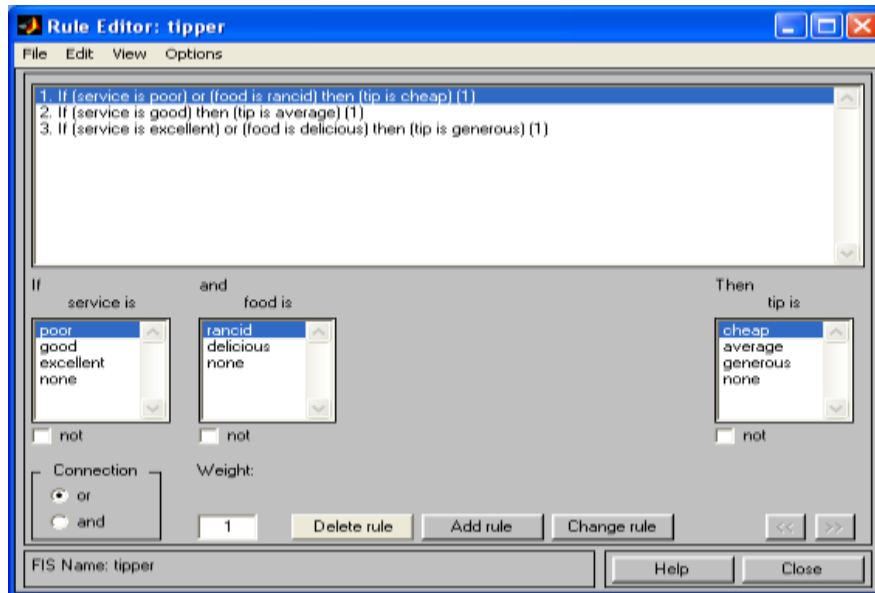
**Редактор правил системы нечеткого вывода**

Редактор правил системы нечеткого вывода предназначен для задания и редактирования отдельных правил системы нечеткого вывода в графическом режиме. Он может быть открыт вводом функции `ruleedit` ('a') или нажатием клавиш <Ctrl>+<3>. Эта функция позволяет также выполнять

грамматический анализ правил.

Чтобы использовать данный редактор для создания правил, необходимо предварительно определить все входные и выходные переменные. Задать правила можно с помощью выбора соответствующих значений термов входных и выходных переменных.

Результат вызова функции ruleedit ('tipper') изображен на рис.37.



Пункт меню **File** редактора функций принадлежности содержит такие операции, что и соответствующий пункт редактора **Fis**.

Пункт меню **Edit** содержит следующие операции:

- **Undo** – отменяет выполнение последнего действия;
- **Fis Properties** – вызывает редактор **Fis**;
- **Membership Functions...** – вызывает редактор функций принадлежности.

**Рис.37. Редактор правил, вызываемый функцией ruleedit ('tipper')**

Пункт меню **Wiev** содержит следующие операции:

- **Rules** – вызывает программу просмотра правил нечеткого вывода;
- **Surface** – вызывает программу просмотра поверхности нечеткого вывода.

Пункт меню **Options** содержит следующие операции:

- **Language** – позволяет выбрать язык для записи правил в форме текста;
- **Format** – позволяет выбрать формат записи правил системы нечеткого вывода: Verbose (в форме текста), Symbolic (в символической форме) или Indexed (в цифровой форме).

При записи правил в форме текста для создания законченных предложений используются служебные слова "if", "then", "is", "AND", "OR" и т.д. При записи правил в символической форме эти служебные слова заменяются символами соответствующих операций.

Поля ввода в средней части графического интерфейса редактора правил позволяют задать новое правило в системе нечеткого вывода. Для этого необходимо выделить имя терма соответствующей переменной, которая должна быть предварительно определена с помощью редактора функций принадлежности. Если в условии правила используется логическое отрицание некоторого терма, то для этого терма следует отметить соответствующий флажок с меткой "not".

Редактор правил позволяет также задать логические связки для подусловий правила (**Connection**) и вес правила (поле ввода **Weight**).

#### **Программы просмотра правил и поверхности системы нечеткого вывода**

Графический интерфейс программы просмотра правил может быть открыт с помощью ввода функции **ruleview('a')** или с помощью главного меню редактора **Fis**, редактора функций принадлежности или редактора правил или нажатием клавиш <Ctrl>+<5>.

Программа просмотра правил не позволяет редактировать правила и функции принадлежности термов переменных и используется после разработки системы нечеткого вывода на этапе ее анализ и оценки. Пользователь имеет возможность оценить выходные значения переменных нечеткой модели

и влияние каждого из правил на результат нечеткого вывода посредством изменения значений входных переменных.

Графический интерфейс программы изображен на рис.38.

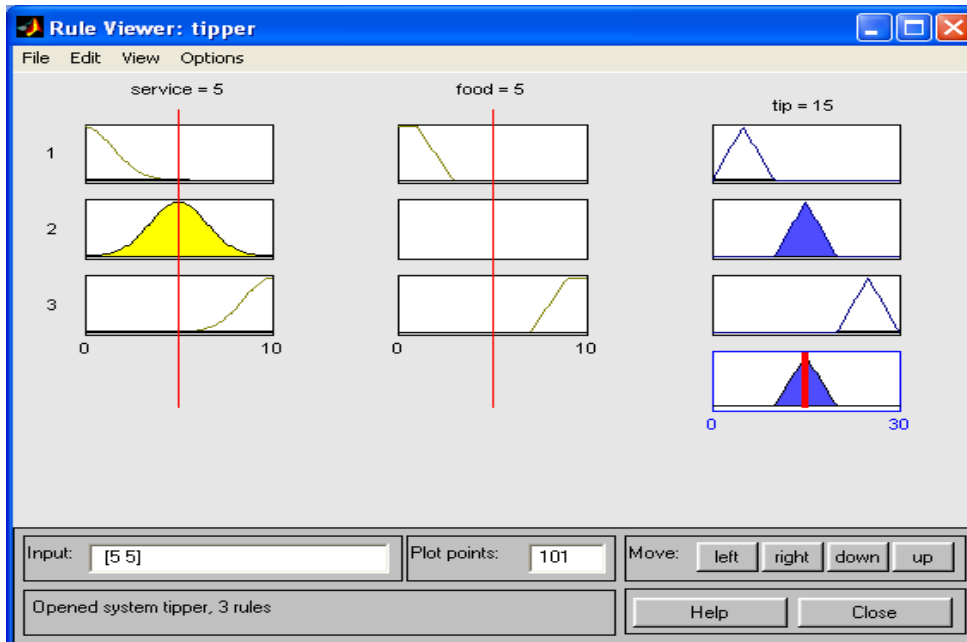


Рис.38. Программа просмотра правил, вызванная функцией `ruleview('tipper')`

Пункт меню **File** редактора функций принадлежности содержит такие операции, что и соответствующий пункт редактора **Fis**.

Пункт меню **Edit** содержит следующие операции:

- Undo – отменяет выполнение последнего действия;

- Fis Properties – вызывает редактор Fis;
- Membership Functions... - вызывает редактор функций принадлежности;
- Rules – вызывает программу просмотра правил нечеткого вывода.

Пункт меню **Wiev** содержит следующие операции:

- Surface – вызывает программу просмотра поверхности нечеткого вывода.

Пункт меню **Options** содержит следующие операции:

- Format – позволяет выбрать формат записи правил системы нечеткого вывода: Verbose (в форме текста), Symbolic (в символической форме) или Indexed (в цифровой форме).

В центральной части графического интерфейса программы просмотра правил расположены прямоугольники, соответствующие отдельным входным переменным (функции принадлежности желтого цвета) и выходным переменным (функции принадлежности синего цвета) правил нечеткого вывода. При этом каждому правилу соответствует отдельная строка из этих прямоугольников. Номера правил указаны в левой части графического интерфейса.

В правой нижней части графического интерфейса расположен прямоугольник, изображающий дефазификацию выходной переменной после аккумуляции всех заключений правил нечеткого вывода. Полученное в результате дефазификации значение выходной переменной указывается в верхней части столбца с именем этой выходной переменной (`tip=15` на рис.38)

Прямоугольники входных переменных пересекает вертикальная прямая красного цвета, положение которой соответствует конкретному значению входной переменной соответствующего столбца. Задать конкретные значения входных переменных можно либо с помощью их записи в поле ввода **Input**, либо с помощью мыши, перемещая вертикальные прямые в нужном направлении.

Программы просмотра поверхности системы нечеткого вывода позволяет просматривать поверхность системы нечеткого вывода и визуализировать графики зависимости выходных переменных от отдельных входных переменных. Графический интерфейс программы просмотра правил может быть открыт с помощью ввода функции `surfview('a')` или с помощью главного меню редактора **Fis**, редактора функций принадлежности или редактора правил или нажатием клавиш `<Ctrl>+<6>`.

Графический интерфейс программы просмотра поверхности изображен на рис.39.

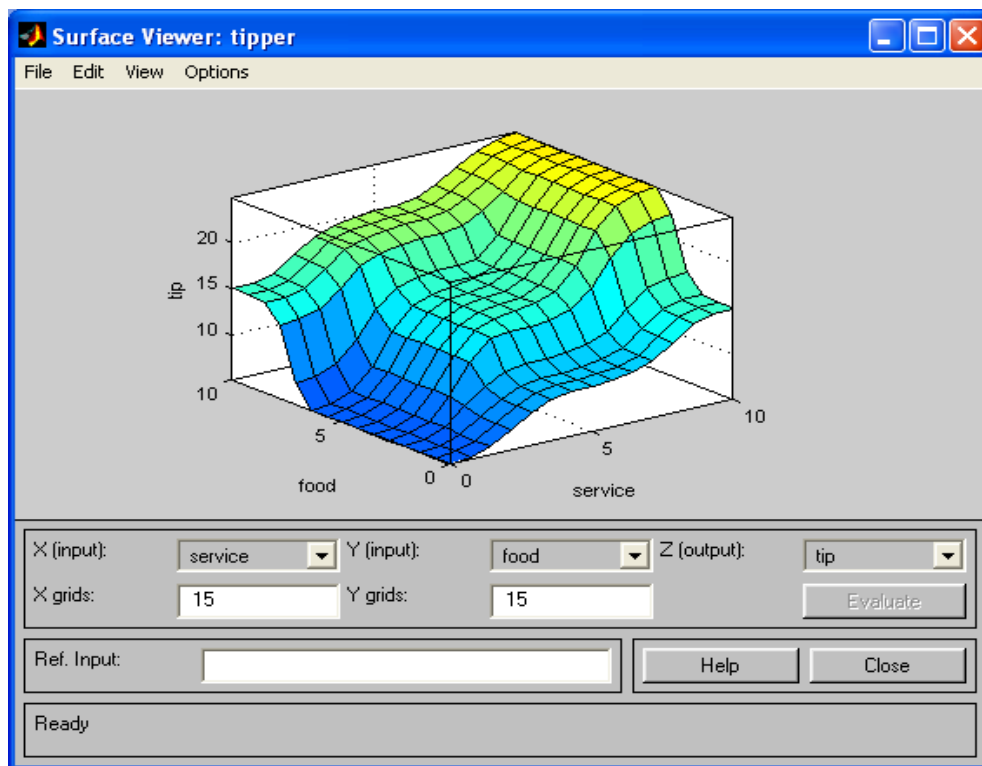


Рис.39. Программа просмотра поверхности вывода, вызванная функцией surfview ('tipper')

Пункт меню **File** редактора функций принадлежности содержит такие операции, что и соответствующий пункт редактора **Fis**.

Пункт меню **Edit** содержит следующие операции:

- Undo – отменяет выполнение последнего действия;
- Fis Properties –

вызывает редактор Fis;

- Membership Functions... - вызывает редактор функций принадлежности;
- Rules – вызывает программу просмотра правил нечеткого вывода.

Пункт меню **Wiev** содержит следующие операции:

1. Пункт меню **File** редактора функций принадлежности содержит такие операции, что и соответствующий пункт редактора **Fis**.
2. Пункт меню **Edit** содержит следующие операции:
  - Undo – отменяет выполнение последнего действия;
  - Fis Properties – вызывает редактор Fis;
  - Membership Functions... - вызывает редактор функций принадлежности;
  - Rules – вызывает программу просмотра правил нечеткого вывода;
  - Пункт меню Wiev содержит следующие операции:
  - Rules – вызывает программу просмотра правил нечеткого вывода;
  - Пункт меню Options содержит следующие операции:
  - Plot – позволяет выбрать один из 8 стилей изображения графика поверхности вода;
  - Color Map – позволяет выбрать одну из 4 цветовых схем изображения графика поверхности вывода.

Программа просмотра поверхности вывода не позволяет вносить изменения в систему нечеткого вывода и соответствующую ей структуру **Fis**. Используя главное меню программы, пользователь может выбрать входные переменные и соответствующие им горизонтальные оси системы координат (X и Y), а также выходную переменную, которой соответствует вертикальная ось системы координат (Z).

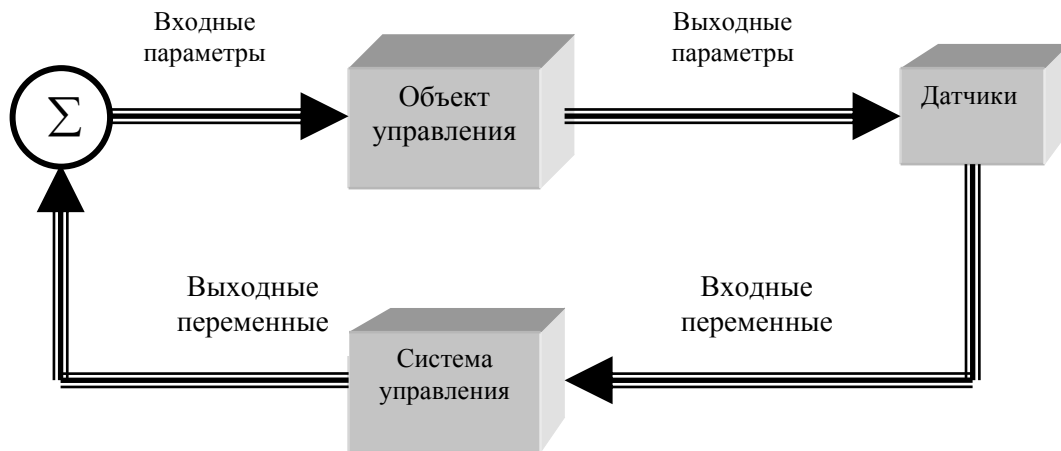
## 5 Нечеткое моделирование при решении задач управления и принятия решений

Одним из основных направлений практического использования систем нечеткого вывода является решение задач управления различными объектами или процессами. В этом случае построение нечеткой модели основывается на формальном представлении характеристик

исследуемой системы в терминах лингвистических переменных. Поскольку кроме алгоритма управления, основными понятиями систем управления являются входные и выходные переменные, то именно они рассматриваются как лингвистические переменные при формировании базы правил в системах нечеткого вывода.

В общем случае цель управления заключается в том, чтобы на основе анализа текущего состояния объекта управления определить значения управляющих переменных, реализация которых позволяет обеспечить желаемое поведение или состояние объекта управления. Для решения соответствующих задач используется общая теория управления, в рамках которой разработаны различные алгоритмы нахождения оптимальных законов управления объектами различной физической природы.

Базовая архитектура или модель классической теории управления основывается на представлении объекта и процесса управления в форме некоторых систем (рис.40).



**Рис.40 Архитектура компонентов процесса управления с обратной связью**

При этом объект управления характеризуется некоторым конечным множеством входных параметров и конечным множеством выходных параметров. На вход системы управления поступают некоторые входные переменные, которые формируются с помощью конечного множества датчиков. На выходе системы управления с использованием некоторого алгоритма управления формируется множество значений выходных переменных, которые называют управляющими переменными или переменными процесса управления. Значения этих выходных переменных поступают на вход объекта управления и, комбинируясь со значениями входных параметров объекта управления, изменяют его поведение в желаемом направлении. Данная архитектура называется процессом *управления с обратной связью*, а используемые для управления техническими объектами системы управления – *контроллерами*.

Типичным примером рассмотренной модели управления является *интегрально-дифференцирующий* контроллер или PID – контроллер. Алгоритм его управления основан на сравнении выходных параметров объекта управления с некоторыми заданными параметрами и определении величины расхождения между ними или ошибки. После этого рассчитываются величины выходных переменных в форме аддитивной суммы величины этой ошибки, значения интеграла и производной по времени в течение некоторого промежутка времени.

Недостатком PID – контроллеров является предположение линейного характера зависимости входных и выходных переменных процесса управления, что существенно снижает адекватность этой модели при решении отдельных практических задач. Другой недостаток модели связан со сложностью выполнения соответствующих расчетов, что может привести к недопустимым задержкам в реализации управляющих воздействий при оперативном управлении объектами с высокой динамикой изменения выходных параметров.

Модель нечеткого управления основана на замене классической системы управления, в качестве которой используются системы нечеткого вывода. В этом случае модель нечеткого управления (рис.41) строится с учетом необходимости реализации всех этапов нечеткого вывода, а сам процесс вывода реализуется на основе одного из рассмотренных алгоритмов нечеткого вывода.

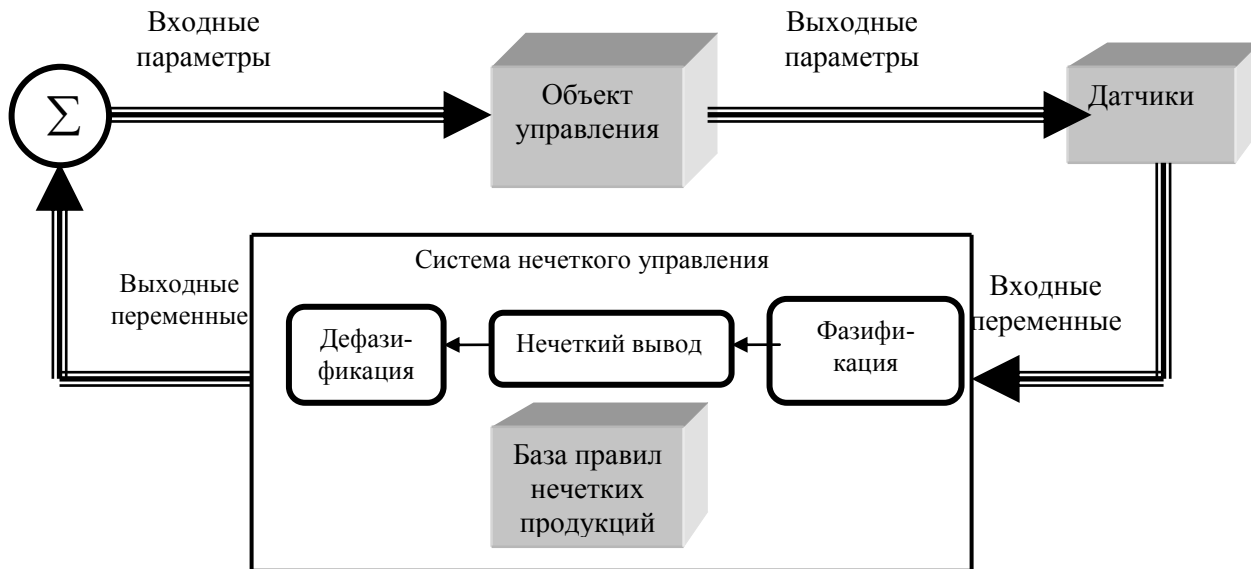


Рис.41 Архитектура компонентов процесса нечеткого управления

## 6 ПРИМЕРЫ РАЗРАБОТКИ НЕЧЕТКИХ МОДЕЛЕЙ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В СРЕДЕ MATLAB

### 6.1 Нечеткая модель управления кондиционером воздуха в помещении

В качестве примера использования систем нечеткого вывода в задачах управления рассмотрим задачу управления кондиционером воздуха в помещении. Данная задача иллюстрирует процесс стабилизации температуры воздуха в помещении, в котором установлен бытовой кондиционер. Предположим, что в качестве алгоритма нечеткого вывода используется алгоритм Мамдани.

#### *Содержательная постановка задачи*

В помещении установлен бытовой кондиционер, который позволяет охлаждать или нагревать воздух в этом помещении. Наиболее комфортные условия в помещении создаются при некоторой стабильной температуре воздуха. Задача состоит в том, чтобы сделать регулировку кондиционера автоматической, обеспечивая постоянную температуру воздуха в помещении (рис.42).

Опыт использования кондиционеров показывает, что процесс охлаждения или нагревания воздуха в помещении обладает некоторой инерционностью: после включения режима «холод» происходит нагнетание холодного воздуха, в связи, с чем температура воздуха в помещении постепенно падает. При этом в момент отключения этого режима температура продолжает падать в течение небольшого, но конечного промежутка времени. Аналогичная картина наблюдается при включении и отключении режима «тепло».

Предположим, что в рассматриваемой модели кондиционера включение режима «холод» осуществляется поворотом регулятора влево, включение режима «тепло» осуществляется поворотом регулятора вправо относительно некоторой точки, в которой кондиционер выключен.

Чтобы учесть эту особенность процесса управления кондиционером и исключить дополнительные затраты, связанные с частым включением и выключением указанных режимов, необходимо рассматривать в качестве выходного параметра не только температуру воздуха в помещении, но и скорость ее изменения. В этом случае эмпирические знания о рассматриваемой



проблемной области могут быть представлены в форме эвристических правил, которые применяются в случае ручного регулирования температуры воздуха в помещении с кондиционером:

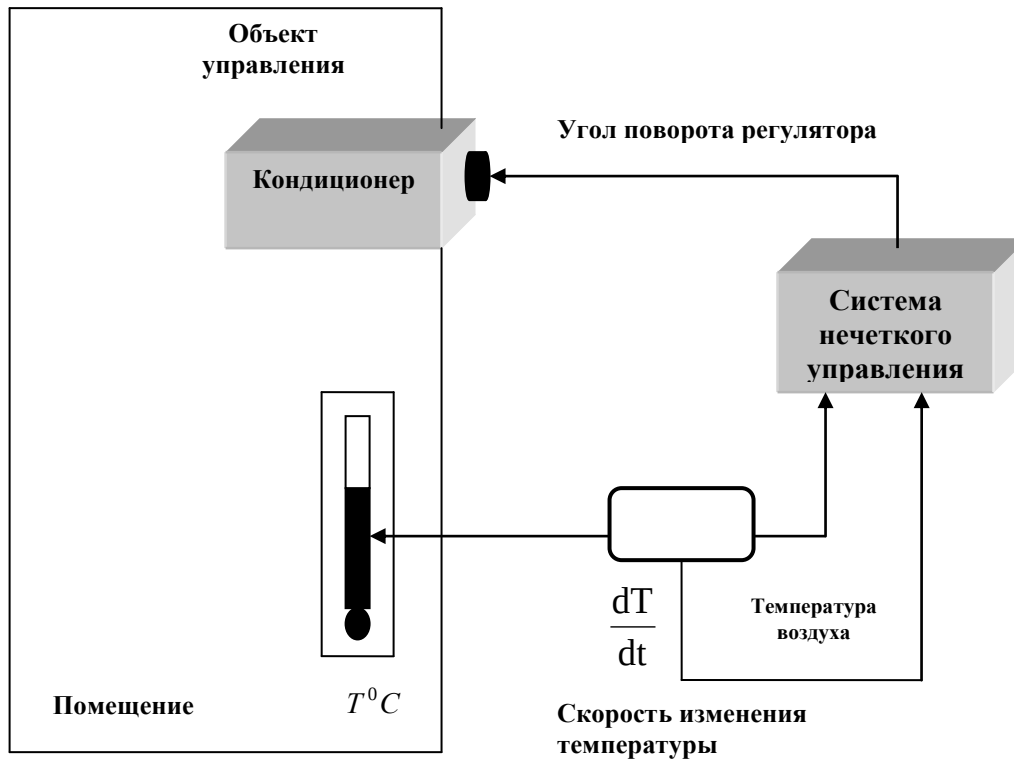


Рис.42 Иллюстрация модели нечеткого управления кондиционером воздуха в помещении

1. Если температура воздуха в помещении очень теплая, а скорость изменения температуры положительная, то следует включить режим «холод», повернув регулятор кондиционера на очень большой угол влево.
2. Если температура воздуха в помещении очень теплая, а скорость изменения температуры отрицательная, то следует включить режим «холод», повернув регулятор кондиционера на небольшой угол влево.
3. Если температура воздуха в помещении теплая, а скорость изменения температуры положительная, то следует включить режим «холод», повернув регулятор кондиционера на большой угол влево.
4. Если температура воздуха в помещении очень теплая, а скорость изменения температуры отрицательная, то кондиционер следует выключить.
5. Если температура воздуха в помещении очень холодная, а скорость изменения температуры отрицательная, то следует включить режим «тепло», повернув регулятор кондиционера на очень большой угол вправо.
6. Если температура воздуха в помещении очень холодная, а скорость изменения температуры положительная, то следует включить режим «тепло», повернув регулятор кондиционера на небольшой угол вправо.
7. Если температура воздуха в помещении холодная, а скорость изменения температуры отрицательная, то следует включить режим «тепло», повернув регулятор кондиционера на большой угол вправо.
8. Если температура воздуха в помещении холодная, а скорость изменения температуры положительная, то кондиционер следует выключить.

9. Если температура воздуха в помещении очень теплая, а скорость изменения температуры равна нулю, то следует включить режим «холод», повернув регулятор кондиционера на большой угол влево.

10. Если температура воздуха в помещении теплая, а скорость изменения температуры равна нулю, то следует включить режим «холод», повернув регулятор кондиционера на небольшой угол влево.

11. Если температура воздуха в помещении очень холодная, а скорость изменения температуры равна нулю, то следует включить режим «тепло», повернув регулятор кондиционера на большой угол вправо.

12. Если температура воздуха в помещении холодная, а скорость изменения температуры равна нулю, то следует включить режим «тепло», повернув регулятор кондиционера на небольшой угол вправо.

13. Если температура воздуха в помещении в пределах нормы, а скорость изменения температуры положительная, то следует включить режим «холод», повернув регулятор кондиционера на небольшой угол влево.

14. Если температура воздуха в помещении в пределах нормы, а скорость изменения температуры отрицательная, то следует включить режим «тепло», повернув регулятор кондиционера на небольшой угол вправо.

15. Если температура воздуха в помещении в пределах нормы, а скорость изменения температуры равна нулю, то кондиционер следует выключить.

Эта информация используется при построении базы правил системы нечеткого вывода, которая позволяет реализовать данную модель нечеткого управления.

#### ***Построение базы нечетких лингвистических правил***

Для формирования базы правил систем нечеткого вывода необходимо предварительно определить входные и выходные лингвистические переменные. Очевидно, что в качестве одной из входных лингвистических переменных следует использовать температуру воздуха в помещении:  $\beta_1$  – «температура воздуха», а в качестве второй входной лингвистической переменной  $\beta_2$  – «скорость изменения температуры воздуха». В качестве выходной лингвистической переменной будем использовать угол поворота регулятора включения режимов «холод» и «тепло» кондиционера:  $\beta_3$  – «угол поворота регулятора». Для сокращения записи правил используются символические обозначения.

#### **Общепринятые сокращения для основных термов лингвистических переменных**

| Символическое обозначение | Русскоязычная нотация        |
|---------------------------|------------------------------|
| NB                        | Отрицательное большое        |
| NM                        | Отрицательное среднее        |
| NS                        | Отрицательное малое          |
| ZN                        | Отрицательное близкое к нулю |
| Z                         | Нуль, близкое к нулю         |
| ZP                        | Положительное близкое к нулю |
| PS                        | Положительное малое          |
| PM                        | Положительное среднее        |
| PB                        | Положительное большое        |

В этом случае система нечеткого вывода будет содержать 15 правил нечетких продукций следующего вида:

Правило 1: ЕСЛИ " $\beta_1$  есть PB" И " $\beta_2$  есть PS" ТО " $\beta_3$  есть NB"

Правило 2: ЕСЛИ " $\beta_1$  есть PB" И " $\beta_2$  есть NS" ТО " $\beta_3$  есть NS"

Правило 3: ЕСЛИ " $\beta_1$  есть PS" И " $\beta_2$  есть PS" ТО " $\beta_3$  есть NM"

Правило 4: ЕСЛИ " $\beta_1$  есть PS" И " $\beta_2$  есть NS" ТО " $\beta_3$  есть Z"

Правило 5: ЕСЛИ " $\beta_1$  есть NB" И " $\beta_2$  есть NS" ТО " $\beta_3$  есть PB"

Правило 6: ЕСЛИ " $\beta_1$  есть NB" И " $\beta_2$  есть PS" ТО " $\beta_3$  есть PS"

Правило 7: ЕСЛИ " $\beta_1$  есть NS" И " $\beta_2$  есть NS" ТО " $\beta_3$  есть PM"

Правило 8: ЕСЛИ " $\beta_1$  есть NS" И " $\beta_2$  есть PS" ТО " $\beta_3$  есть Z"

Правило 9: ЕСЛИ " $\beta_1$  есть PB" И " $\beta_2$  есть Z" ТО " $\beta_3$  есть NM"

Правило 10: ЕСЛИ " $\beta_1$  есть PS" И " $\beta_2$  есть Z" ТО " $\beta_3$  есть NS"

Правило 11: ЕСЛИ " $\beta_1$  есть NB" И " $\beta_2$  есть Z" ТО " $\beta_3$  есть PM"

Правило 12: ЕСЛИ " $\beta_1$  есть NS" И " $\beta_2$  есть Z" ТО " $\beta_3$  есть PS"

Правило 13: ЕСЛИ " $\beta_1$  есть Z" И " $\beta_2$  есть PS" ТО " $\beta_3$  есть NS"

Правило 14: ЕСЛИ " $\beta_1$  есть Z" И " $\beta_2$  есть NS" ТО " $\beta_3$  есть PS"

Правило 15: ЕСЛИ " $\beta_1$  есть Z" И " $\beta_2$  есть Z" ТО " $\beta_3$  есть Z"

#### Фаификация входных переменных

*Температура воздуха в помещении*

В качестве терм-множества первой входной лингвистической переменной используем множество:  $T_1 = \{\text{"очень холодная", "холодная", "в пределах нормы", "теплая", "очень теплая"}\}$  или в символическом виде  $\dot{O}_1 = \{NB, NS, Z, PS, PB\}$  с функциями принадлежности, изображенными на рис.43.

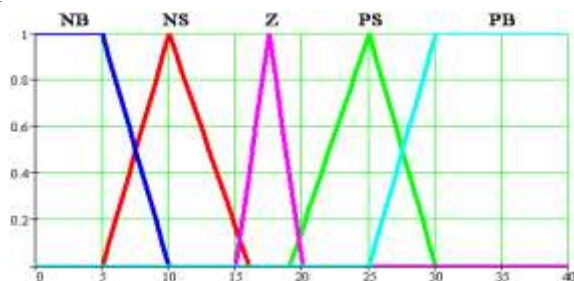


Рис.43 Графики функций принадлежности для термов входной лингвистической переменной «Температура воздуха»

*Скорость изменения температуры воздуха*

В качестве терм-множества второй входной лингвистической переменной используем множество:  $T_2 = \{\text{"отрицательная", "равна нулю", "положительная"}\}$  или в символическом виде  $T_2 = \{NS, Z, PS\}$  с функциями принадлежности, изображенными на рис.44. В качестве терм-множества выходной лингвистической переменной используем множество:  $T_3 = \{\text{"очень большой"}$

угол влево”, ” большой угол влево”, ”небольшой угол влево”, ”выключить кондиционер”, ”небольшой угол вправо”, ”большой угол вправо”, ”очень большой угол вправо”} или в символическом виде  $T_3 = \{NB, NM, NS, Z, PS, PM, PB\}$  с функциями принадлежности, изображенными на рис.45.

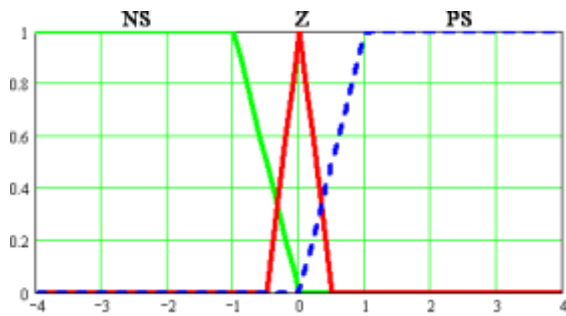


Рис.44 Графики функций принадлежности для термов входной лингвистической переменной «Скорость изменения температуры»

*Угол поворота регулятора кондиционера*

При этом температура воздуха измеряется в градусах Цельсия, скорость изменения температуры воздуха – в градусах Цельсия в минуту, а угол поворота – в угловых градусах. В последнем случае поворот регулятора вправо означает включение режима «тепло» и положительное направление отсчета, а поворот влево – включение режима «холод» и отрицательное направление отсчета.

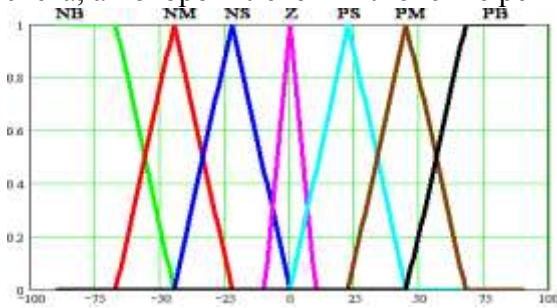


Рис.45 Графики функций принадлежности для термов выходной лингвистической переменной «Угол поворота регулятора»

Используя в качестве алгоритма вывода алгоритм Мамдани, рассмотрим пример для случая, когда текущая температура воздуха равна  $20^{\circ}C$ , а скорость ее изменения положительна и равна  $0,2^{\circ}C/мин$ . В этом случае фазификация первой входной лингвистической переменной приводит к значению степени интенсивности 0,15 для терма PS, а фазификация второй нечеткой переменной приводит к значению истинности 0,5 для терма Z и значению 0,2 для терма PS. Соответствующие подусловия используются в правилах нечетких продукций с номерами 3 и 10. Эти правила считаются активными и используются в текущем процессе нечеткого вывода.

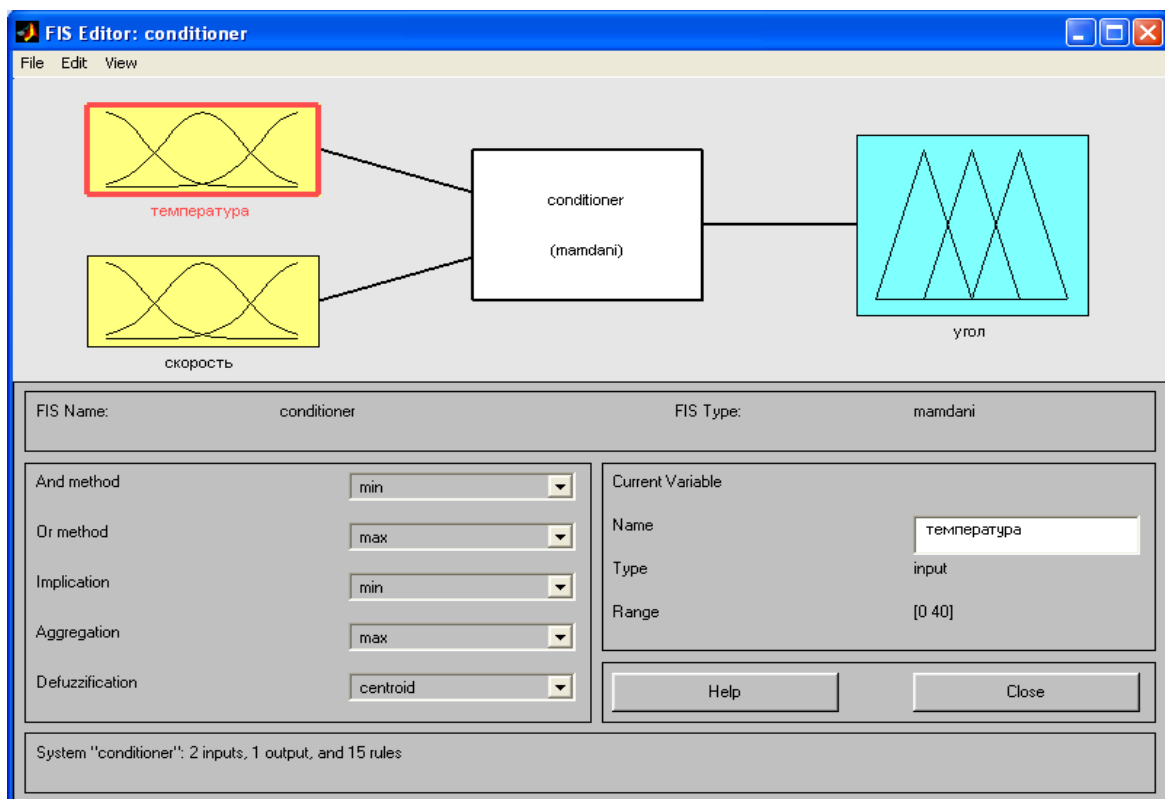
Агрегирование подусловий правила 3 дает в результате число 0,15, агрегирование подусловий правила 10 – также число 0,15. следующим этапом нечеткого вывода является активизация заключений в нечетких правилах продукций. Поскольку все заключения правил 1 – 5 заданы в форме нечетких лингвистических высказываний первого вида, а весовые коэффициенты правил по умолчанию равны 1, то активация правил 3 и 10 приводит к двум нечетким множествам.

Аккумуляирование для правил 3 и 10 заключений нечетких правил продукций производится с использованием операции max-дизъюнкции.

Дефазификация выходной лингвистической переменной «Угол поворота регулятора» методом центра площади приводит к значению управляющей переменной, равному повороту регулятора кондиционера влево на угол  $34^{\circ}$  (приближенное значение). Это значение соответствует включению режима «холод» на треть своей мощности и является результатом решения нечеткого вывода.

#### **Нечеткая модель управления кондиционером воздуха в помещении**

Разработку нечеткой модели будем выполнять с использованием графических средств системы MATLAB. С этой целью откроем редактор FIS и определим 2 входные переменные с именами «температура» ( $\beta_1$ ) и «скорость» ( $\beta_2$ ) и одну выходную переменную с именем «угол» ( $\beta_3$ ). Вид графического интерфейса редактора FIS для этих переменных показан на рис.46.



**Рис.46** Графический интерфейс редактора FIS после определения входных и выходных переменных разрабатываемой системы нечеткого вывода

Поскольку мы используем систему нечеткого вывода по алгоритму Мамдани, оставим без изменения тип, предложенный системой MATLAB по умолчанию. Нет необходимости изменять и другие параметры разрабатываемой нечеткой модели, предложенные системой MATLAB по умолчанию, такие как логические операции (**min** – для нечеткого логического И, **max** - для нечеткого логического ИЛИ), методы импликации (**min**), агрегирования (**max**) и дефазификации (**centroid**).

Далее следует определить функции принадлежности термов для каждой из переменных системы нечеткого вывода. Для этой цели воспользуемся редактором функций принадлежности системы MATLAB. Для первой входной переменной следует добавить два дополнительных терма к трем, заданным по умолчанию, и определить параметры соответствующих функций принадлежности.

Численные значения этих параметров следующие NB – 0,5,10; NS – 5,10,16; Z – 15,17.5,20; PS – 19,25,30; PB – 25,30. Вид графического редактора функций принадлежности после задания первой входной переменной «температура» для системы нечеткого вывода показан на рис.47. Для второй входной переменной следует оставить три терма, заданные по умолчанию, и изменить только тип и параметры функций принадлежности. Численные значения этих параметров следующие NS - -1,0; Z - -0.5,0,0.5; PS – 0,1. Для выходной переменной следует добавить четыре терма к трем, заданным по умолчанию, и задать параметры соответствующих функций принадлежности. Численные значения этих параметров следующие NB - -67.5,-45; NM - -67.5,-45,-22.5; NS - -45,-22.5,0; Z –

-10,0,10; PS – 0,22.5,45; PS – 0,22.5,45; PM – 22.5,45,67.5; PB – 45,67.5.

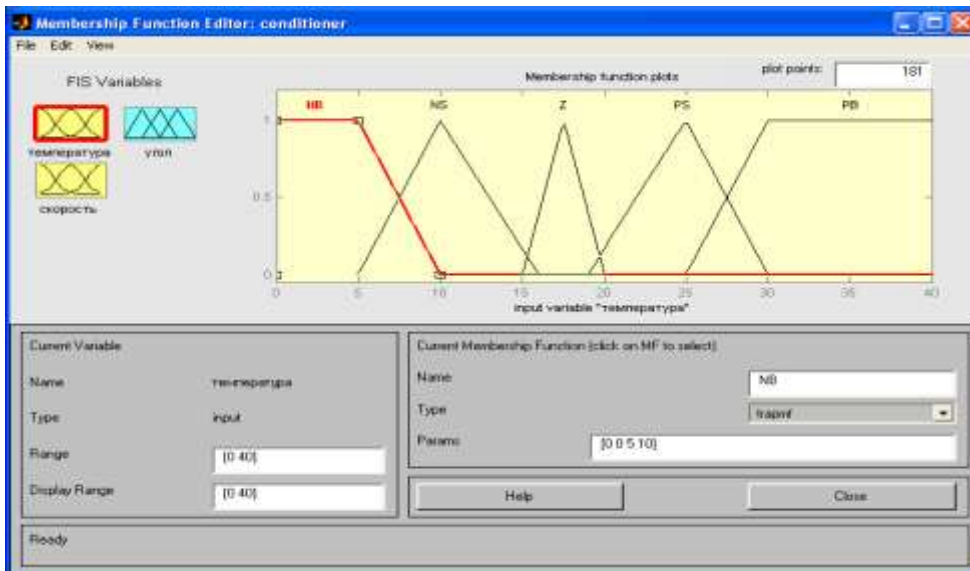


Рис.47. Графический интерфейс редактора функций принадлежности после задания первой входной переменной «температура» для системы нечеткого вывода «conditioner»

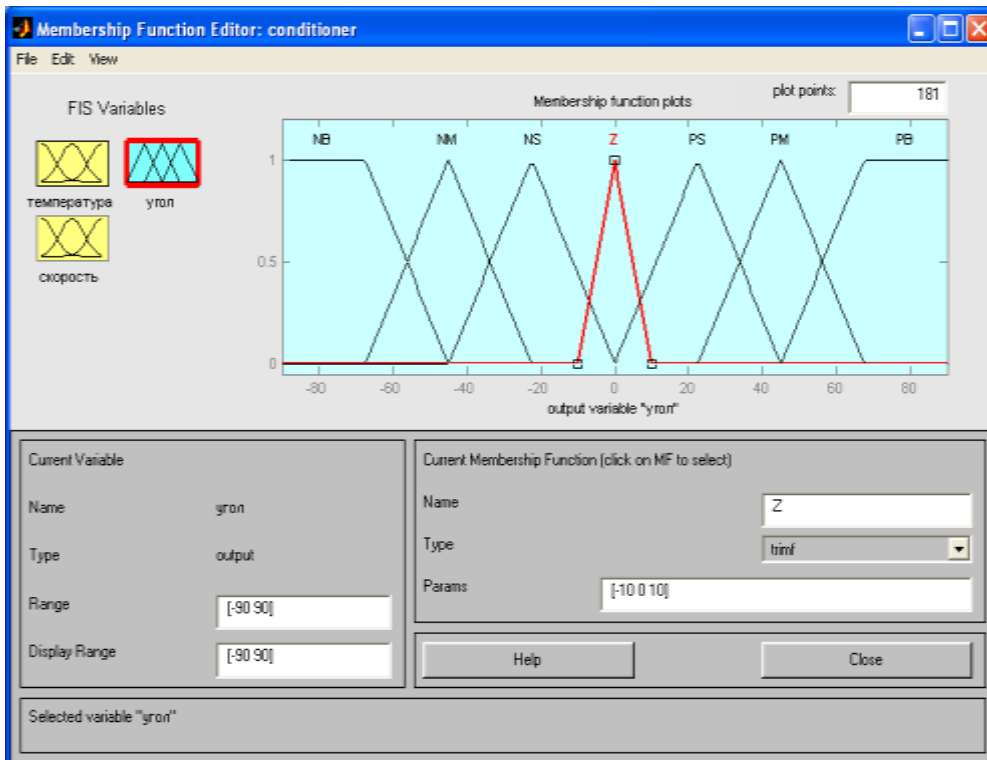


Рис.48. Графический интерфейс редактора функций принадлежности после задания выходной переменной «угол» для системы нечеткого вывода «conditioner»

Вид графического интерфейса редактора функций принадлежности после задания выходной переменной «угол» для системы нечеткого вывода показан на рис.48.

Далее зададим 15 правил для разрабатываемой системы нечеткого вывода. Для этой цели воспользуемся редактором правил системы MATLAB.

Вид графического интерфейса редактора правил после ввода всех 15 правил нечеткого вывода показан на рис.49.

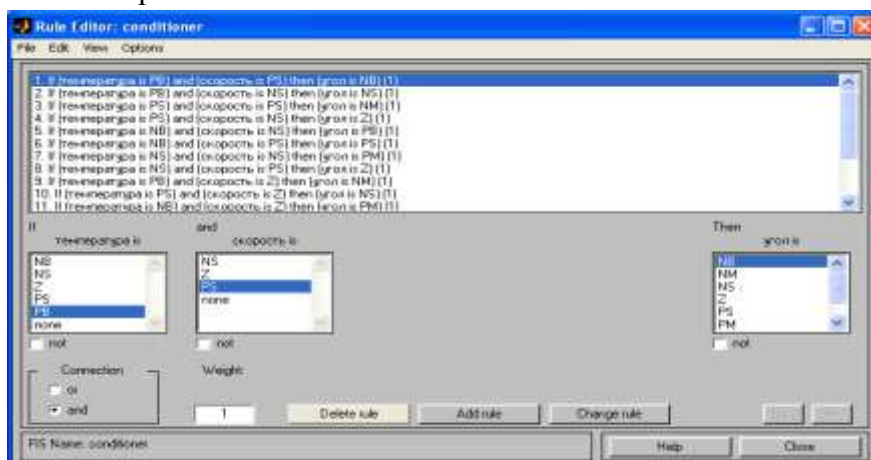
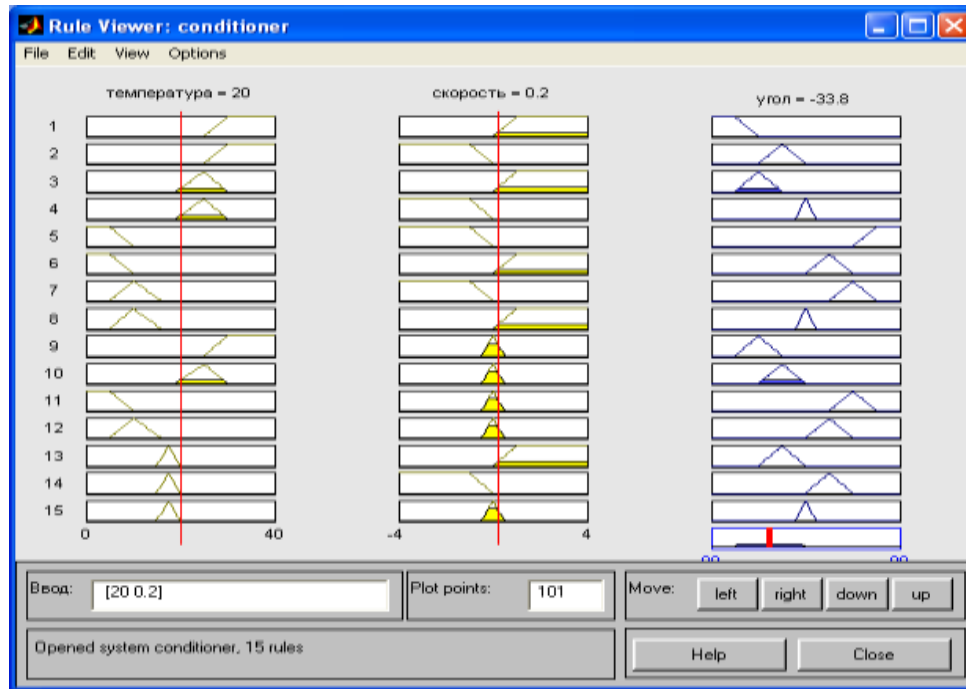


Рис.49. Графический интерфейс редактора правил после задания базы правил для системы нечеткого вывода «conditioner»

Затем можно выполнить оценку построенной системы нечеткого вывода для задачи автоматического управления кондиционером в помещении. С этой целью откроем программу просмотра правил системы MATLAB и введем значения

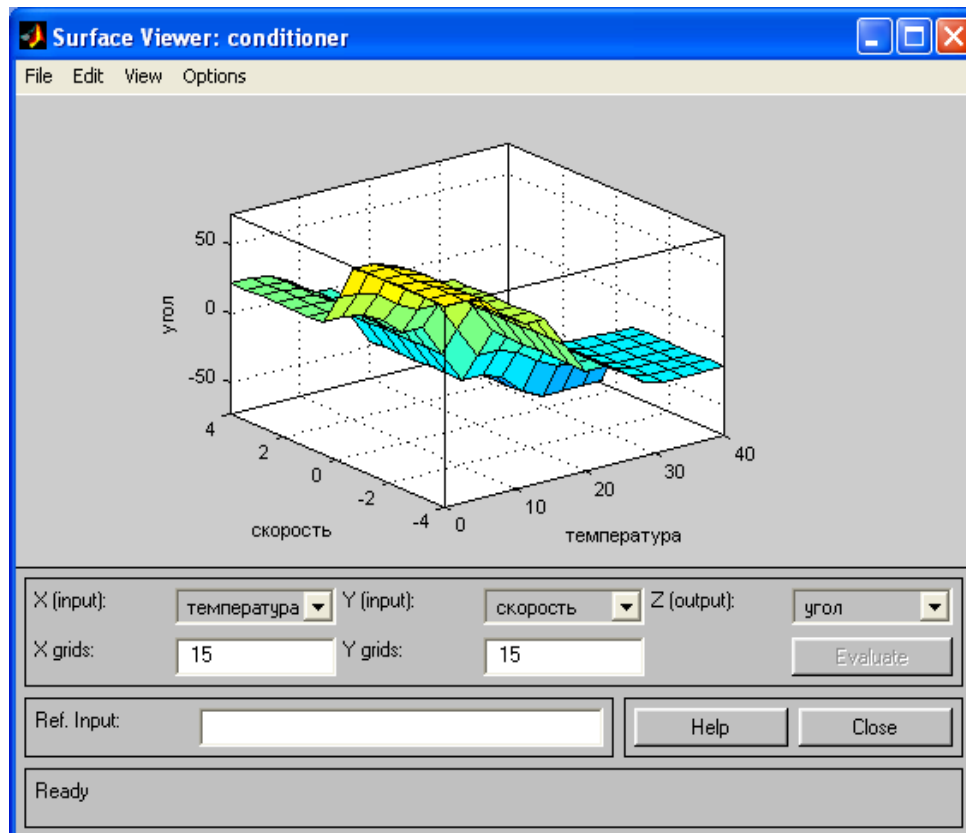
входных переменных для частного случая, когда текущая температура воздуха в помещении равна  $20^{\circ}\text{C}$ , а скорость ее изменения положительная и составляет  $0,2^{\circ}\text{C}/\text{мин}$ . Процедура нечеткого вывода, выполненная системой MATLAB для разработанной нечеткой модели, выдает в результате значение выходной переменной «угол», равное  $-33,8^{\circ}\text{C}$  (рис.50).

Данное значение соответствует включение режима «холод» кондиционера на треть своей мощности.



**Рис.50** Графический интерфейс программы просмотра правил после выполнения процедуры нечеткого вывода для значений входных переменных [20 0.2].

Процесс анализа и исследования построенной нечеткой модели включает в себя выполнение нечетких выводов для различных значений входных переменных и оценки полученных результатов с целью установления адекватности модели и внесения в нее необходимых изменений в случае несогласованности отдельных результатов.



Для общего анализа разработанной нечеткой модели может оказаться полезной визуализация соответствующей поверхности нечеткого вывода (рис.51). Данная поверхность нечеткого вывода позволяет установить зависимость значений выходной переменной от значений входных переменных нечеткой модели системы управления кондиционером.

**Рис.51.** Визуализация поверхности нечеткого вывода для системы нечеткого вывода «conditioner»

Эта зависимость может послужить основой для программирования контроллера или аппаратной реализации соответствующего нечеткого алгоритма управления в форме таблицы решений. В дополнение к этому



установление данной зависимости является по сути решением задачи, известной в классической теории управления как задача синтеза управляющих воздействий.

## **6.2 Оценивание финансовой состоятельности клиентов при предоставлении банковских кредитов**

В настоящее время в сфере бизнеса и экономики широко используются человеко-машинные системы, предназначенные для обработки нечетких данных, реализующие и оказывающие помощь принятию экономических решений, маркетинг, советы по вложению капитала, различного рода управление и планирование, анализ риска, помощь в подготовке контрактов и т.д.

В качестве примера приведем решение задачи оценивания финансовой состоятельности клиента с целью принятия решений при предоставлении долгосрочных кредитов на строительство под залог недвижимости с помощью нечеткой модели. При выдаче долгосрочных кредитов на строительство зданий или коттеджей под залог недвижимости для оценки состоятельности клиентов банками традиционно используется метод экспертных оценок. При этом целью банков является получение максимальной прибыли от заключенных сделок по предоставлению кредитов и исключение возможности финансовых потерь. Поэтому интерес банков сосредоточены, с одной стороны, на увеличении количества успешных сделок, а с другой стороны, на избежание неудачных сделок, когда клиент не возвращает выданный кредит или возвращает его не вовремя. Традиционно основанием для принятия решений по предоставлению кредитов в будущем служит опыт успешных сделок, совершенных в прошлом.

Анализ стратегии предоставления кредитов на строительство зданий показывает, что для оценивания финансовой состоятельности клиентов могут быть использованы различные характеристики, такие как местоположение строящегося здания, качество предполагаемого выполнения отделочных работ, оценка активов потенциального клиента, оценка дохода потенциального клиента за вычетом фиксированных расходов, величина подлежащих уплате процентов по кредиту. При этом собственно финансовая состоятельность клиента оценивается его кредитоспособностью.

Одной из первых формальных моделей, предложенных для решения данной задачи, являлась статистическая модель, основанная на вероятностной интерпретации количественной оценки положительного решения о предоставлении кредита. Более детальный анализ этой модели со временем показал ее неадекватность, связанную с недостаточным объемом статистической выборки и изменяющимися с течением времени условиями предоставления кредитов. Именно по этой причине была предложена идея разработки нечеткой модели для оценивания финансовой состоятельности клиентов с целью принятия решений о предоставлении долгосрочных кредитов. В качестве нечеткой модели используется система нечеткого вывода со следующими входными и выходными переменными.

В нечеткой модели использованы пять входных переменных (оценка места расположения строящегося объекта, качество отделочных работ, оценка активов, оценка дохода клиента, величина подлежащих к уплате процентов) и одна выходная - оценка кредитоспособности, которая является основой для принятия решения руководством банка. При этом решение о предоставлении кредита руководством банка принимается только в случае высокой оценки этой выходной переменной.

В качестве первой входной переменной используется оценка месторасположения строящегося здания, которая непосредственно оценивает проект строящегося здания, принимая во внимание размещение здания в том или ином конкретном районе города или регионе пригорода. Очевидно, чем выше эта оценка, тем более ликвидным предоставляется проект в случае его реализации на рынке недвижимости.

В качестве второй входной переменной используется качество предполагаемого выполнения отделочных работ согласно архитектурному проекту строящегося здания. Эта переменная вносит дополнительный элемент в оценку стоимости строящегося здания.

В качестве третьей входной переменной используется оценка активов, которая используется для



оценки имущества или авуаров в случае несостоятельности потенциального клиента при невозвращении им взятого кредита. Действительно, величина предоставляемого кредита должна основываться не только на учете стоимости строящегося здания, но и на собственной капитализации клиента.

В качестве четвертой входной переменной используется оценка дохода потенциального клиента за вычетом фиксированных расходов, которая также используется в случае несостоятельности потенциального клиента при невозвращении им взятого кредита. Чем выше значение этой переменной, тем более успешным представляется предоставление кредита клиенту.

В качестве пятой входной переменной используется величина подлежащих уплате процентов согласно предполагаемому плану выплат по взятому кредиту. Эта переменная связана со сроком предоставления кредита и его величиной, позволяя объединить в себе соответствующие характеристики кредита. Чем выше величина выплат по процентам, тем более высокими должны быть значения активов и доходов для положительного решения о предоставлении кредита потенциальному клиенту.

В качестве выходной переменной используется оценка кредитоспособности, которая является основой для принятия решений руководством банка по предоставлению кредита потенциальным клиентам. При этом решение о предоставлении кредита руководством банка принимается только в случае высокой оценки этой выходной переменной.

Анализ предоставления кредитов на строительство зданий показывает, что для анализа финансовой состоятельности клиентов руководство банков принимает следующие эвристические правила:

1. Если величина дохода низкая и величина выплат средняя, то кредитоспособность очень низкая.
2. Если величина дохода низкая и величина выплат высокая, то кредитоспособность очень низкая.
3. Если величина дохода средняя и величина выплат высокая, то кредитоспособность очень низкая.
4. Если активы низкие и величина дохода низкая, то кредитоспособность очень низкая.
5. Если активы низкие и величина дохода средняя, то кредитоспособность очень низкая.
6. Если активы средние и величина дохода низкая, то кредитоспособность очень низкая.
7. Если качество отделки плохое, активы низкие и величина дохода высокая, то кредитоспособность очень низкая.
8. Если качество отделки плохое, активы средние и величина дохода средняя, то кредитоспособность очень низкая.
9. Если качество отделки плохое, активы высокие и величина дохода низкая, то кредитоспособность очень низкая.
10. Если качество отделки плохое, активы высокие и величина дохода средняя, то кредитоспособность очень низкая.
11. Если местоположение непрестижное, качество отделки хорошее, активы низкие и величина дохода высокая, то кредитоспособность средняя.
12. Если местоположение непрестижное, качество отделки прекрасное, активы низкие и величина дохода высокая, то кредитоспособность средняя.
13. Если местоположение престижное, качество отделки хорошее, активы низкие и



35. Если местоположение непрестижное, качество отделки хорошее, активы высокие и величина дохода высокая, то кредитоспособность высокая.

36. Если местоположение непрестижное, качество отделки прекрасное, активы высокие и величина дохода высокая, то кредитоспособность высокая.

37. Если местоположение престижное, качество отделки хорошее, активы высокие и величина дохода высокая, то кредитоспособность высокая.

38. Если местоположение очень престижное, качество отделки хорошее, активы высокие и величина дохода высокая, то кредитоспособность высокая.

39. Если местоположение престижное, качество отделки прекрасное, то кредитоспособность высокая.

40. Если местоположение очень престижное, качество отделки прекрасное, то кредитоспособность высокая.

#### **Нечеткая модель оценивания финансовой состоятельности клиентов**

В базе правил системы нечеткого вывода использовалось 40 правил нечетких продукций. При построении нечеткой модели оценки финансовой состоятельности потенциальных клиентов было сделано предположение о том, что все рассматриваемые переменные измеряются в баллах в интервале действительных чисел от 0 до 10. При этом самая низкая оценка значения каждой из переменных является 0, а самой высокой – 10.

#### **Фазификация входных и выходных переменных**

В качестве терм-множеств первой входной переменной «Местоположение» будем использовать множество:  $T_1 = \{\text{"непрестижное"}, \text{"престижное"}, \text{"очень престижное"}\}$  или в символьном виде  $T_1 = \{PS, PM, PB\}$  с функциями принадлежности термов, изображенными на рис.52,а (PS: 0; 0; 0,5; 6; PM: 1,5; 3,5; 6; 9; PB: 6; 9; 10; 10). В качестве терм-множества второй входной переменной «Отделка» будем использовать аналогичное множество:  $T_2 = \{\text{"плохая"}, \text{"хорошая"}, \text{"прекрасная"}\}$  или в символьном виде  $T_2 = \{PS, PM, PB\}$  с функциями принадлежности термов, изображенных на рис.52,б (PS: 0; 0; 1; 5; PM: 1; 5; 9; PB: 5; 9; 10; 10).

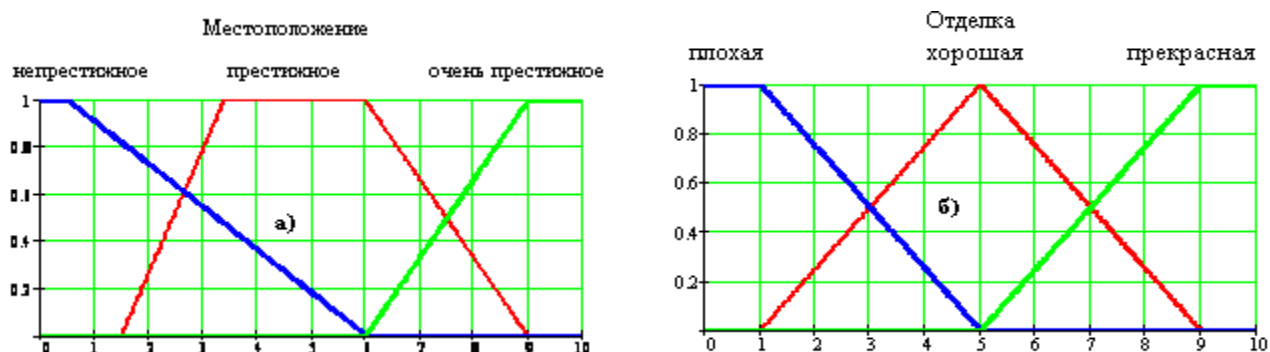


Рис.52 Графики функций принадлежности для термов лингвистических переменных «Местоположение» и «Отделка»

В качестве терм-множества третьей лингвистической переменной «Активы» будем использовать множество:  $T_3 = \{\text{"низкие"}, \text{"средние"}, \text{"высокие"}\}$  или в символьном виде  $T_3 = \{PS, PM, PB\}$  с функциями принадлежности термов, изображенных на рис.53 (PS: 0; 0; 5; PM: 0; 5; 10; PB: 5; 10; 10).

В качестве терм-множества четвертой лингвистической переменной «Доход» будем использовать множество:  $T_4 = \{\text{"низкий"}, \text{"средний"}, \text{"высокий"}\}$  или в символьном виде

$T_4 = \{PS, PM, PB\}$  с функциями принадлежности термов, изображенных на рис.54 (PS: 0; 0; 2,5; 5; PM: 2,5; 5; 7,5; PB: 5;7,5; 10; 10).



Рис.53 График функций принадлежности для термина лингвистической переменной «Активы», измеряемой в баллах

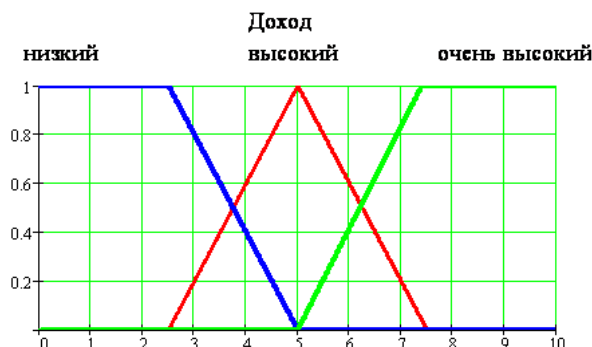


Рис.54 График функций принадлежности для термина лингвистической переменной «Доход», измеряемой в баллах

В качестве терм-множества пятой лингвистической переменной «Выплаты» будем использовать множество:  $T_5 = \{ \text{"низкие"}, \text{"средние"}, \text{"высокие"} \}$  или в символьном виде  $T_5 = \{PS, PM, PB\}$  с функциями принадлежности термов, изображенных на рис.55 (PS: 0; 0; 1; 3; PM: 1; 4; 6; PB: 3; 9; 10;10).

В качестве терм-множества выходной лингвистической переменной «Кредитоспособность» будем использовать множество:  $T_6 = \{ \text{"очень низкая"}, \text{"низкая"}, \text{"средняя"}, \text{"высокая"}, \text{"очень высокая"} \}$  или в символьном виде  $T_6 = \{NB, NS, Z, PS, PB\}$  с функциями принадлежности термов, изображенных на рис.56 (NB: 0; 0; 3,33; NS: 1,66; 3,33; 5; Z: 3,33; 5; 6,66; PS: 5; 6,66; 8,33; PB: 6,66; 10; 10).

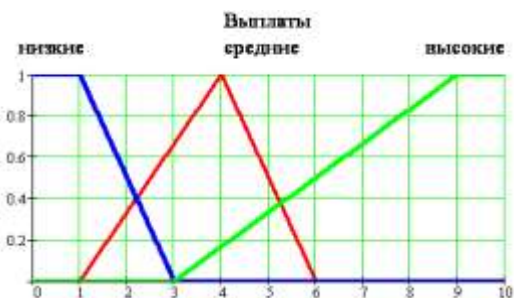


Рис.55 График функций принадлежности для термина лингвистической переменной «Выплаты», измеряемой в баллах

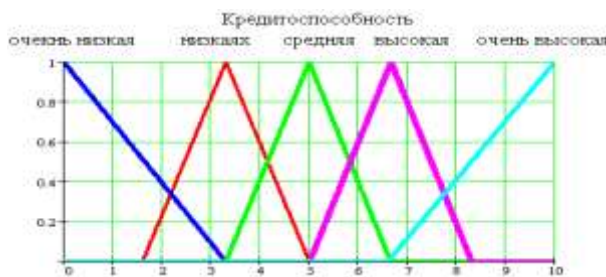


Рис.56 График функций принадлежности для термина лингвистической переменной «Кредитоспособность», измеряемой в баллах

### Формирование базы правил систем нечеткого вывода

Следующим этапом построения модели является построение базы правил. Для этого будем использовать 40 правил нечетких продукций, которые удобно представить в виде таблицы.

Таблица. Правила нечетких продукций для рассматриваемой системы нечеткого вывода

| Номер правила | Местоположение | Отделка | Активы | Доход | Выплаты | Кредитоспособность |
|---------------|----------------|---------|--------|-------|---------|--------------------|
| 1             |                |         |        | PS    | PM      | NB                 |
| 2             |                |         |        | PS    | PB      | NB                 |
| 3             |                |         |        | PM    | PB      | NB                 |
| 4             |                |         | PS     | PS    |         | NB                 |
| 5             |                |         | PS     | PM    |         | NB                 |
| 6             |                |         | PM     | PS    |         | NB                 |

| Номер<br>правила | Местопо-<br>ложение | Отделка | Активы | Доход | Выплаты | Кредито-<br>способность |
|------------------|---------------------|---------|--------|-------|---------|-------------------------|
| 7                |                     | PS      | PS     | PB    |         | NB                      |
| 8                |                     | PS      | PM     | PM    |         | NB                      |
| 9                |                     | PS      | PB     | PS    |         | NB                      |
| 10               |                     | PS      | PB     | PM    |         | Z                       |
| 11               | PS                  | PM      | PS     | PB    |         | Z                       |
| 12               | PS                  | PB      | PS     | PB    |         | Z                       |
| 13               | PM                  | PM      | PS     | PB    |         | Z                       |
| 14               | PB                  | PM      | PS     | PB    |         | Z                       |
| 15               | PS                  | PM      | PM     | PM    |         | Z                       |
| 16               | PS                  | PB      | PM     | PM    |         | Z                       |
| 17               | PM                  | PM      | PM     | PM    |         | Z                       |
| 18               | PB                  | PM      | PM     | PM    |         | Z                       |
| 19               | PS                  | PM      | PB     | PS    |         | Z                       |
| 20               | PS                  | PB      | PB     | PS    |         | Z                       |
| 21               | PM                  | PM      | PB     | PS    |         | Z                       |
| 22               | PB                  | PM      | PB     | PS    |         | Z                       |
| 23               | PS                  | PM      | PB     | PM    |         | Z                       |
| 24               | PS                  | PB      | PB     | PM    |         | Z                       |
| 25               | PM                  | PM      | PB     | PM    |         | Z                       |
| 26               | PB                  | PM      | PB     | PM    |         | Z                       |
| 27               | PM                  | PB      | PM     | PB    |         | PB                      |
| 28               | PM                  | PB      | PB     | PB    |         | PB                      |
| 29               | PB                  | PB      | PM     | PB    |         | PB                      |
| 30               | PB                  | PB      | PB     | PB    |         | PB                      |
| 31               | PS                  | PM      | PM     | PB    |         | PS                      |
| 32               | PS                  | PB      | PM     | PB    |         | PS                      |
| 33               | PM                  | PM      | PM     | PB    |         | PS                      |
| 34               | PB                  | PM      | PM     | PB    |         | PS                      |
| 35               | PS                  | PM      | PB     | PB    |         | PS                      |
| 36               | PS                  | PB      | PB     | PB    |         | PS                      |
| 37               | PM                  | PM      | PB     | PB    |         | PS                      |
| 38               | PB                  | PM      | PB     | PB    |         | PS                      |
| 39               | PM                  | PB      |        |       |         | PS                      |
| 40               | PB                  | PB      | PM     | PB    |         | PS                      |

В качестве схемы нечеткого вывода будем использовать метод Мамдани, поэтому методом активизации будет MIN, который рассчитывается по формуле:

$\min$  – активация

$$\mu'(y) = \min\{c_i, \mu(y)\},$$

где  $\mu(y)$  – функция принадлежности терма, который является некоторой выходной переменной  $\omega_i$ , заданной на универсуме  $Y$ .

Далее необходимо определить методы агрегирования подусловий. Поскольку во всех правилах 1 - 40 в качестве логической связи для подусловий применяются только нечеткая конъюнкция (операция «И»), то в качестве метода агрегирования будем использовать метод max-дизъюнкции, который также применяется в случае схемы нечеткого вывода методом Мамдани. В качестве метода дефазификации будем использовать метод центра тяжести.

## Построение нечеткой модели средствами Fuzzy Logic Toolbox и анализ полученных результатов

Построение нечеткой модели было осуществлено средствами fuzzy logic toolbox системы Matlab. С этой целью в редакторе FIS определим 5 входных переменных с именами «местоположение», «отделка», «активы», «доход», «выплаты», и одну выходную переменную с именем «кредитоспособность». Вид графического интерфейса редактора FIS для этих переменных показан на рис.57.

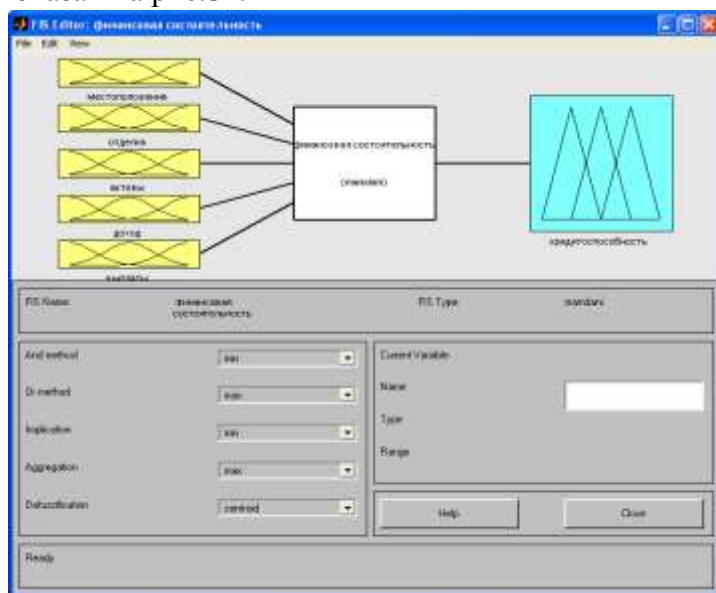


Рис.57 Графический интерфейс редактора FIS после определения входных и выходной переменных системы нечеткого вывода финансовой состоятельности

Для решения поставленной задачи нечеткого моделирования будем использовать систему нечеткого вывода Мамдани. Оставим без изменения параметры разрабатываемой нечеткой модели, предложенный системой MATLAB по умолчанию, а именно логические операции (**min** – для нечеткого логического И, **max** – для нечеткого логического ИЛИ), методы импликации (**min**), агрегирования (**max**) и дефазификации (**centroid**).

Далее следует определить функции принадлежности термов для каждой из 5 входных и единственной выходной переменных рассматриваемой системы нечеткого вывода. Для этого воспользуемся редактором функций принадлежности системы MATLAB. Будем использовать типы функций принадлежности и соответствующие численные значения их параметров, которые изображены на рис.56. Графический интерфейс редактора функций принадлежности для выходной переменной «кредитоспособность» изображен на рис.58, 59.

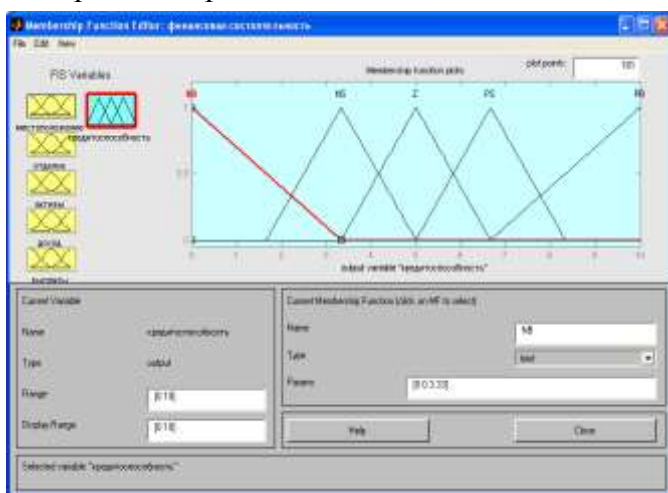


Рис.58 Графический интерфейс редактора функций принадлежности для выходной переменной «кредитоспособность»

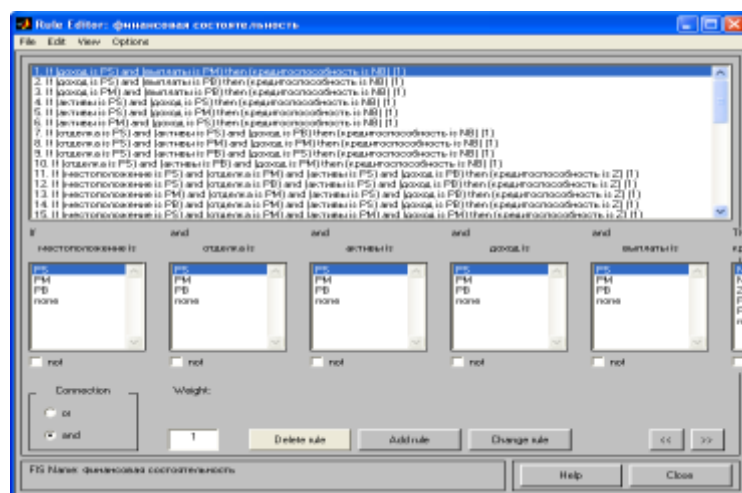


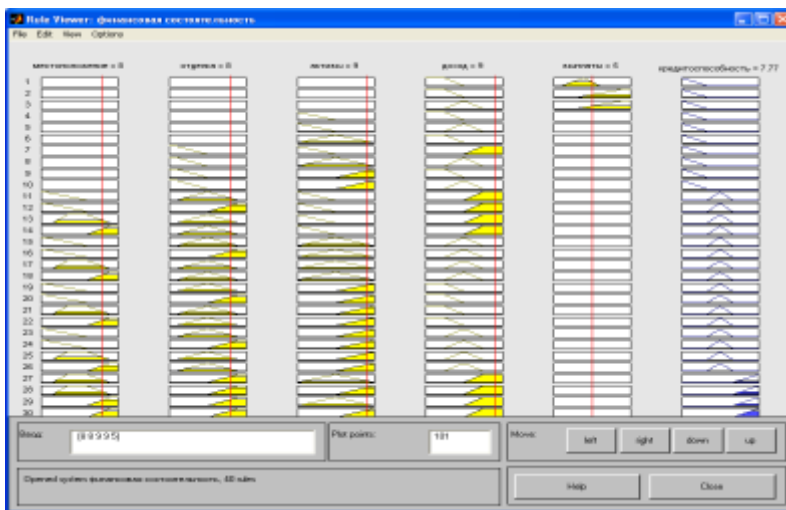
Рис.59 Графический интерфейс редактора правил после задания базы правил системы нечеткого вывода финансовой состоятельности

Далее зададим 40 правил для разрабатываемой системы нечеткого вывода (таблица правил). Для этой цели воспользуемся редактором правил системы MATLAB. Вид графического интерфейса редактора правил после задания всех 40 правил нечеткого вывода показан на рис.59. Так как в рабочем окне отображаются не все переменные нечеткой модели, для управления режимом



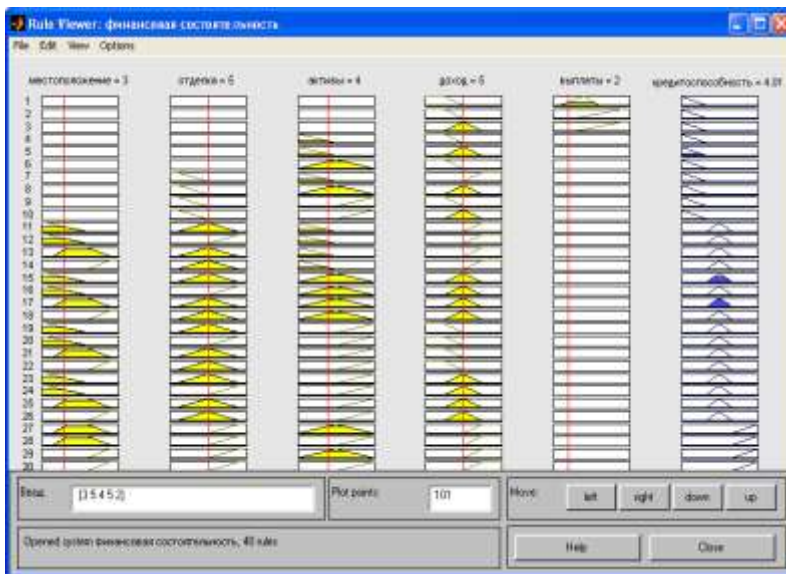
отображения переменных правил следует воспользоваться специальными кнопками >> и <<, расположенными в нижней части редактора правил.

Теперь можно выполнить анализ построенной системы нечеткого вывода для рассматриваемой задачи оценки финансовой состоятельности клиентов. С этой целью откроем окно просмотра правил системы MATLAB и введем значения входных переменных для частного случая, когда значение входной переменной «местоположение» оценивается в 8 баллов, значение входной переменной «отделка» также оценивается в 8 баллов, значение входной переменной «активы» оценивается в 9 баллов, значение входной переменной «доход» оценивается в 9 баллов, и наконец, значение входной переменной «выплаты» оценивается в 5 баллов. Это достаточно высокие оценки входных переменных, которые даже на интуитивном уровне свидетельствуют в пользу соответствующего клиента. Процедура нечеткого вывода, выполненная системой MATLAB для разработанной нечеткой модели, выдает в результате значение выходной переменной «кредитоспособность», равное 7,77 балла (рис.60). Это достаточно высокая оценка финансовой состоятельности потенциального клиента, которое может служить основанием для положительного решения со стороны банка о предоставлении кредита под залог.



**Рис.60** Графический интерфейс программы просмотра правил после выполнения процедуры нечеткого вывода для значений входных переменных 8,8,9,9,5.

Выполним анализ построенной системы нечеткого вывода для другого варианта исходных данных с более низкими оценками значений входных переменных, а именно 3,5,4,5,2. Рис.61. иллюстрирует результат выходной переменной "кредитоспособность" равная 4,01 балла.



**Рис.61** Графический интерфейс программы просмотра правил после выполнения процедуры нечеткого вывода для значений входных переменных 3,5,4,5,2.

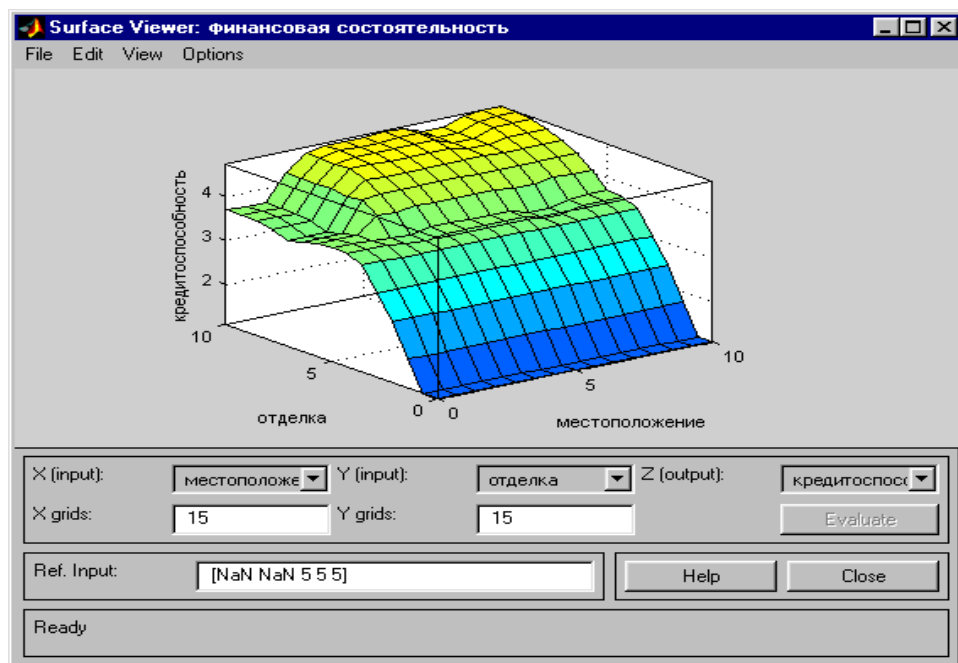
Это достаточно низкая оценка финансовой состоятельности потенциального клиента, которая может служить основанием для отрицательного решения о предоставлении кредита.

Сравнение результатов нечеткого вывода для двух рассмотренных вариантов значений входных переменных показывает, что граничное значение выходной переменной «кредитоспособность», которое влияет

на решение о предоставлении кредита, может быть выбрано в пределах 5 баллов.

Для общего анализа разработанной нечеткой модели может оказаться полезной визуализация соответствующей поверхности нечеткого вывода (рис.62). Данная поверхность нечеткого вывода позволяет установить зависимость значений выходной переменной от значений отдельных входных переменных нечеткой модели. Анализ этих зависимостей может служить основанием для изменения

функций принадлежности входных переменных или нечетких правил с целью повышения адекватности системы нечеткого вывода для конкретных стратегий банков.



**Рис.62. Поверхность нечеткого вывода рассматриваемой модели для входных переменных «местоположение» и «отделка»**

## Заключение

Системы с нечеткой логикой целесообразно применять для сложных процессов, когда нет простой математической модели; если экспертные знания об объекте или о процессе можно сформулировать только в лингвистической форме.

Основные недостатки систем с нечеткой логикой связаны с тем, что:

- исходный набор постулируемых нечетких правил формулируется экспертом-человеком и может оказаться неполным или противоречивым;
- вид и параметры функций принадлежности, описывающих входные и выходные переменные системы, выбираются субъективно и могут оказаться не вполне отражающими реальную действительность.



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Терёхин, В.В. Основы моделирования в MATLAB. Часть 2. Simulink. Учебное пособие. / В.В. Терёхин. - Новокузнецк, 2004. - 304 с.
2. Дьяконов, В.П., Математические пакеты расширения MATLAB. Спец. справочник. / В.П. Дьяконов, В.В. Круглов. - СПб.: Питер, 2001. - 480 с.
3. Потёмкин, В.Г. Инструментальные средства MATLAB 5.x. / В.Г. Потёмкин. – М.: Диалог-МИФИ, 2000. - 336 с.
4. Дьяконов, В. П. MATLAB 6.5 SP1/7 + Simulink 5/6 в математике и моделировании. / В. П. Дьяконов. – М.: Солон-Р, 2005. - 576 с.
5. Леоненков, А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. / А. В. Леоненков. – Санкт-Петербург, 2003. - 736 с.
6. Дьяконов, В. П. MATLAB 6.5 SP1/7/7 SP1/7 SP2 + Simulink 5/6 в. Инструменты искусственного интеллекта и биоинформатики. / В.П. Дьяконов, В.В. Круглов. – М.: Солон-Пресс, 2006. - 456 с.
7. Осовский, С. Нейронные сети для обработки информации / Пер. с польского И.Д. Рудинского. – М.: Финансы и статистика, 2002. - 344 с.
8. Тэрано, Т. Прикладные нечеткие системы. / Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугено. – М.: Мир, 1993. - 368 с.
9. Кричевский, М.Л. Интеллектуальные методы в менеджменте. Нейронные сети. Нечеткая логика. Генетические алгоритмы. Динамические системы. / М.Л. Кричевский. – Питер, 2005. - 304с.
10. Усков, А.А. Интеллектуальные технологии управления. Искусственные нейронные сети и нечеткая логика. / А.А. Усков, А.В. Кузьмин. – М., 2004. - 143 с.
11. Круглов, В.В. Нечеткая логика и искусственные нейронные сети. / В.В. Круглов, М.И. Дли, Р.Ю. Голунов. – М.: Физматлит, 2001. - 224 с.

Учебно-методическое издание

**БОГАТИКОВ Валерий Николаевич  
ДРАНИШНИКОВ Леонид Васильевич  
ПРОРОКОВ Анатолий Евгеньевич**

**ОСНОВЫ ПОСТРОЕНИЯ НЕЧЕТКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**

Подписано в печать 29.11.11. Формат 60\*841\_1/\_16  
Бумага типографская. Офсетная печать. 4,3 уч.-изд.л.  
Тираж 100 экз. Изд. № 27 КФ

Издательство Петрозаводского государственного университета  
Петрозаводск, пр. Ленина, 33

Отпечатано подразделением оперативной полиграфии  
Кольского филиала Петр ГУ  
Апатиты, ул. Космонавтов, 3