

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

ДНІПРОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра прикладної математики

**Конспект лекцій**

**з дисципліни**

**«Чисельні методи у комп'ютерному моделюванні технологічних процесів»**

для здобувачів вищої освіти третього (освітньо-наукового) рівня  
докторів філософії спеціальності 113 «Прикладна математика»  
за освітньо-професійною програмою «Прикладна математика»

ЗАТВЕРДЖЕНО

Редакційно-видавничою  
секцією НМР ДДТУ

від «\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 р.  
протокол № \_\_\_\_\_

Кам'янське

2018

Конспект лекцій з дисципліни «Чисельні методи у комп'ютерному моделюванні технологічних процесів» для здобувачів вищої освіти третього (освітньо-наукового) рівня докторів філософії спеціальності 113 «Прикладна математика» / Укл. С.Є.Самохвалов, О.С.Косухіна – Кам'янське: ДДТУ, 2018. – 53 с.

Укладачі: д.т.н., професор Самохвалов С.Є.

к.т.н., доцент Косухіна О.С.

Відповідальний за випуск : зав. кафедри Самохвалов С.Є.

Рецензент: д.т.н., проф. Шумейко О.О.

(Дніпровський державний технічний університет)

Конспект лекцій затверджений на засіданні кафедри прикладної математики  
протокол № \_\_\_\_ від “ \_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2018 року

Завідувач кафедри \_\_\_\_\_ ( проф. Самохвалов С.Є. )

(підпис)

“ \_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2018 року

## ЗМІСТ

Вступ	4
<i>Тема 1. Багатошвидкісний континуум</i>	5
<i>Тема 2. Додаткові спрощуючі припущення при описанні багатofазних середовищ</i>	10
<i>Тема 3. Газо-рідинні середовища</i>	14
<i>Тема 4. Методи розщеплення за фізичними факторами для ефективно стисливого середовища</i>	22
<i>Тема 6. Твердо-рідинні середовища (суспензії)</i>	30
<i>Тема 7. Теплофізичні процеси в затверділому зливку</i>	41
<i>Тема 8. Багатофазні середовища на основі рідини</i>	47
Перелік посилань	53

## ВСТУП

Важливою задачею розвитку промисловості України є ресурсозбереження при виробництві сталі, а також підвищення якості металопродукції та забезпечення її конкурентоспроможності на світовому ринку.

Проведення експериментів в промислових умовах завжди пов'язано з великими матеріальними витратами, особливо в металургії, де існують додаткові труднощі, обумовлені великими температурами та непрозорістю середовищ. Фізичне ж моделювання з використанням прозорих середовищ може дати лише приблизне уявлення про якісні характеристики процесів через труднощі зберігання критеріїв подібності і нелінійність законів, які їх описують. Цих недоліків позбавлене математичне моделювання, доступність використання якого обумовлене, крім усього іншого, сучасним розвитком обчислювальної техніки.

Визначальними процесами, що впливають на технологічні параметри при виробництві сталі є тепломасопереносні процеси в металургійних агрегатах. Особливістю тепломасопереносних процесів в металургії є той факт, що їх необхідно розглядати в багатофазних середовищах, які перетерплюють фазові перетворення. Це призводить до їх ефективної стисливості, а, значить, до несоленої дальності руху таких середовищ.

Рівняння, які описують динаміку багатофазних середовищ, особливо у випадках наявності фазових перетворень, дуже складні. Їх складність швидко зростає з ростом кількості взаємодіючих фаз. Дійсно, для повного опису багатофазного середовища необхідно знати параметри міжфазної взаємодії, що описують обмін імпульсом, енергією, масою і т. ін., а також стежити за межею поділу фаз, динаміка якої визначається цією взаємодією.

Складність рівнянь для опису багатофазних середовищ спонукає при утворенні математичних моделей процесів з багатофазними, для можливості їх чисельної реалізації на сучасних ЕОМ, рухатись у двох напрямках. По-перше, серед еквівалентних рівнянь використовувати саме ті, які більш зручні для чисельного розв'язання. По-друге, як це звичайно і робиться, за допомогою всіляких припущень, які мають місце в певних умовах, спрощувати вихідні рівняння.

# ТЕМА 1

## БАГАТОШВИДКІСНИЙ КОНТИНУУМ

*Концепція взаємодіючого і взаємопроникаючого континуума та його характеристики. Основні закони збереження в інтегральній та диференціальних формах.*

У даній лекції розглядається коло задач, які обмежені виконанням наступних загальних припущень відносно властивостей багатофазного середовища.

Перше припущення полягає в тому, що розмір включень однієї фази в іншу набагато більший за молекулярні розміри (міжмолекулярних відстаней, середніх довжин вільного пробігу молекул тощо). Це припущення дає можливість використовувати класичні рівняння механіки суцільних середовищ, що базуються на законах збереження основних фізичних величин: маси, імпульсу, енергії. Друге припущення полягає в тому, що розмір неоднорідностей багатофазного середовища набагато менший за відстані, на яких макроскопічні параметри середовища значно змінюються (за винятком поверхонь розриву). Це припущення, з одного боку, дає змогу описувати макроскопічні процеси в середовищі в цілому, з другого боку, дозволяє, використовуючи концепцію взаємопроникаючих та взаємодіючих континуумів, описати поведінку окремо кожної з фаз за допомогою властивих їй макроскопічних параметрів (густини, швидкості, тиску, і т. ін.).

Основна ідея використання багатошвидкісного континууму полягає в тому, що багатофазне середовище зображується у вигляді  $m$  континуумів (по кількості різних фаз), кожен з яких заповнює один і той же об'єм, зайнятий середовищем і рухається один крізь другий. Кожному з континуумів приписуються свої значення макроскопічних параметрів: густини  $\rho_i$ , швидкості  $\vec{v}_i$ , питомої енергії  $E_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) та ін. Таким чином, в кожній точці середовища визначено по  $m$  параметрів, які відносяться до кожної з  $m$  фаз. Крім того, ви-

значаються параметри, які належать середовищу в цілому, а саме: густина середовища:

$$\rho = \sum_i \rho_i \quad (1.1)$$

середньомасова (барицентрична) швидкість:

$$\bar{v} = \frac{1}{\rho} \sum_i \rho_i \bar{v}_i, \quad (1.2)$$

питома енергія (у випадку адитивності внутрішньої енергії):

$$E = \frac{1}{\rho} \sum_i \rho_i E_i. \quad (1.3)$$

В багатошвидкісному середовищі поряд з барицентричною субстанційною похідною

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v^k \nabla^k \quad (1.4)$$

використовуються субстанційні похідні для кожної з фаз:

$$\frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i^k \nabla^k. \quad (1.5)$$

В останніх двох формулах верхні індекси належать до компонент векторів  $(\bar{v}, \bar{v}_i$  та  $\bar{\nabla})$ ,  $x^k$  – координати, а підсумовування виконується за верхніми індексами і повторюється.

За допомогою барицентричної швидкості середовища  $\bar{v}$  визначаються дифузійні швидкості фаз

$$\bar{w}_i = \bar{v}_i - \bar{v}, \quad (1.6)$$

для яких виконується співвідношення

$$\sum_i \rho_i \bar{w}_i = 0. \quad (1.7)$$

Дифузійні швидкості мають зміст швидкостей фаз відносно центру мас середовища в цілому.

Рівняння для багатофазних середовищ, з урахуванням висунутих припущень, базуються на законах збереження відповідних фізичних величин. Будемо виходити при їх записі з балансних співвідношень в інтегральній формі,

записуючи умови збереження відповідних величин у фіксованому в просторі об'ємі  $V$  обмеженому поверхнею  $S$ . Саме така форма рівнянь збереження часто використовується для запису різницевих рівнянь при чисельному їх розв'язанні. При цьому за об'єм  $V$  береться об'єм елементарної комірки розрахункової сітки (контрольний об'єм). Це гарантує консервативність різницевої схеми для будь-якої кількості контрольних об'ємів, в тому числі і для всієї розрахункової області. Вперше такий метод побудови різницевих рівнянь був запропонований А.П.Ванічевим для задач теплопровідності. М.І.Никитенко розвив цей метод для задач течії та теплообміну.

Рівняння балансу мас для кожної з  $m$  компонент середовища мають вигляд

$$\int_V \frac{\partial \rho_i}{\partial t} dV = - \int_S \rho_i v_i^n dS + \int_V \sum_j J_{ji} dV, \quad (1.8)$$

де  $v^n$  – проекція швидкості на зовнішню нормаль  $\vec{n}$  до поверхні  $S$ ;  $J_{ji}$  – інтенсивність переходу маси з  $j$ -ї в  $i$ -у фази (вона може бути і від'ємною). Закон збереження загальної маси середовища вимагає виконання рівності

$$J_{ij} = - J_{ji}. \quad (1.9)$$

Використовуючи для першого доданка правої частини формули (1.8) теорему Остроградського–Гаусса та враховуючи довільність об'єму  $V$ , отримуємо диференціальні рівняння маси для кожної фази:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_i \vec{v}_i) = \sum_j J_{ji}. \quad (1.10)$$

Підсумовуючи по  $i$  ці рівняння та враховуючи визначення (1.1), (1.2) і властивість (1.9), отримуємо рівняння збереження маси (нерозривності) середовища в цілому

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.11)$$

в яке вже не входять інтенсивності  $J_{ij}$ .

Рівняння балансу імпульсу мають вигляд

$$\int_V \frac{\partial \rho_i \bar{v}_i}{\partial t} dV = \int_S (-\rho_i \bar{v}_i v_i^n + \bar{\sigma}_i^n) dS + \int_V (\rho_i \bar{g}_i + \sum_j \bar{P}_{ji}) dV, \quad (1.12)$$

де тензор  $\sigma_i^{kn}$  та вектори  $\bar{g}_i$  та  $\bar{P}_{ji}$  задають дію зовнішніх поверхневих сил, масових об'ємних сил та внутрішніх сил з боку  $j$ -ї фази на  $i$ -у фазу відповідно. За третім законом Ньютона маємо

$$\bar{P}_{ij} = -\bar{P}_{ji}. \quad (1.13)$$

Застосування теореми Остроградського–Гаусса та врахування довільності об'єму  $V$  дозволяє рівняння (1.12) записати в диференціальному вигляді:

$$\frac{\partial \rho_i \bar{v}}{\partial t} + \nabla^k (\rho_i \bar{v}_i v_i^k) = \nabla^k \bar{\sigma}_i^k + \rho_i \bar{g}_i + \sum_j \bar{P}_{ji}, \quad (1.14)$$

або, з урахуванням позначення (1.5) та рівняння (1.10), у такому вигляді:

$$\rho_i \frac{d \bar{v}_i}{dt} = \nabla^k \bar{\sigma}_i^k + \rho_i \bar{g}_i + \sum_j (\bar{P}_{ji} - J_{ji} \bar{v}_i). \quad (1.15)$$

Підсумувавши ці рівняння за всіма фазами, отримаємо рівняння імпульсу середовища в цілому:

$$\rho \frac{d \bar{v}}{dt} = \nabla^k \bar{\sigma}^k + \rho \bar{g} - \sum_i \nabla^k (\rho_i \bar{w}_i w_i^k). \quad (1.16)$$

де

$$\sigma^{kn} = \sum_i \sigma_i^{kn}, \quad (1.17)$$

$$\bar{g} = \frac{1}{\rho} \sum_i \rho_i \bar{g}_i. \quad (1.1.18)$$

Це рівняння містить доданок, який залежить від відносного руху окремих фаз.

Балансні рівняння для енергії кожної з фаз мають такий вигляд:

$$\int_V \frac{\partial \rho_i E_i}{\partial t} dV = \int_S (-\rho_i E_i v_i^n + c_i^n - q_i^n) dS + \int_V (\rho_i \bar{g}_i \cdot \bar{v}_i + \sum_j E_{ji} + Q_i) dV, \quad (1.19)$$

де вектор  $\bar{c}_i$  характеризує роботу поверхневих сил (в окремому випадку  $\bar{c}_i = \bar{\sigma}_i^k v^k$ );  $\bar{q}_i$  – потік тепла через поверхню  $S$ ;  $E_{ji}$  – інтенсивність обміну енер-



гією між  $i$ -ю та  $j$ -ю фазами, яка внаслідок закону збереження енергії має властивість

$$E_{ij} = -E_{ji}; \quad (1.20)$$

$Q_i$  – об’ємне джерело тепла стороннього походження.

Диференціальним аналогом рівнянь (1.19) є рівняння

$$\frac{\partial \rho_i E_i}{\partial t} + \nabla^k (\rho_i E_i v_i^k) = \bar{\nabla} \cdot (\bar{c}_i - \bar{q}_i) + \rho_i \bar{g}_i \cdot \bar{v}_i + \sum_j E_{ji} + Q_i, \quad (1.21)$$

яким, з урахуванням (1.5), (1.10), можна, також, надати вигляду

$$\rho_i \frac{d_i E_i}{dt} = \bar{\nabla} \cdot (\bar{c}_i - \bar{q}_i) + \rho_i \bar{g}_i \cdot \bar{v}_i + \sum_j (E_{ji} - J_{ji} E_i) + Q_i. \quad (1.22)$$

Підсумовуючи ці рівняння по  $i$  та враховуючи визначення (1.3) – (1.6), а також властивості (1.9) і (1.20), одержуємо рівняння енергії для середовища в цілому:

$$\rho \frac{dE}{dt} = \bar{\nabla} \cdot (\bar{c} - \bar{q}) + \rho \bar{g} \cdot \bar{v} + Q + \sum_i \left[ \rho_i \bar{g}_i \cdot \bar{w}_i - \nabla^k (\rho_i E_i w_i^k) \right], \quad (1.23)$$

$$\text{Де } \bar{c} = \sum_i \bar{c}_i, \quad \bar{q} = \sum_i \bar{q}_i, \quad Q = \sum_i Q_i. \quad (1.24)$$

Рівняння енергії (1.23), як і рівняння імпульсу (1.16) середовища в цілому, залежить від характеру відносного руху окремих фаз.

Таким чином, основні закони збереження маси, енергії та імпульсу приводять для  $m$ -фазного середовища до  $m$  рівнянь маси (1.10),  $m$  векторних рівнянь руху (1.15) та  $m$  рівнянь енергії (1.22) по одному для кожної з фаз, а також до трьох додаткових залежних від них рівнянь нерозривності (1.14), руху (1.16) та енергії (1.23) середовища в цілому. Ці останні рівняння, а відміну від відповідних рівнянь для окремих фаз, не вміщують параметрів  $J_{ij}$ ,  $P_{ij}$  та  $E_{ij}$ , які характеризують міжфазні взаємодії, які, не зважаючи на свій простий у даному записі вигляд, можуть мати досить складну структуру, важку для моделювання. Тому рівняння для середовища в цілому є більш простими, але й більш загальними, завдяки чому вони можуть досить повно описувати динаміку середовища в цілому.

## ТЕМА 2

### ДОДАТКОВІ СПРОЦЮЮЧІ ПРИПУЩЕННЯ ПРИ ОПИСАННІ БАГАТОФАЗНИХ СЕРЕДОВИЩ

*Дифузійне наближення. Ньютоновські середовища. Алгебраїчні моделі описання турбулентності. Локально-рівноважні середовища.*

Сказане на попередній лекції настановує на ідею такого підходу до моделювання багатофазного середовища, який відбиває шлях поступового наближення до повного, але досить складного опису через прості етапи. Спочатку, користуючись спрощуючими припущеннями відносно доданків, які містять у собі величини, що належать до окремих фаз, розв'язуються рівняння для середовища в цілому. Якщо отриманої інформації виявляється недостатньо, ці рівняння доповнюються ще деякою кількістю рівнянь для окремих фаз (від однієї до  $m-1$ ). Кількість додаткових рівнянь визначається необхідною деталізацією опису процесу та можливостями виконання необхідних обчислень (здебільшого технічними можливостями техніки, яка використовується). Ясно, що приєднувати до рівнянь для середовища в цілому рівняння для всіх фаз зайве, внаслідок їх взаємозалежності.

Для відносного руху фаз в багатьох задачах припущення, що спрощують, досить природні й часто використовуються. Так, величини дифузійних швидкостей часто бувають невеликими і квадратами їх у рівняннях для середовища в цілому можна знехтувати. Внаслідок цього приходимо до так званого дифузійного наближення, але часто використовується в механіці багатокомпонентних сумішей. В цьому наближенні рівняння руху для середовища в цілому значно спрощується і вже не залежить від будь-яких величин, що належать окремим фазам:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla^k \vec{\sigma}^k + \rho \vec{g} . \quad (1.25)$$

Тензор  $\sigma^{kn}$  розкладається на дві компоненти:

$$\sigma^{kn} = -p\delta^{kn} + \tau^{kn}, \quad (1.26)$$

перша з яких визначається тиском  $p$  ( $\delta^{kn}$  – дельта символ Кронекера), а друга  $\tau^{kn}$  (так званий в'язкий тензор напружень) – швидкістю:

$$\tau^{kn} = \mu \left[ \left( \nabla^k v^n + \nabla^n v^k \right) - \frac{2}{3} \delta^{kn} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right] + \zeta \delta^{kn} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}, \quad (1.27)$$

де  $\mu$  та  $\zeta$  – динамічна та друга в'язкість середовища. В разі сталості коефіцієнтів  $\mu$  та  $\zeta$  рівняння (1.25) набуває вигляду рівняння Нав'є–Стокса:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v} + (\zeta + \mu/3) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \rho \vec{g}, \quad (1.28)$$

яке, в разі нестисливості середовища, тобто коли виконується умова

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (1.29)$$

матиме зовсім простий вигляд

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{g}, \quad (1.30)$$

Рівняння маси (1.10) в дифузійному наближенні не змінюються, але ми запишемо їх з явним виділення дифузійних швидкостей:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_i \vec{v}) = -\vec{\nabla} \cdot (\rho_i \vec{w}_i) + \sum_j J_{ji}. \quad (1.31)$$

В ізотропному середовищі при молекулярній ізотермічній дифузії

$$\rho_i \vec{w}_i = -D_i \vec{\nabla} \rho_i, \quad (1.32)$$

де  $D_i$  – коефіцієнт дифузії  $i$ -ї фази. З урахуванням цієї формули рівняння (1.31) набуває вигляду рівняння конвективно-дифузійного переносу маси:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_i \vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot (D_i \vec{\nabla} \rho_i) + \sum_j J_{ji}. \quad (1.33)$$

Ще одним важливим прикладом дифузійного процесу, який відбувається в поруватих середовищах, зокрема в твердо-рідинній зоні зливка, що кристалізується є закон фільтрації Дарсі:

$$\rho_i \vec{w}_i = -k_i \vec{\nabla} p. \quad (1.34)$$

При виконанні цього закону, як правило, швидкістю середовища  $\vec{v}$  можна знехтувати й рівняння маси (1.31) набуває вигляду:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (k_i \vec{\nabla} p) + \sum_j J_{ji}. \quad (1.35)$$

Деякі інші припущення щодо дифузійного струму будуть в конкретних випадках розглядатись окремо в подальшому тексті.

Рівняння енергії як для окремих фаз (1.22), так і для середовища в цілому (1.23) здебільшого виступають як теплові рівняння. Часто кінетичними енергіями, а також роботами як поверхневих, так і об'ємних сил можна знехтувати порівняно з внутрішніми енергіями (наприклад, при розгляді теплофізичних задач металургії, якій властиві високі температури й повільні швидкості макроруху). В такому випадку питомі енергії окремих фаз збігаються з відповідними внутрішніми енергіями, для яких вважаємо відомими рівняння стану:

$$E_i = E_i(p_i, T_i), \quad (1.36)$$

де  $p_i$  та  $T_i$  – тиск та температура  $i$ -ї фази. У вибраному наближенні, коли роботою тиску можна знехтувати,  $E_i$  від тиску  $p_i$  фактично не залежить і

$$dE_i = C_i dT_i, \quad (1.37)$$

де  $C_i$  – питома теплоємність  $i$ -ї фази при сталому об'ємі.

Враховуючи (1.37) та виконуючи обґрунтовані вище нехтування, замість (1.22) отримуємо теплове рівняння для  $i$ -ї фази:

$$C_i \rho_i \frac{dT_i}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q}_i + \sum_j (E_{ji} - J_{ji} E_i) + Q_i. \quad (1.38)$$

В разі локальної рівноважності середовища тиски та температури окремих фаз в кожній точці збігаються:

$$p_i = p, \quad T_i = T, \quad (1.39)$$

що і є визначенням локальної рівноважності середовища та тиску  $p$  і температури  $T$  середовища в цілому (таке визначення можливе тільки за умови локально рівноважного середовища). В цьому випадку питома енергія середовища в цілому залежить лише від  $p$  та  $T$  (при нехтуванні роботою тиску залежність від  $p$  фактично відсутня):

$$E(p, T) = \frac{1}{\rho} \sum_i \rho_i E_i(p, T). \quad (1.40)$$

В тому ж наближенні, що і (1.37), отримуємо

$$dE = C dt, \quad (1.41)$$

де  $C$  – питома теплоємність середовища в цілому при сталому об’ємі, для якої з використанням (1.40) знаходимо

$$C = \frac{1}{\rho} \sum_i \rho_i C_i. \quad (1.42)$$

При записі теплового рівняння для середовища в цілому врахуємо закон Фур’є, відповідно до якого тепловий потік  $\vec{q}$  пропорційний градієнту температури:

$$\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T, \quad (1.43)$$

де  $\lambda$  – теплопровідність середовища. Таким чином, теплове рівняння середовища в цілому конкретно для нашого випадку рівняння (1.23) набуває вигляду

$$C \rho \frac{dT}{dt} = \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) + Q - \sum_i \nabla^k (\rho_i E_i w_i^k). \quad (1.44)$$

Останнім доданком в рівнянні (1.44) часто можна знехтувати, що перетворює його на звичайне рівняння конвективного теплопереносу:

$$C \rho \frac{dT}{dt} = \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) + Q. \quad (1.45)$$

## ЛЕКЦІЯ 3

### ГАЗО-РІДИННІ СЕРЕДОВИЩА

*Вакуумне наближення. Об'ємні густини газової та рідкої фаз. Наближення малої концентрації газової фази. Наближення Бусінеска. Основні рівняння газо-рідинного середовища. Фактори несоленоїдальності.*

Газорідинні середовища дуже часто зустрічаються в металургійному виробництві, зокрема у вигляді середовищ з розплавом як несучої рідини, яка містить у собі різноманітні газові включення. Вони мають місце практично на всіх етапах виробництва сталі, починаючи від виплавки її в конвертерах або мартенівських печах під час їх продувки, в ковшах при доводці на етапі поза пічної обробки, і закінчуючи кристалізацією, яка супроводжується газовиділенням, інколи досить значним (наприклад, при кристалізації зливків киплячої сталі).

Густина газів на кілька порядків менша за густину рідин. Це особливо стосується випадку розплаву, де середовищем виступає несуча рідина з характерними для металургії газовими включеннями, коли відношення густини несучої рідини до густини газу досягає  $10^4$ . Дуже хорошим наближенням за цих умов буде “вакуумне” наближення, якому відповідає нульовий порядок щодо густин газу та рідини.

Розглянемо тепер основні рівняння двофазного газорідинного середовища в цьому наближенні.

Нехай індекс 1 відноситься до рідинної фази, а 2 – до газової. Припустимо, що відомі істинні густини кожної з фаз  $\rho_i^0$ , тобто відношення маси фази до об'єму, який вона займає. Тоді густина фази в середовищі може бути визначена за допомогою об'ємних часток (густин)  $\alpha_i$  фаз в середовищі:

$$\rho_i = \alpha_i \rho_i^0, \quad (2.1)$$

причому

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1. \quad (2.2)$$

В наслідок такої взаємозалежності надалі будемо використовувати тільки об'ємну частку газової фази, позначаючи її  $\alpha = \alpha_z$ . Отже,

$$\rho_z = \alpha \rho_z^0. \quad (2.3)$$

У нашому наближенні  $\rho_2^0 / \rho_1^0 \rightarrow 0$  і густина середовища в цілому збігається з густиною рідини:

$$\rho = \rho_1 = (1 - \alpha) \rho_1^0, \quad (2.4)$$

як і барицентрична швидкість:

$$\bar{v} = \bar{v}_1. \quad (2.5)$$

Внаслідок цього не дорівнює нулю тільки дифузійна швидкість газу, яка в нашому випадку збігається з швидкістю газу відносно несучої рідини, а тому індекс біля неї можна опустити:

$$\bar{w} = \bar{w}_2 = \bar{v}_2 - \bar{v}. \quad (2.6)$$

Якщо в рівняння нерозривності середовища в цілому (1.11) підставити вираз (2.4) і припустити сталість густини рідини  $\rho_1^0 = \text{const}$ , можна отримати рівняння відносно  $\alpha$ :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\alpha \bar{v}) = \bar{\nabla} \cdot \bar{v}. \quad (2.7)$$

Рівняння переносу рідинної фази в нашому випадку, очевидно, збігається з рівнянням нерозривності і нічого нового не дає. Але рівняння переносу маси для фази виявляється досить інформативним. Для його використання необхідно задати рівняння стану газової фази:

$$\rho_2^0 = \rho_2^0(p, T). \quad (2.8)$$

Підставляючи (2.3) в рівняння маси (1.10), для газової фази (при  $i=2$ ) одержуємо:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \bar{\nabla} \cdot (\alpha \bar{v}) = -\bar{\nabla} \cdot (\alpha \bar{w}) + \Phi, \quad (2.9)$$

де визначено

$$\psi = J_{12} / \rho_2^0 \quad (2.10)$$

(об'ємне джерело газової фази) та

$$\Phi = \psi - \alpha \frac{d_2 \ln \rho_2^0}{dt} \quad (2.11)$$

(ефективне об'ємне джерело газової фази). З урахуванням рівняння стану (2.8)

маємо

$$\frac{d_2 \ln \rho_2^0}{dt} = \xi \frac{d_2 p}{dt} + \eta \frac{d_2 T}{dt}, \quad (2.12)$$

де

$$\xi = \frac{\partial}{\partial p} \ln \rho_2^0, \quad \eta = \frac{\partial}{\partial T} \ln \rho_2^0. \quad (2.13)$$

Порівняння рівнянь (2.7) та (2.9), з урахуванням (2.11), дає можливість знайти вираз для дивергенції швидкості середовища:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -\vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{w}) + \psi - \alpha \frac{d_2 \ln \rho_2^0}{dt}. \quad (2.14)$$

Таким чином, газорідне середовище, незважаючи на нестисливість несучої рідини, стисливе. Насамперед, воно стисливе внаслідок наявності об'ємного джерела газової фази  $\psi$ . Крім того, газова фаза стислива. Цей фактор враховується останнім доданком у правій частині формули (2.14), пропорційним  $\alpha$  та враховуючим рівнянням стану газової фази (2.8). Але навіть при відсутності джерела газової фази  $\psi = 0$  та в наближенні її нестисливості, коли рівняння стану газової фази має вигляд  $\rho_2^0 = \text{const}$  і останнього доданка в (2.14) не буде, середовище ефективно буде стисливим, тобто дивергенція його швидкості буде ненульовою:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -\vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{w}), \quad (2.15)$$

якщо ненульовою буде дифузійна швидкість газу  $\vec{w}$ . Очевидно, обидва останні фактори стисливості зникають при  $\alpha \rightarrow 0$ .

Зазначимо, що саме дивергенція швидкості середовища виступає як об'ємне джерело об'ємної густини газу.



Рівняння руху середовища в цілому (2.16) має доданок, що залежить від густини та дифузійних швидкостей окремих фаз, який у разі двохфазного середовища записується у вигляді

$$\nabla^k (\rho_1 \bar{w}_1 w_1^k + \rho_2 \bar{w}_2 w_2^k) = \rho_1^0 \nabla^k \left[ (1 - \alpha) \bar{w}_1 w_1^k + \alpha (\rho_2^0 / \rho_1^0) \bar{w}_2 w_2^k \right]. \quad (2.16)$$

У “вакуумному” наближенні, що зараз розглядається,  $\bar{w}_1 \rightarrow 0$  та  $\rho_2^0 / \rho_1^0 \rightarrow 0$ , і доданок (2.16) також наближається до нуля, внаслідок він не має вже характеристик окремих фаз:

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \nabla^k \bar{\sigma}^k + \rho \bar{g}. \quad (2.17)$$

Як було показано в попередньому параграфі, це рівняння може бути записане у вигляді рівняння Нав’є–Стокса

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = -\bar{\nabla} p + \mu \Delta \bar{v} + (\zeta + \mu/3) \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{v}) + \rho \bar{g}, \quad (2.18)$$

яке слід ще доповнити рівнянням (2.14) для дивергенції швидкості.

Динамічну в’язкість середовища  $\mu$  можна підрахувати, виходячи з динамічної в’язкості рідини  $\mu_1$  в наближенні слабкої стисливості газу та малого об’ємного газоміщення  $\alpha$ . В цьому випадку газорідинне середовище можна розглядати як суспензію і скористатися з формули А.Енштейна:

$$\mu = \mu_1 (1 + A\alpha). \quad (2.19)$$

В припущенні кульової форми газових включень  $A=2,5$ . При відхиленні газових пупирів від кульової форми коефіцієнт  $A$  зростає.

Для замикання наведених рівнянь руху газорідинного середовища (2.9), (2.14) та (2.18) необхідно ще визначити дифузійну швидкість газової фази  $\bar{w}$ . Для цього можна використати рівняння руху газової фази (2.15):

$$\rho_2 \frac{d_2(\bar{v} + \bar{w})}{dt} = \nabla^k \bar{\sigma}_2^k + \rho_2 \bar{g}_2 + \bar{F}_{12} - J_{12}(\bar{v} + \bar{w}). \quad (2.20)$$

Використання цього рівняння, як і рівняння переносу газу (2.9), не суперечить наближенню  $\rho_2^0 / \rho_2^0 \rightarrow 0$ , але тут слід відзначити його малу ефективність декількох параметрів, моделювання яких можливе тільки в досить простих окремих

випадках, а в більш-менш загальних випадках практично неможливе. Це стосується тензора  $\sigma_2^{kn}$ , що описує поверхневі напруження, та вектора  $\vec{P}_{12}$  густини сили дії на газову фазу з боку рідинної фази. По-друге, “вакуумне” наближення  $\rho_2^0 / \rho_1^0 \rightarrow 0$  дозволяє знехтувати інерційними властивостями газової фази, якщо вважати процеси встановлення руху газової фази відносно рідинної миттєвими. З цього випливає досить корисний практичний висновок: у “вакуумному” наближенні дифузійна швидкість газової фази визначається деякою (яка залежить від конкретних умов розглядуваної задачі) функціональною залежністю від властивостей газу та параметрів руху рідини, і для її знаходження немає необхідності розв’язувати диференціальне рівняння типу (2.20), яке саме вміщує параметри та параметри, що погано моделюються, а можна безпосередньо моделювати вираз для  $\vec{w}$ . Крім формул, які наводились у попередньому параграфі для дифузійних швидкостей у загальному вигляді (1.32), (1.34) і які також можуть бути застосовані в нашому випадку, досить поширеним для газу в рідині є вираз

$$\vec{w} = \vec{w}^c = -w^c \vec{g} / g, \quad (2.21)$$

відповідаючи руху газових пупирів під дією масової об’ємної сили  $\vec{g}$ . Існує багато конкретних виразів для величини швидкості газового пупиря  $w^c$ , які знайдено як теоретично з певними припущеннями, так і експериментально. Найбільш поширеним серед них є такий вираз:

$$w^c = \frac{2g}{9\mu_1} \left| \rho_1^0 - \rho_1^0 \right| R^2, \quad (2.22)$$

який є формулою Стокса, що має місце при малих радіусах  $R$  сферичних пупирів, коли виконується умова

$$\text{Re} = \frac{w^c R}{\nu_1} < 1, \quad (2.23)$$

де  $\nu_1 = \mu_1 / \rho_1^0$  – кінематична в’язкість рідини, а також вираз, запропонований І.Г.Маленковим:

$$w^c = \sqrt{\frac{\sigma}{R(\rho_1^0 - \rho_2^0)} + gR \left(1 - \frac{\rho_2^0}{\rho_1^0}\right)}, \quad (2.24)$$

який виконується в області, автомодельній відносно в'язкості ( $\sigma$  – поверхневий натяг). “Вакуумне” наближення спрощує обидва вирази:

$$w^c = \frac{2g}{9\mu_1} \rho_1^0 R^2, \quad (2.25)$$

$$w^c = \sqrt{\sigma / R\rho_1^0 + gR}. \quad (2.26)$$

Наведені вище формули отримані для випадку окремих пазирів газу. Ці формули можна використовувати і у випадку колективного руху пазирів за умови відсутності впливу одного пазиря на інший, а також у випадку нехтування випадковими факторами, що призводять до нерегулярностей руху. При турбулентному русі середовища до складової дифузійної швидкості  $\bar{w}^c$ , яка описує регулярний колективний рух газової фази і яка може бути знайдена за наведеними вище формулами, додається складова  $\bar{w}^d$  на зразок молекулярної дифузійної швидкості, яку можна визначити за формулою:

$$\alpha \bar{w}^d = -D \bar{\nabla} \alpha, \quad (2.27)$$

де  $D$  – ефективний коефіцієнт, що описує рознос пазирів за рахунок нерегулярності їх руху та за допомогою турбулентних вихорів. З урахуванням цієї складової дифузійної швидкості рівняння переносу газової фази (2.9) набуває вигляду

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot [\alpha(\bar{v} + \bar{w}^c)] = \bar{\nabla} \cdot (D \bar{\nabla} \alpha) + \Phi \quad (2.28)$$

Запропонований підхід ніде не містить параметрів міжфазної взаємодії. Вони непрямо враховуються в дифузійній швидкості газу. Вплив же газу на рух рідини в нашому наближенні проявляється:

- 1) в змінній густині  $\rho = (1 - \alpha)\rho_1^0$ , завдяки чому виникає архімедова сила;

2) в ефективній стисливості середовища через стисливість та рух газу (а також можливе його виділення).

Міжфазна сила дії газу на рідину  $\bar{m}_{21}$  ніде в нашому наближенні не зустрічається, тому що має порядок, вищий за  $\rho_2^0 / \rho_1^0$ . З цієї точки зору моделі газорідинних середовищ, в яких основною рушійною силою для рідини є сила дії на неї з боку газової фази  $\bar{m}_{21}$ , незалежно від конкретного вигляду поступаючого виразу для цієї сили, не зважаючи на їх поширеність, є не досить коректними.

Рівняння енергії газорідинного середовища використовуватимемо лише у вигляді теплового рівняння для середовища в цілому (1.44) (припускаючи його локальну рівноважність), в якому останній доданок, що залежить від параметрів окремих фаз, у “вакуумному” наближенні зникає з тих же причин, що і відповідний доданок у рівнянні руху (див. пояснення після формули (2.16):

$$C\rho \frac{dT}{dt} = \bar{\nabla} \cdot (\lambda \bar{\nabla} T) + Q. \quad (2.29)$$

Теплофізичні характеристики газорідинного середовища можна визначити як відповідні характеристики для поруватого середовища. Так, теплоємність визначається по формулі (1.42), яка в нашому випадку має вигляд:

$$C = \frac{C_1(1-\alpha)\rho_1^0 + C_2\alpha\rho_2^0}{(1-\alpha)\rho_1^0 + \alpha\rho_2^0}. \quad (2.30)$$

Для визначення теплопровідності газорідинного середовища можна використати формулу Максвелла:

$$\lambda = \lambda_1 \frac{\lambda_2 + 2\lambda_1 - 2\alpha(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_2 + 2\lambda_1 + \alpha(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad (2.31)$$

яка була виведена в припущенні сферичних включень, розташованих на великій відстані одне від одного, тобто для малих  $\alpha$ . У “вакуумному” наближенні замість (2.30) отримуємо

$$C = C_1, \quad (2.32)$$

тобто теплоємність газорідинного середовища збігається з теплоємністю рідини. Теплопровідність газу набагато ( на кілька порядків) менша за теплопровідність розплаву сталі, який у нас, переважно й буде виступати як несуча рідина, а тому для спрощення виразу (2.31) можна застосувати наближення, в якому  $\lambda_1 / \lambda_2 \rightarrow 0$ :

$$\lambda = \lambda_1 \frac{2(1-\alpha)}{2+\alpha}. \quad (2.33)$$

Внаслідок цього отримуємо

$$(1-\alpha) \frac{dT}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \left[ a_1 \frac{2(1-\alpha)}{2+\alpha} \vec{\nabla} T \right] + Q / C_1 \rho_1^0, \quad (2.34)$$

де  $a_1 = \lambda_1 / C_1 \rho_1^0$  – температуропровідність рідини.

## ТЕМА 4.

### МЕТОДИ РОЗЩЕПЛЕННЯ ЗА ФІЗИЧНИМИ ФАКТОРАМИ ДЛЯ ЕФЕКТИВНО СТИСЛИВОГО СЕРЕДОВИЩА

*Методи розщеплення за фізичними факторами. Соліноїдальне наближення. Методи врахування ефектів несоленоїдальності.*

Розглянуті моделі багатофазних середовищ досить складні і тому ставлять певні вимоги до використання чисельних методів для їх реалізації. Одна з таких вимог – це фізичність чисельного методу, тобто, по можливості, найбільш повна відповідність його фізиці процесу. Друга вимога полягає в тому, щоб алгоритм обчислень міг бути розщепленим на більш прості, самостійно зрозумілі та фізично наочні елементи, доступні незалежному аналізу. При невиконанні цих вимог є велика ймовірність для відносно складної моделі написати програму, яку ніколи не вдасться відлагодити.

З іншого боку, складні моделі для свого формулювання потребують математичного експериментування з метою з'ясування, які фактори значущі в даних умовах, а якими можна знехтувати. Для фізичних та розщеплених алгоритмів обчислень вплив різних факторів на результат розрахунків виявляється простіше і наочніше, що спрощує проведення математичних експериментів і, у підсумку, прискорює процес створення адекватної математичної моделі процесу, який вивчається.

Остання обставина досить важлива з точки зору оцінки ефективності алгоритму, оскільки час, який витрачається на створення математичної моделі, може набагато перевищувати час роботи з готовою моделлю і має тенденцію до зростання, що значною мірою впливає на вартість програми.

Все це повною мірою стосується математичних моделей багатофазних середовищ, що і обумовило вибір чисельних методів.

Розглянемо випадок несоленоїдального руху середовища. Цей випадок найбільш характерний для багатофазних середовищ, оскільки несоленоїдальність руху може бути навіть у випадку нестисливості кожної з компонент сере-

довища і відсутності фазових перетворень за умови відносного руху фаз. Фазові ж перетворення в середовищі при наявності кількох фаз є швидше правилом, ніж винятком.

Метод чисельного розв'язання рівнянь гідродинаміки та теплопереносу, який пропонується нами, можна реалізувати при будь-якому виразі для дивергенції швидкості – як нульовому, так і ненульовому не залежно від природи його походження – через стисливість окремих фаз, наявність джерел або взаємний рух фаз. Тому під стисливим середовищем будемо розуміти ефективно стисливе середовище, тобто середовище з ненульовою тотожною дивергенцією барицентричної швидкості.

Припустимо, що відомо рівняння стану середовища в цілому:

$$\rho = \rho(p, T, \xi), \quad (3.1)$$

де  $\xi$  – набір параметрів, які, крім тиску  $p$  та температури  $T$ , можуть характеризувати середовище (об'ємні густини фаз, їх теплофізичні характеристики тощо). В окремих випадках рівняння (3.1) можна отримати з рівнянь стану фаз з яких складається середовище. Наприклад, в локально рівноважному випадку за умови залежності рівнянь стану фаз, складаючи середовище, тільки від локально рівноважних значень  $p$  і  $T$

$$\rho_i^0 = \rho_i^0(p, T), \quad (3.2)$$

маємо

$$\rho = \sum_i \alpha_i \rho_i^0(p, T). \quad (3.3)$$

Скористаємось рівнянням (3.1) для визначення похідної від густини за часом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = f = \rho'_p \frac{\partial p}{\partial t} + \rho'_T \frac{\partial T}{\partial t} + \rho'_\xi \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad (3.4)$$

де  $\rho'_x$  – частина похідної від  $\rho$  по  $x$ . Використовуючи тепер рівняння нерозривності (1.11), знаходимо дивергенцію імпульсу середовища  $\rho \vec{v}$  як функцію теплофізичних параметрів середовища та їх похідних за часом:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = -f. \quad (3.5)$$

Рівняння (3.5) несе в собі інформацію про рівняння стану середовища і виконання рівняння (3.5) при розв'язанні рівнянь гідродинаміки середовища факт виконання для нього рівняння стану. Для нестисливого середовища з рівнянням стану  $\rho = \text{const}$  з (3.5) впливає умова соленоїдальності

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0.$$

Вихідну систему рівнянь запишемо у вигляді

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = R(\rho, \vec{v}) - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla}(\rho, \vec{v}), \quad (3.7)$$

доповнюючи її рівнянням (3.5), що впливає, як відзначалося вище, з рівняння стану середовища. Функція  $R(\rho, \vec{v})$  від густини  $\rho$ , швидкості  $\vec{v}$  та їх просторових похідних, наприклад, у випадку рівняння Нав'є–Стокса (1.28) має вигляд:

$$R(\rho, \vec{v}) = -(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{v} + \left( \frac{\zeta}{\rho} + \frac{\mu}{3\rho} \right) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \vec{g}. \quad (3.8)$$

Відкидаємо доданок з тиском в рівнянні (3.6). Тоді система (3.6), (3.7) набуває вигляду:

$$\vec{v} - \vec{v}^n = \tau R(\rho, \vec{v}), \quad (3.9)$$

$$\rho^{n+1} - \rho^n = -\tau \vec{\nabla}(\rho \vec{v}), \quad (3.10)$$

$$\vec{v}^{n+1} - \vec{v} = -\tau (1/\rho) \vec{\nabla} p, \quad (3.11)$$

Для одержання рівняння для тиску скористаємось рівнянням (3.5), вимагаючи його точного виконання на  $n+1$ -му часовому шарі:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho^{n+1} \vec{v}^{n+1}) = -f^{n+1}. \quad (3.12)$$

Права частина формули (3.11) відповідає  $n+1$ -му часовому шару. Домножаючи рівняння (3.11) на  $\rho^{n+1}$  і беручи від обох його частин дивергенцію з врахуванням (3.12), отримуємо рівняння для визначення тиску на  $n+1$ -му часовому шарі:

$$\Delta p^{n+1} = [\vec{\nabla}(\rho^{n+1} \vec{v}) + f^{n+1}] / \tau. \quad (3.13)$$



Для рівняння (3.10) може бути прийнята тільки неявна схема розрахунку. Якщо для рівняння (3.9) візьмемо явну схему, для визначення руху стисливого середовища отримуємо систему рівнянь:

$$I \quad \vec{v} = \vec{v}^n + \tau R(\rho^n, \vec{v}^n); \quad (3.14)$$

$$II \quad p^{n+1} = \rho^n - \tau \bar{\nabla}(\rho^{n+1} \vec{v}^{n+1}), \quad (3.15)$$

$$\Delta p^{n+1} = [\bar{\nabla}(\rho^{n+1} \vec{v}^{n+1}) + f^{n+1}] / \tau; \quad (3.16)$$

$$III \quad \vec{v}^{n+1, k} = \vec{v} - \tau (1 / \rho^{n+1}) \bar{\nabla} p^{n+1}. \quad (3.17)$$

На першому етапі без врахування поля тиску знаходиться проміжна швидкість  $\vec{v}$ . З цією швидкістю не виконується рівняння (3.5), отже, середовище не задовольняє вихідне рівняння стану (3.1).

На другому етапі визначаються густина і тиск, за допомогою яких на третьому етапі проміжна швидкість  $\vec{v}$  “підганяється” до значення швидкості на  $n+1$ -му часовому шарі, яка вже задовольняє рівняння (3.5), чим і забезпечується виконання для середовища рівняння стану (3.1).

Виконання рівняння стану для середовища гарантовано завдяки тому, що саме рівняння для тиску отримано з умови виконання рівняння (3.5) і чим точніше знайдено тиск, тим точніше середовище буде задовольняти своє рівняння стану.

На другому і третьому етапах необхідно розв’язувати систему взаємозв’язаних рівнянь (3.15)–(3.17). Використаємо для цього метод ітерацій, але на відміну від методу, який був запропонований для стратифікованого середовища, щоб уникнути розв’язання на кожному ітераційному кроці рівняння Пуассона, замінимо його відповідним еволюційним рівнянням

$$\tilde{p} = p + \omega [\Delta p - \bar{\nabla}(\rho \vec{v}) / \tau - f / \tau] \quad (3.18)$$

з деяким параметром еволюції  $\omega$ , що забезпечує збіжність еволюційного процесу (3.18) (параметр  $\omega$  залежить від характеристик розрахункової сітки і вибір його значення будемо обговорювати в наступній главі при визначенні скінчено-

різницевих схем), і будемо розв'язувати всі рівняння другого і третього етапів (3.15)–(3.17) в єдиному ітераційному процесі, що дозволяє значно зекономити час розрахунку:

$$\text{I} \quad \vec{v} = \vec{v}^n + \tau R(\rho^n, \vec{v}^n), \quad (3.19)$$

$$\vec{v}^{n+1,0} = \vec{v}^n, \quad p^{n+1,0} = p^n, \quad \rho^{n+1,0} = \rho^n; \quad (3.20)$$

$$\text{II} \quad \rho^{n+1,k+1} = \rho^n - \tau \bar{\nabla}(\rho^{n+1,k} \vec{v}^{n+1,k}), \quad (3.21)$$

$$p^{n+1,k+1} = p^{n+1,k} + \omega \left[ \Delta p^{n+1,k} - \bar{\nabla}(\rho^{n+1,k} \vec{v}) / \tau - f^{n+1,k} / \tau \right]; \quad (3.22)$$

$$\text{III} \quad \vec{v}^{n+1,k+1} = \vec{v} - \tau(1/\rho^{n+1,k}) \bar{\nabla} p^{n+1,k}. \quad (3.23)$$

Послідовність обчислення густини та тиску на другому етапі не має великого значення.

Потребує деякого пояснення обчислення  $f^{n+1}$ . За своїм визначенням (3.4), функція  $f$  залежить від  $p$ ,  $T$ ,  $\zeta$  та їх похідних за часом і для знаходження значення функції  $f$  на  $n+1$ -му часовому шарі  $f^{n+1}$  необхідно знати значення цих параметрів при  $t = \tau(n+1)$ . Для цього треба або знайти їх значення до початку другого етапу (це може стосуватись значень  $T$  і  $\zeta$ ), або ж включити їх знаходження до загального ітераційного процесу, надавши їм додатковий індекс  $k$ . Для тиску, очевидно, так і слід робити, оскільки рівняння для його знаходження вже само по собі включене в ітераційний процес. Що ж стосується, наприклад, температури  $T$  (та інших параметрів  $\zeta$ ), то в разі використання явної схеми при розв'язанні рівняння теплопереносу:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = P(\rho, \vec{v}, T), \quad (3.24)$$

де  $P(\rho, \vec{v}, T)$  – права частина рівняння теплопереносу, яка за різних умов набуває різного вигляду, його слід додатково ввести в перший етап схеми розщеплення. При неявному знаходженні температури на  $n+1$ -му часовому шарі рівняння теплопереносу вводиться в другий етап. Запишемо в цьому випадку другий етап

нашої схеми розщеплення, припускаючи, крім того, що густина середовища залежить лише від тиску та температури, а від  $\zeta$  не залежить:

$$\text{II} \quad T^{n+1, k+1} = T^n - \tau P(\rho^{n+1, k}, \bar{v}^{n+1, k}, T^{n+1, k}), \quad (3.25)$$

$$\rho^{n+1, k+1} = \rho^n - \tau \bar{\nabla} \cdot (\rho^{n+1, k} \bar{v}^{n+1, k}), \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} p^{n+1, k+1} = & p^{n+1, k} + \omega \left[ \Delta p^{n+1, k} - \bar{\nabla} \cdot (\rho^{n+1, k} \bar{v}^{n+1, k}) \right] / \tau - \\ & - \rho'_p(p^{n+1, k}, T^{n+1, k}) (p^{n+1, k} - p^n) / \tau^2 - \\ & - \rho'_T(p^{n+1, k}, T^{n+1, k}) (T^{n+1, k} - T^n) / \tau^2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

В цьому разі на першому етапі слід ще задати початкове значення температури на цьому часовому кроці  $T^{n+1, 0} = T^n$ .

Виконання великої кількості обчислень всередині ітераційного циклу значно уповільнює час розрахунку і тому виникає потреба винести за цей цикл все, що можна. Використання розщеплення за фізичними факторами для рівняння теплопереносу дає досить елегантну і ефективну можливість досягнення цього в разі конвективно-дифузійного механізму переносу тепла.

Дійсно, нехай

$$P(\rho, \bar{v}, T) = -\bar{\nabla} \cdot (T \bar{v}) + \frac{1}{C\rho} [\bar{\nabla} \cdot (\lambda \bar{\nabla} T) + Q]. \quad (3.28)$$

Виконаємо розщеплення рівняння (3.24) на конвективну та дифузійно-джерельну частини.

$$\tilde{T} - T^n = \frac{\tau}{C\rho} [\bar{\nabla} \cdot (\lambda \bar{\nabla} T) + Q], \quad (3.29)$$

$$T^{n+1} - \tilde{T} = -\tau \bar{\nabla} \cdot (T \bar{v}). \quad (3.30)$$

Основним джерелом нестійкості розрахунків є конвективна частина, тому для рівняння (3.30) слід застосовувати неявну схему, визначаючи його праву частину на  $n+1$ -му часовому шарі. Використовуючи метод ітерацій, це рівняння можна розв'язувати на другому етапі разом з іншими неявними рівняннями в нашій схемі. В той же час для більш об'ємного за кількістю розрахункових операцій рівняння (3.29) можна застосувати явну схему і винести його розв'язання на перший етап, звільняючи тим самим ітераційний цикл від зайвих обчислень. За-

стосування для рівняння (3.29) явної схеми має сенс через досить необтяжливі обмеження в цьому разі на крок за часом для дифузійного теплопереносу.

В результаті отримуємо схему розщеплення за фізичними факторами для розрахунку теплофізичних параметрів ефективно стисливого середовища:

$$I \quad \tilde{v} = \bar{v}^n + \tau R(\rho^n, \bar{v}^n), \quad (3.31)$$

$$\tilde{T} = T^n + \frac{\tau}{C\rho^n} \left[ \bar{\nabla}(\lambda \bar{\nabla} T^n) + Q^n \right], \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \rho^{n+1,0} &= \rho^n, & \bar{v}^{n+1,0} &= \bar{v}^n, \\ p^{n+1,0} &= p^n, & T^{n+1,0} &= \tilde{T}; \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$II \quad T^{n+1,k+1} = \tilde{T} - \tau \bar{\nabla}(T^{n+1,k} \bar{v}^{n+1,k}), \quad (3.34)$$

$$\rho^{n+1,k+1} = \rho^n - \tau \bar{\nabla} \cdot (\rho^{n+1,k} \bar{v}^{n+1,k}), \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} p^{n+1,k+1} &= p^{n+1,k} + \omega \left[ \Delta p^{n+1,k} - \bar{\nabla}(\rho^{n+1,k} \bar{v}^{\rightarrow}) / \tau - \right. \\ &- \rho'_p(p^{n+1,k}, T^{n+1,k})(p^{n+1,k} - p^n) / \tau^2 - \\ &\left. - \rho'_T(p^{n+1,k}, T^{n+1,k})(T^{n+1,k} - T^n) / \tau^2 \right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$III \quad \bar{v}^{n+1,k+1} = \tilde{v} - \tau (1/\rho^{n+1,k}) \bar{\nabla} p^{n+1,k}. \quad (3.37)$$

Наведена схема ілюструє можливість застосування методу розщеплення за фізичними факторами для отримання ефективних алгоритмів розрахунку теплофізичних параметрів при несоленоїдальному русі середовища, але досить спрощена, оскільки, наприклад, не враховує залежність густини середовища від об'ємних густин окремих фаз. При їх врахуванні необхідно розглядати ще рівняння переносу для цих фаз. Все це можна зробити аналогічно тому, як ми враховували рівняння теплопереносу і залежність густини від температури. В наступних параграфах ще будуть розглянуті схеми розщеплення, побудовані за цим принципом.

Вище розглядався випадок, коли задавалась густина середовища як функція його теплофізичних параметрів (3.1), а через неї, з використанням рівняння нерозривності, дивергенція добутку  $\rho \bar{v}$  (3.5), і саме з цих припущень отриму-

валось рівняння для тиску (3.16) в схемі розщеплення. В разі, якщо задається безпосередньо дивергенція швидкості  $\vec{v}$  знаходження тиску може бути дещо іншим. Дійсно, припустимо, що в загальному випадку замість (3.5) задано

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -\varphi. \quad (3.38)$$

В цьому разі слід вимагати, щоб замість рівняння (3.12) на третьому етапі схеми розщеплення (3.9)–(3.11) виконувалось рівняння (3.38). З його врахуванням взяття дивергенції від обох частин формули (3.11) дає замість (3.16) таке рівняння для тиску:

$$\vec{\nabla} \left[ \left( 1/\rho^{n+1} \right) \vec{\nabla} p^{n+1} \right] = \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \varphi^{n+1} \right) / \tau, \quad (3.39)$$

а другий етап загальної схеми розщеплення для несоленоїдального руху середовища (3.19)–(3.23) набуває вигляду

$$\text{II} \quad \rho^{n+1, k+1} = \rho^n - \tau \vec{\nabla} \left( \rho^{n+1, k} \vec{v}^{n+1, k} \right), \quad (3.40)$$

$$p^{n+1, k+1} = p^{n+1, k} + \omega \left\{ \vec{\nabla} \cdot \left[ \left( 1/\rho^{n+1, k} \right) \vec{\nabla} p^{n+1, k} \right] - \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \varphi^{n+1, k} \right) / \tau \right\}. \quad (3.41)$$

З точки зору розрахунку обидва варіанти отримання рівняння для тиску однакові, хоча перший є більш універсальним.

Побудова схем розщеплення, наведених у даному параграфі, сподіваємось, ілюструє велику різноманітність та гнучкість методів розщеплення за фізичними факторами.

Крайові умови для гідродинамічних параметрів у разі ефективного стисливого середовища задаються так само, як і для нестисливого середовища.

## ТЕМА 6

### ТВЕРДО-РІДИННІ СЕРЕДОВИЩА (СУСПЕНЗІЯ)

*Об'ємні густини домішкової та рідкої фаз. Наближення суспензії. Метод колективного опису руху твердих частинок. Основні рівняння суспензії. Фактори несоленоїдальності для суспензії.*

Розглянемо ще один важливий приклад двофазного середовища, який досить часто зустрічається на практиці – твердо-рідинне середовище з твердими включеннями у вигляді рухомих частинок. Такі дисперсні середовища носять назву суспензій. Несучою рідиною тут може виступати, наприклад, розплав сталі, частинками – різноманітні неметалічні включення, розкислювачі, легуючі та інші матеріали, які можуть мати як кускову, так і порошкову форми та спеціально вводиться у розплав, чи утворюватись там у процесі виробництва сталі.

В задачах, які розглядаються далі, густини дисперсних частинок у рідині (їх кількості в одиниці об'єму) завжди невеликі. Для таких густин рух частинок та їх перетворення здебільшого розглядають окремо для кожної частинки, справедливо вважаючи, що вони не впливають одна на одну, а рухаються лише під впливом несучої рідини. Це дозволяє досить детально простежити за динамікою частинок та їх перетвореннями. Але окремий розгляд частинок має також і свої недоліки. Не завжди потрібна повна деталізація динаміки руху частинки, тим більше, що їх рух часто буває нестійким. Наприклад, якщо кускові матеріали вводяться під струмінь розплаву в ківш при його заповненні, то незначна зміна місця вводу матеріалів значно змінює траєкторію руху, а слідом за цим і місце їх розчину. З іншого боку, кускові матеріали, як правило, вводять колективно з деякою функцією розподілу. В цьому випадку, як і в багатьох інших, більш прийнятною була б колективна модель руху частинок. Вона, звичайно, повинна враховувати можливість їх розчинення чи розплавлення.

Розглянемо, таким чином, твердо-рідинне середовище (суспензію) в припущенні невеликої об'ємної частки твердої фази з урахуванням фазового перет-

ворення. Як і в попередньому випадку, індекс 1 будемо відносити до рідини, а 2 – до дисперсної фази, у даному випадку твердої. Позначимо  $\beta = \alpha_2$ . Тоді  $\alpha_1 = (1 - \beta)$ , а також

$$\rho_1 = (1 - \beta)\rho_1^o, \quad (6.1)$$

$$\rho_2 = \beta\rho_2^o, \quad (6.2)$$

$$\rho = (1 - \beta)\rho_1^o + \beta\rho_2^o = \rho_1^o(1 - \beta y), \quad (6.3)$$

де введені позначення:  $x = \rho_2^o / \rho_1^o$ ,  $y = 1 - x$ .

Всі подальші формули будемо розглядати в наближенні до першого порядку по  $\beta$  включно. Так, барицентрична швидкість середовища та дифузійні швидкості фаз у цьому наближенні записуються таким чином:

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \beta x \bar{v}_{21}, \quad (6.4)$$

$$\bar{w}_1 = -\beta x \bar{v}_{21}, \quad (6.5)$$

$$\bar{w}_2 = (1 - \beta x) \bar{v}_{21}, \quad (6.6)$$

де  $\bar{v}_{21} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1$ .

Скрізь далі будемо вважати як рідину, так і дисперсні частинки нести-сливими, тобто  $\rho_1^o = const$ ,  $\rho_2^o = const$ , отже,  $x = const$ ,  $y = const$ . Тоді рівняння нерозривності середовища (1.11) дає:

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\beta \bar{v}) = \bar{\nabla} \cdot \bar{v} / y, \quad (6.7)$$

А з рівняння переносу маси твердої фази маємо:

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\beta \bar{v}) = -\bar{\nabla} \cdot (\beta \bar{w}_2) + \Phi, \quad (6.8)$$

де визначено  $\Phi = J_{12} / \rho_2^o$ . Порівнюючи (6.7) та (6.8), отримуємо

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{v} = y[-\bar{\nabla} \cdot (\beta \bar{w}_2) + \Phi], \quad (6.9)$$

тобто барицентрична швидкість середовища в цілому, незважаючи на нестисливість його компонент, при  $y \neq 0$  (коли  $\rho_1^o \neq \rho_2^o$ ) не задовольняє умову соленоїдальності через відносний рух фаз та фазові перетворення (якщо  $\Phi \neq 0$ ).

На відміну від попереднього випадку газорідного середовища у “вакуумному” наближенні, в рівнянні руху твердо-рідного середовища в цілому (1.16) доданок з дифузійними швидкостями не зникає, хоча дещо і спрощується:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla^k \bar{\sigma}^k + \rho \bar{g} - \rho_2^o \nabla^k (\beta \bar{w}_2 w_2^k) \quad (6.10)$$

Запишемо це рівняння у вигляді рівняння Нав’є–Стокса:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\bar{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v} + (\zeta + \mu/3) \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \vec{v}) + \rho \bar{g} - \rho_2^o \nabla^k (\beta \bar{w}_2 w_2^k), \quad (6.11)$$

врахуємо формулу А.Ейнштейна для в’язкості суспензії

$$\mu = \mu_1 (1 + A\beta) \quad (6.12)$$

та формулу (6.3.) і залишимо члени до першого порядку по  $\beta$ . В результаті отримаємо рівняння руху розглядуваної суспензії у вибраному наближенні:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} = & -\bar{\nabla} \tilde{p} + \nu_1 [1 + \beta(A + \gamma)] \Delta \vec{v} + \\ & + \{ \zeta' + \nu_1/3 + \beta[\zeta' \gamma + \nu_1/3(A + \gamma)] \} \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \vec{v}) - \\ & - \beta \gamma \bar{g} - x \nabla^k (\beta \bar{w}_2 w_2^k), \end{aligned} \quad (6.13)$$

де  $\nu_1 = \mu_1 / \rho_1^o$  – кінематична в’язкість рідини;  $\zeta' = \zeta / \rho_1^o$ ,  $\tilde{p} = p' / \rho_1^o$  – динамічна частина тиску  $p'$  (тиск без тиску стовпа рідини), поділена на густину рідини. Це рівняння необхідно розв’язувати разом з рівнянням (6.9).

Для знаходження швидкості руху твердої фази  $\vec{v}_2$ , а з її допомогою і дифузійної швидкості  $\bar{w}_2$ , звернемось до рівняння руху для неї:

$$\rho_2 \frac{d_2 \vec{v}_2}{dt} = \nabla^k \bar{\sigma}_2^k + \rho_2 \bar{g}_2 + \bar{P}_{12} - J_{12} \vec{v}_2. \quad (6.14)$$

У цьому рівнянні член з поверхневими напруженнями  $\nabla^k \bar{\sigma}_2^k$  важко змоделювати. Для розуміння його структури розглянемо рівняння руху окремої частинки в рідині. Якщо позначити швидкість  $a$ -ї частинки  $\vec{u}_a$ , а об’єм  $V_a$ , то рівняння Ньютона для неї матиме вигляд:



$$V_a \rho_2^o \frac{d\vec{u}_a}{dt} = -V_a \rho_1^o y \vec{g} + \vec{F}_{aD} - \vec{F}_{aA}. \quad (6.15)$$

В цьому рівнянні враховується дія на частинку з боку сили тяжіння та виштовхувальної сили (перший доданок правої частини рівняння), сила опору  $\vec{F}_{aD}$  та сила  $\vec{F}_{aA}$ , що описують дію приєднаної маси. В рівнянні (6.15) позначення  $d/dt$  має прямий зміст повної похідної за часом. Фазові перетворення поки не розглядаємо, оскільки їх легко врахувати в кінцевому рівнянні руху для дисперсної фази. Силу  $\vec{F}_{aA}$  можна записати у вигляді

$$\vec{F}_{aA} = C_A \rho_1^o V_a \frac{d\vec{u}_a}{dt}, \quad (6.16)$$

де  $C_A$  – безрозмірний коефіцієнт, який може залежати від деяких характеристик як рідини, так і частинки. Сила опору  $\vec{F}_{aD}$  в загальному випадку залежить від багатьох факторів, таких як швидкість, розмір та форма частинки, характер руху, в'язкість рідини та ін. У найпростішому випадку, коли частка має сферичну форму, або в наближенні її сферичності, сила опору

$$\vec{F}_{aD} = \rho_1^o V_a \vec{f}_{aD} \quad (6.17)$$

ротиється напрямку  $\vec{n}_{a1}$  вектора швидкості частки відносно рідини:

$$\vec{w}_{a1} = \vec{u}_a - \vec{v}_1, \quad \vec{n}_{a1} = \vec{w}_{a1} / w_{a1}. \quad (6.18)$$

Для порівняно невеликих чисел Рейнольда  $Re < 1$  ця сила пропорційна швидкості  $\vec{w}_{a1}$ :

$$\vec{f}_{aD} = -C_{1D} \nu_1 \frac{\vec{w}_{a1}}{d_a^2} \vec{n}_{a1}, \quad (6.19)$$

а для  $Re \gg 1$  – квадрату швидкості:

$$\vec{f}_{aD} = -C_{2D} \frac{w_{a1}^2}{d_a} \vec{n}_{a1}. \quad (6.20)$$

Тут  $C_{1D}$  та  $C_{2D}$  – безрозмірні коефіцієнти опору;  $d_a$  – діаметр, або характерний розмір частинки  $a$ . Для сферичної частинки  $C_{1D} = 18$  (закон Стокса). У загаль-

ному випадку слід одночасно враховувати дві складові сили опору—як (6.19), так і (6.20), підбираючи відповідним чином коефіцієнти  $C_{1D}$  та  $C_{2D}$ .

З урахуванням формул (6.16) та (6.17) рівняння (6.15) набуває вигляду

$$(C_A + x) \frac{d_a \bar{u}_a}{dt} = -y \bar{g} + \bar{f}_{aD}. \quad (6.21)$$

При його записі повну похідну за часом, яка фігурує в рівнянні (6.15), ми замінили на субстанційну похідну для частинки  $a$ :

$$\frac{d_a}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_a^k \nabla^k. \quad (6.22)$$

Для отримання рівняння руху твердої фази виберемо будь-який одиничний об'єм і підсумуємо по частинкам, які в ньому знаходяться, рівняння (6.21) помножене на  $V_a$ , врахувавши при цьому, що

$$\beta = \sum_a V_a; \quad (6.23)$$

$$(C_A + x) \sum_a V_a \frac{d_a \bar{u}_a}{dt} = -\beta y \bar{g} + \sum_a V_a \bar{f}_{aD}. \quad (6.24)$$

Користуючись рівністю

$$\bar{v}_2 = \frac{1}{\beta} \sum_a V_a \bar{u}_a \quad (6.25)$$

та вводячи швидкості окремих часток відносно твердої фази

$$\bar{w}_{a2} = \bar{u}_a - \bar{v}_2, \quad (6.26)$$

які задовольняють співвідношення

$$\sum_a V_a \bar{w}_{a2} = 0, \quad (6.27)$$

знаходимо

$$\sum_a V_a \frac{d_a \bar{u}_a}{dt} = \beta \frac{d_a \bar{v}_2}{dt} + \sum_a V_a \frac{d_a \bar{w}_{a2}}{dt} + \sum_a V_a w_{a2}^k \nabla^k \bar{w}_{a2}. \quad (6.28)$$

Вводячи позначення

$$\bar{F}_D = \sum_a \bar{F}_{aD} = \sum_a \rho_1^0 V_a \bar{f}_{aD}, \quad (6.29)$$

та враховуючи співвідношення (6.28), замість (6.24) отримуємо

$$(C_A + x)\beta \frac{d_2 \vec{v}_2}{dt} = -\beta y \vec{g} + \frac{1}{\rho_1^o} \vec{F}_D - (C_A + x) \cdot \sum_a V_a \frac{d_2 \vec{w}_{a2}}{dt} - (\sum_a V_a w_{a2}^k \nabla^k \vec{w}_{a2}) \cdot (C_A + x). \quad (6.30)$$

Це рівняння конкретизує для нашого випадку ліву частину та три перших доданки правої частини рівняння (6.14), за винятком його останнього члена – реактивної сили, пов’язаної зі зміною маси твердої фази внаслідок фазового перетворення. Щоб вона враховувалась і в рівнянні (6.30), до його правої частини треба також додати член  $J_{12} \vec{v}_2 / \rho_1^o = -x \Phi \vec{v}_2$  :

$$(C_A + x)\beta \frac{d_2 \vec{v}_2}{dt} = -\beta y \vec{g} + \frac{1}{\rho_1^o} \vec{F}_D - x \Phi \vec{v}_2 - (C_A + x) \sum_a V_a \frac{d_2 \vec{w}_{a2}}{dt} - (\sum_a V_a w_{a2}^k \nabla^k \vec{w}_{a2}) \cdot (C_A + x). \quad (6.31)$$

При отриманні рівняння (6.31) ми виходили з рівняння (6.15), в якому не враховувалася дія на вибрану частинку з боку будь-якої іншої дисперсної частинки. Рівняння (6.31) увібрало в себе це припущення. Таким чином, воно справедливе лише при невеликій густині частинок (такій, коли вони не впливали одна на одну), тобто при малому  $\beta$ .

Якщо частинки рухаються більш-менш узгоджено, що істотно в багатьох випадках, швидкості  $\vec{w}_{a2}$  невеликі і квадратами їх, а часто і ними самими можна знехтувати. Цим наближенням відповідає відкидання в рівнянні (6.31) в першому випадку останнього доданку

$$(C_A + x) \frac{d_2 \vec{v}_2}{dt} = -y \vec{g} + \frac{1}{\beta \rho_1^o} \vec{F}_D - \frac{1}{\beta} x \Phi \vec{v}_2 - \left( \frac{1}{\beta} \sum_a V_a \frac{d_2 \vec{w}_{a2}}{dt} \right) \cdot (C_A + x), \quad (6.32)$$

в другому – двох останніх доданків:

$$(C_A + x) \frac{d_2 \vec{v}_2}{dt} = -y \vec{g} + \frac{1}{\beta \rho_1^o} \vec{F}_D - \frac{1}{\beta} x \Phi \vec{v}_2, \quad (6.33)$$

що зовсім спрощує рівняння руху твердої фази. Зазначимо, що це рівняння виконується не тільки при нульовому наближенні по  $\vec{w}_{a2}$ , але за певних умов і без припущення такого наближення. Так, якщо і кількість частинок у вибраному

одиночному об'ємі буде незмінною, то знак підсумування в останньому члені формули (6.32) разом з множниками  $V_a$  можна буде внести під знак субстанційної похідної і скористатись рівнянням (6.27). Внаслідок цих перетворень ми бачимо, що в даному випадку останній член рівняння (6.32) зникає.

В загальному вигляді напрям сили опору  $\vec{F}_D$  не лежить на лінії швидкості  $\vec{v}_{21}$ , а визначається, крім усього іншого, дисперсним складом та рухом окремих дисперсних частинок (6.29). Але в разі монодисперсної системи, при  $d_a = d$  в наближенні  $\vec{w}_{a2} \rightarrow 0$ , коли

$$\vec{w}_{a1} = \vec{v}_{21}, \quad (6.34)$$

множники  $\vec{f}_{aD}$  в силах опору частинок (6.17) вже не залежать від  $a$  як для обох законів (6.19) та (6.20), так і для комбінації:

$$\vec{f}_{aD} = \vec{f}_D = - \left( C_{1D} v_1 \frac{v_{21}}{d^2} + C_{2D} \frac{v_{21}^2}{d} \right) \vec{n}_{21}, \quad (6.35)$$

а тому  $\vec{f}_{aD}$  можна винести з-під знака суми в (6.29).

Враховуючи ще (6.23), отримуємо

$$\frac{1}{\beta \rho_l^0} \vec{F}_D = \vec{f}_D. \quad (6.36)$$

Цю формулу будемо застосовувати і в більш загальних випадках немонодисперсних систем, розуміючи під  $d$  в (6.35) середній розмір дисперсних частинок і нехтуючи складовими  $\vec{F}_D$ , які залежать від відносних швидкостей  $\vec{w}_{a2}$ . Тоді замість (6.33) будемо мати:

$$(C_A + x) \frac{d_2 \vec{v}_2}{dt} = -y \vec{g} + \vec{f}_D - \frac{1}{\beta} x \Phi \vec{v}_2. \quad (6.37)$$

Саме в такому вигляді ми здебільшого і будемо використовувати рівняння руху дисперсної фази, беручи для питомої сили опору  $\vec{f}_D$  вираз (6.35), в якому відносну швидкість фаз  $\vec{v}_{21}$  слід замінити на дифузійну швидкість дисперсних частинок  $\vec{w}_2$  за формулою  $\vec{v}_{21} = (1 + \beta x) \vec{w}_2$ , яка у вибраному наближенні впливає з формули (6.6). Це треба зробити через те, що динаміка середовища в ціло-

му описується за допомогою барицентричної швидкості  $\vec{v}$ , а не швидкості рідини  $\vec{v}_1$ , а тому швидкість твердої фази треба визначати саме відносно барицентричної швидкості. Отже, основними змінними, що описують гідродинаміку середовища, вибираємо барицентричну швидкість  $\vec{v}$  та швидкість твердої фази  $\vec{v}_2$ , які задовольняють взаємно зв'язану систему рівнянь (6.13) та (6.37).

Для невеликих  $x$  (коли істинна густина частинки невелика) інерційними властивостями дисперсної фази, а також реактивною силою в рівнянні (6.37) можна знехтувати (за умови не досить великої інтенсивності фазового перетворення). В цьому разі замість (6.37) отримуємо

$$y\vec{g} = -\left( C_{1D}v_1\frac{\vec{v}_{21}}{d^2} + C_{2D}\frac{v_{21}^2}{d} \right)\vec{n}_{21}. \quad (6.38)$$

З рівняння (6.38) випливає, що швидкість  $\vec{v}_{21}$  паралельна вектору  $\vec{g}$  і її величина може бути знайдена з цього рівняння. При невеликих швидкостях руху частинок сила опору буде лінійною за відносною швидкістю, тобто  $C_{2D} = 0$ . В цьому разі

$$\vec{v}_{21} = -\frac{y}{C_{1D}}\frac{d^2}{v_1}\vec{g}. \quad (6.39)$$

Висунуте при отриманні рівняння (6.37) припущення про незмінність кількості частинок у вибраному одиничному об'ємі виконується при їх узгодженому колективному русі. Коли це не так, то швидкість твердої фази крім компоненти, що визначається рівнянням (6.37), матиме і ефективну дифузійну компоненту:

$$\vec{w}_2^d = -\frac{1}{\beta}D\vec{\nabla}\beta, \quad (6.40)$$

так що

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_2^c + \vec{w}_2^d, \quad (6.41)$$

де  $\vec{v}_2^c$  – компонента швидкості твердої фази, яка задовольняє рівняння (6.37). З урахуванням цього, рівняння (6.8) масопереносу твердої фази набуває вигляду

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\beta \vec{v}_2^c) = \vec{\nabla} \cdot (D \vec{\nabla} \beta) + \Phi . \quad (6.42)$$

Розглянемо тепер рівняння енергії в двох окремих випадках: локально рівноважного середовища та спеціального виду локально нерівноважного середовища. У першому випадку розглянемо теплове рівняння для середовища в цілому (1.44):

$$C_p \frac{dT}{dt} = \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) + Q - \sum_i \nabla^k (\rho_i E_i w_i^k) . \quad (6.43)$$

і ті спрощення, які мають місце внаслідок нашого наближення лінійності по  $\beta$ . Добуток  $C_p$  можна знайти за формулою:

$$C_p = C_1(1 - \beta) \rho_1^o + C_2 \beta \rho_2^o . \quad (6.44)$$

Для знаходження теплопровідності середовища скористаємося з формули Максвелла (2.31) (заміняючи в ній  $\alpha$  на  $\beta$ ), яка в нашому наближенні дещо спрощується:

$$\lambda = \lambda_1(1 - 3\beta\lambda_{12}), \quad (6.45)$$

де позначено:  $\lambda_{12} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 + 2\lambda_1}$ . З урахуванням формул (3.1) і (3.2), а також виразів для дифузійних швидкостей (3.5), (3.6), останній доданок формули (3.43) набуває вигляду:

$$\sum_i \nabla^k (\rho_i E_i w_i^k) = \rho_2^o \nabla^k [\beta(E_2 - E_1) v_{21}^k] = \rho_2^o \nabla^k [\beta(E_2 - E_1) w_2^k] \quad (6.46)$$

Нам ще залишилось визначитись з джерелом тепла  $Q$  стороннього (не механічного й не термодинамічного) походження. Воно може бути пов'язане з хімічними реакціями або з електромагнітними полями. Розглянемо зараз випадок, коли  $Q$  зумовлене фазовими перетвореннями і пропорційне кількості маси, яка переходить з однієї фази в іншу:

$$Q = LJ_{12}. \quad (6.47)$$

Коефіцієнт пропорційності  $L$  є питомим теплом фазового перетворення. Очевидно, для зворотного перетворення  $Q$  змінює знак. Існування тепла фазового перетворення може зумовлюватися декілька фізичними причинами, таки-

ми як хімічні реакції на поверхні фазового переходу. вивільнення енергії внаслідок структурної перебудови речовини та ін. Інтенсивність фазового перетворення  $J_{12}$  може залежати від температури та інших факторів і визначається кінетичним рівнянням.

Підставляючи (6.44)–(6.47) в (1.3.43), отримуємо

$$\begin{aligned} & \left[ C_1(1-\beta)\rho_1^o + C_2\beta\rho_2^o \right] \frac{dT}{dt} = \\ & = \vec{\nabla} \cdot \left[ \lambda_1(1-3\beta\lambda_{12})\vec{\nabla}T \right] + LJ_{12} - \\ & - \rho_2^o \nabla^k \left[ \beta(E_2 - E_1)w_2^k \right] \end{aligned} \quad (6.48)$$

Температура  $T$ , яка фігурує в рівнянні (6.48), належить до середовища в цілому і має сенс лише для локально рівноважних процесів, що не завжди має місце у випадку суспензії, особливо при фазовому перетворенні. У таких випадках слід користуватися багатотемпературними моделями, окремо визначаючи температуру для кожної з фаз, хоча і це не завжди можливо, а тільки за певних умов. Такі умови реалізуються, наприклад, у наступному окремому випадку.

Припустимо, що частинки дисперсної фази досить малі, а їх теплопровідність досить велика для того, щоб можна було знехтувати часом встановлення рівноважного температурного поля за об'ємом частинки. Припустимо, крім того, що на поверхні частинки при певній температурі  $T_f$ , меншій за температуру навколишнього середовища, проходить фазове перетворення, яке утримує тим самим температуру частинки на значенні  $T_f$  до тих пір, поки фазове перетворення не закінчиться. У цьому випадку можна вважати, що температура дисперсної фази визначена ( $T_2 = T_f$ ) і треба визначити тільки температуру несучої рідини  $T_1$ . Для цього можна використати рівняння (1.38), зробивши підсумовування по  $i$ :

$$C_1\rho_1 \frac{dT_1}{dt} = \vec{\nabla} \cdot (\lambda_e \vec{\nabla}T_1) + J_{12}(E_1 - E_2) + Q - C_2\rho_2 \frac{dT_f}{dt}, \quad (6.49)$$

де врахований закон Фур'є  $\vec{q}_1 = -\lambda_e \vec{\nabla}T_1$ , а також зроблено припущення  $\vec{q}_2 = 0$ , яке виконується внаслідок стаціонарності температурного поля вздовж твердої

фази. Ефективний коефіцієнт теплопровідності рідини може бути підрахований за формулою:

$$\lambda_e = \lambda_1 \left( 1 - \frac{3}{2} \beta \right), \quad (6.50)$$

яка описує зменшення теплопровідності рідини за рахунок її поруватості. Формула (6.50) отримується із формули (6.45), коли в ній покласти  $\lambda_2 = 0$ , що ефективно внаслідок обґрунтованого вище припущення  $\bar{q}_2 = 0$ .

Підставляючи в (6.49) співвідношення (6.1), (6.2), (6.50) та (6.47), отримуємо

$$(1 - \beta) \frac{dT_1}{dt} = \bar{\nabla} \cdot \left[ a_1 \left( 1 - \frac{3}{2} \beta \right) \bar{\nabla} T_1 \right] + \frac{L_e}{C_1} x \Phi - \frac{C_2}{C_1} \beta x \frac{dT_f}{dt}, \quad (6.51)$$

де

$$L_e = L + E_1 - E_2; \quad (6.52)$$

ефективна питома енергія фазового перетворення,  $a_1 = \lambda_1 / C_1 \rho_l^0$  – температуропровідність рідини. В (6.52) енергії  $E_1$ ,  $E_2$  підраховуються при  $T = T_f$ . Якщо  $T_f = const$ , останній член в (6.51), очевидно, зникає. Припускаючи це, позбудемося в рівнянні (6.51) ще й швидкості рідини, виражаючи субстанційну похідну за рідиною через барицентричну субстанційну похідну:

$$(1 - \beta) \frac{dT_1}{dt} = \bar{\nabla} \cdot \left[ a_1 \left( 1 - \frac{3}{2} \beta \right) \bar{\nabla} T_1 \right] + \frac{L_e}{C_1} x \Phi + \beta x \bar{w}_2 \cdot \bar{\nabla} T_1. \quad (6.53)$$

У наближенні  $\beta \rightarrow 0$  замість (6.51) отримуємо

$$\frac{dT_1}{dt} = \bar{\nabla} \cdot \left[ a_1 \bar{\nabla} T_1 \right] + \frac{L_e}{C_1} x \Phi, \quad (6.54)$$

Досить часто цього наближення виявляється достатньо для аналізу теплового стану середовища у зазначеному випадку.



**ТЕМА 7**  
**ТЕПЛОФІЗИЧНІ ПРОЦЕСИ В ЗАТВЕРДІЛОМУ**  
**ЗЛИВКУ**

*Особливості врахування несоленоїдального руху суспензій. Спрощуючи фактори, соленоїдальне наближення.*

Характерним прикладом середовища, розбитого на зони за ознаками фізичних процесів, що протікають в них, є затверділий зливкок. У даній лекції розглянемо один із варіантів застосування методів розщеплення за фізичними факторами для визначення теплофізики затверділого зливка. Відзначимо, що таких варіантів може бути безліч і їх кількість залежить від вибраної моделі кристалізації, а також від кількості варіантів розщеплення фізичних процесів у кожній зоні та кількості комбінацій з фізичними процесами в різних зонах, а крім того, ще й від варіанту різницевої апроксимації та числового методу, які застосовуються для кожного з рівнянь, що описують окремий фізичний процес.

Зупинимось на квазідвофазному наближенні, яке, з одного боку, містить у собі всі основні елементи фізики тверднення бінарного сплаву в розглядуваній нерівноважній моделі тверднення, а з іншого боку, є відносно простим. Більше того, при розгляді неплинної зони швидкістю розплаву в цілому  $\bar{v}_L$  будемо нехтувати, уникаючи тим самим необхідності розв'язання рівняння для капілярного тиску в зоні живлення. Крім того, будемо поки що розглядати випадок відсутності газових фаз і наявності лише однієї рідинної домішкової фази  $b$ .

Рівняння, які відносяться до окремих зон і які треба розв'язувати в вибраному квазідвофазному наближенні, запишемо в дещо перетвореному вигляді:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{v} = -(\delta_f - \varepsilon) \left[ \Phi_S - \bar{\nabla} \cdot (\zeta \bar{v}_{S1}^c - D_S \bar{\nabla} \zeta) \right] - (1 - \zeta) \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -(\bar{v} \cdot \bar{\nabla}) \bar{v} + v_e \Delta \bar{v} + [\zeta \delta_f + (1 - \zeta) \varepsilon] \bar{g} - \bar{\nabla} \bar{p}, \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\bar{\nabla} \cdot [\zeta (\bar{v} + \bar{v}_{S1}^c)] + \bar{\nabla} \cdot (D_S \bar{\nabla} \zeta) + \Phi_S, \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial \beta_b}{\partial t} = -\bar{\nabla} \cdot (\beta_b \bar{v}_b^c) + \bar{\nabla} \cdot [(1 - \zeta) D_b \bar{\nabla} \frac{\beta_b}{(1 - \zeta)}] - \frac{k_b \beta_b}{(1 - \zeta)} \Phi_S, \quad (7.4)$$

$$\bar{v}_{S1}^c = -\frac{d\bar{S}^2}{C_{1D}v_1} (\varepsilon - \delta_f) \bar{g}, \quad (7.5)$$

$$\bar{v}_b^c = -\frac{K_b \zeta}{R_b(1-\zeta) + v_L' x_b \zeta} \left( \frac{2-\zeta}{1-\zeta} \bar{\nabla} \zeta + \zeta \bar{\nabla} \ln \beta_b \right), \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} = & -\frac{C_L(1-\zeta)}{C} \bar{v}_L \cdot \bar{\nabla} T - \frac{C_S \zeta}{C} \bar{v}_S \cdot \bar{\nabla} T + \\ & + \frac{1}{C} \bar{\nabla} \cdot \left\{ \lambda'_L(1-\zeta) + \lambda'_S \zeta \right\} \bar{\nabla} T \Big\} + \frac{L_e}{C} \Phi_S, \end{aligned} \quad (7.7)$$

де  $C = C_L(1-\zeta) + C_S \zeta$ , а пояснення інших позначень можна знайти у відповідних параграфах, звідки взяті ці формули.

Формула (7.5) відноситься до плинної зони. Вона використовується один раз на початку розрахунку, оскільки швидкість  $\bar{v}_{S1}^c$  в розглядуваній моделі не міняється. Формули (7.1) та (7.2) відносяться виключно до плинної зони, а формула (7.6) – до зони живлення. Формула (7.3) формально справедлива в усьому об'ємі зливка, але в твердій зоні вироджується до тривіального виразу  $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$ . В зоні живлення прийнято, що  $\bar{v}_S = 0$ , тому конвективний та дифузій-

ний доданки в (7.3) будуть відсутні:  $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \Phi_S$ . В повному обсязі рівняння (7.3) використовується лише в плинній зоні.

Рівняння ж сегрегації (7.4) в повному обсязі справедливе аж до зони вкрапленого розплаву, оскільки в зоні живлення, як і в плинній зоні, активно ідуть процеси конвективного переносу та дифузії домішки. В зоні живлення конвективна швидкість домішки визначається формулою (7.6), а в плинній зоні у вибраному наближенні слід покладати  $\bar{v}_b^c = \bar{v}$ . В зоні вкрапленого розплаву через сегрегаційний механізм виділення домішки, хоч процес виділення і продовжується, середня густина домішки по всіх фазах (а саме вона і відшукується) не змінюється, оскільки перенос її припиняється, що дозволяє в зоні вкрапленого розплаву, як і в твердій зоні, рівняння (7.4) не розглядати. Рівняння теп-

лопереносу (7.7) слід розв'язувати в усіх зонах зливка. Останній доданок у ньому буде ненульовим тільки в двофазній зоні, де йде фазове перетворення. Конвективний перенос тепла відбувається тільки в плинній зоні. В усіх інших зонах  $\bar{v}_L = \bar{v}_S = 0$ . В плинній зоні швидкості  $\bar{v}_L$  та  $\bar{v}_S$  з достатньою для теплового рівняння точністю можна знайти за формулами

$$\bar{v}_L = \bar{v} - \zeta \bar{v}_{S1}^c, \quad (7.8)$$

$$\bar{v}_S = \bar{v} + \bar{v}_{S1}^c \quad (7.9)$$

(при їх отриманні було знехтувано випадковою складовою швидкості кристалічної фази та добутками частки твердої фази  $\zeta$  на коефіцієнти усадки  $\delta_f$  та  $\varepsilon$ ). Відзначимо, що в разі близькості теплофізичних параметрів рідинної та кристалічної фаз конвективний доданок у рівнянні теплопереносу (7.7), який відбувається лише в плинній зоні, де до того ж частка кристалічної фази  $\zeta$  мала, можна брати в нульовому по  $\zeta$  наближенні, що в наведеній нижче схемі розщеплення і будемо робити.

Застосуємо метод розщеплення за фізичними факторами для розв'язання системи рівнянь (7.1)–(7.7). Через складність цієї системи при його вживанні треба використовувати найекономічніші методи розрахунку. Наприклад, слід, по можливості, уникати неявних схем розрахунку.

Гідродинамічні рівняння (7.1), (7.2) відносяться до плинної зони і в них задається вираз для дивергенції барицентричної швидкості, тобто в нашому випадку визначено:

$$\phi = (\delta_f - \varepsilon) \left[ \Phi_S - \bar{v} \left( \zeta \bar{v}_{S1}^c - D_S \bar{v} \zeta \right) \right] + (1 - \zeta) \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (7.10)$$

і при розщепленні має застосовуватися другий варіант знаходження тиску.

Джерелом розбіжностей при застосуванні явних схем є конвективні складові, особливо у випадках незначних дифузійних доданків. Дифузійні ж складові, навпаки, зменшують (при виконанні необхідних умов на крок за часом) здатність скінченно-різницевої розрахункової схеми до розбіжності, тому процеси з великими дифузійними доданками будемо розраховувати за явною схе-

мою. В нашому випадку це ефективна дифузія домішки, рухомих кристалів та температури (ефективна теплопровідність) в плинній зоні, оскільки всі зони тут визначаються, переважно, відносно великою турбулентною складовою дифузії (як свідчать чисельні розрахунки та експериментальні дослідження, безрозмірні параметри, що визначають всі ці види дифузій, у разі турбулентного руху приблизно рівні між собою і, як правило, на кілька порядків перевищують відповідні молекулярні значення).

В неплинній зоні в розглядуваному наближенні конвективний перенос тепла і будь-який перенос твердої фази відсутні. Що ж стосується домішки, то її конвективний перенос у зоні живлення проходить активно, а дифузія через невеликі швидкості і відсутність у результаті цього в неї турбулентних складових визначається, переважно, молекулярною складовою і є незначною. Це вимагає для конвективного переносу домішки в зоні живлення використовувати неявну схему.

В результаті зроблених зауважень для визначення теплофізичних характеристик затверділого зливка бінарного сплаву в розглядуваному квазідвофазному наближенні нерівноважної моделі кристалізації приходимо до наступної схеми розщеплення:

0

$$2 \quad \bar{v}_{S1}^c = -\frac{d_S^2}{C_{1D}v_1}(\varepsilon - \delta_f)\bar{g}, \quad (7.11)$$

I

$$1,2 \quad \bar{v} = \bar{v}^n + \tau\left\{-\left(\bar{v}^n \cdot \bar{\nabla}\right)\bar{v}^n + v_e\Delta\bar{v}^n + \left[\zeta^n\delta_f + (1-\zeta^n)\varepsilon^n\right]\bar{g}\right\}, \quad (7.12)$$

$$1-5 \quad \lambda'^n = \lambda'_L(1-\zeta^n) + \lambda'_S\zeta^n, \quad (7.13)$$

$$1-5 \quad C^n = C_L(1-\zeta^n) + C_S\zeta^n, \quad (7.14)$$

$$1-5 \quad \tilde{T} = T^n + \frac{\tau}{C^n}\left[\bar{\nabla} \cdot (\lambda'^n \bar{\nabla} T^n) + L_e\Phi_S^n\right], \quad (7.15)$$

$$1,2 \quad \tilde{\zeta} = \zeta^n + \tau\left[\bar{\nabla} \cdot (D_S \bar{\nabla} \zeta^n) + \tau\Phi_S^n\right] \quad (7.16)$$

$$1-3 \quad \tilde{\beta}_b = \beta_b^n + \tau \left\{ \vec{\nabla} \cdot \left[ (1-\zeta^n) D_b \vec{\nabla} \left( \frac{\beta_b^n}{1-\zeta^n} \right) \right] - \frac{k_b \beta_b^n}{(1-\zeta^n)} \Phi_S^n \right\}, \quad (7.17)$$

II

$$1,2 \quad T^{n+1} = \tilde{T} - \tau \vec{v}^n \cdot \vec{\nabla} T^n, \quad (7.18)$$

$$1,2 \quad \zeta^{n+1} = \zeta - \tau \vec{\nabla} \cdot \left[ \zeta^n (\vec{v}^n + \vec{v}_{S1}^c) \right], \quad (7.19)$$

$$3 \quad A^{n+1} = - \frac{K_b \zeta^{n+1}}{R_b (1-\zeta^{n+1}) + \upsilon_L x_b \zeta^{n+1}}, \quad (7.20)$$

$$3 \quad B^{n+1} = \frac{2-\zeta^{n+1}}{1-\zeta^{n+1}} \vec{\nabla} \zeta^{n+1}, \quad (7.21)$$

$$1-3 \quad \beta^{n+1,0} = \tilde{\beta}, \quad p^{n+1,0} = p^n, \quad \vec{v}^{n+1,0} = \vec{v}^n, \quad (7.22)$$

III

$$1,2 \quad \tilde{p}^{n+1,k+1} = \tilde{p}^{n+1,k+1} + \omega \left[ \Delta \tilde{p}^{n+1,k} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \phi^{n+1,k}) / \tau \right] \quad (7.23)$$

IV

$$1,2 \quad \vec{v}^{n+1,k+1} = \vec{v} - \tau \Delta \tilde{p}^{n+1,k}, \quad (7.24)$$

$$3 \quad \vec{v}_b^{c,n+1,k} = A^{n+1} (B^{n+1} \vec{\nabla} \zeta^{n+1} + \vec{\nabla} \ln \beta_b^{n+1,k}), \quad (7.25)$$

$$1-3 \quad \beta_b^{n+1,k+1} = \tilde{\beta}_b - \tau \vec{\nabla} \cdot (\beta_b^{n+1,k} \vec{v}_b^{c,n+1,k}). \quad (7.26)$$

Ліворуч кожної з формул наведені номери зон, в яких ці формули справедливі. Номери відповідають значенням, прийнятим на рисунку 2.1: 1 – рідинна зона; 2 – зона рухомих кристалів; 3 – зона живлення; 4 – зона вкрапленого розплаву; 5 – тверда зона.

Весь процес розрахунку умовно розбивається на чотири етапи. Спочатку (нульовий етап), поза циклом за часом, знаходиться швидкість кристалів відносно розплаву в зоні рухомих кристалів (7.11). Всі наступні етапи виконуються в циклі за часом.

На першому етапі проводяться попередні підрахунки всіх основних теплофізичних величин (7.12)–(7.17) і враховується, переважно, дифузійний компонент всіх процесів. Оскільки дифузією в усіх процесах охоплена найбільша частина розрахункової області, то на другому етапі розраховується найбільша кількість зон. Для швидкості враховується ще конвективна складова і не враховується лише поле тиску, тобто знаходиться допоміжне поле швидкості, що відповідає першому етапу звичайної схеми розщеплення (7.7)–(7.9).

На другому етапі, по-перше, завершуються обчислення величин ( $T$  та  $\zeta$ ), для яких прийнята явна схема (7.18)–(7.19). При цьому враховуються переносні процеси для цих величин у зонах, де вони відбуваються. По-друге, виконуються попередні ототожнення (7.22), які необхідні для проведення розрахунків в ітераційному циклі (останні два етапи), а також розрахунки (7.21), (7.22), які можна винести за ітераційний цикл, щоб його максимально полегшити.

На третьому етапі знаходиться поле тиску в плинній зоні (7.23).

І, нарешті, на останньому, четвертому, етапі остаточні значення швидкостей середовища в плинній зоні (7.24) і розплаві живлення (7.25), а також густини домішки в усіх цих зонах. Обчислення на третьому і четвертому етапах незалежні і можуть проводитися в будь-якому порядку.

При розв'язанні рівняння Пуассона для тиску методом ітерацій було введено параметр  $\omega$  (параметр ітераційної еволюції), за допомогою якого можна оптимізувати швидкість збіжності процесу знаходження тиску. Аналогічний параметр можна ввести і для інших величин, які обчислюються в ітераційному циклі. Наприклад, в нашому випадку це – густина домішки  $\beta_b$ , а в загальному випадку ефективно стисливого середовища це – його густина.

## ЛЕКЦІЯ 8

### БАГАТОФАЗНІ СЕРЕДОВИЩА НА ОСНОВІ РІДИНИ

*Об'єднання спрощуючи припущень газо-рідинних середовищ та багатоконпонентних суспензій. Раціональний вибір змінних для опису динаміки середовища. Особливості застосування чисельних методів для розв'язання основних рівнянь, які описують багатофазні середовища на основі рідини.*

Як газорідинні, так і твердо-рідинні двофазні середовища (дисперсні суміші), розглянуті в попередніх лекціях, являють собою хоч і поширені, але досить спеціальний випадок багатофазного середовища. Насправді на практиці газорідинне середовище часто містить у собі не одну, а декілька газових компонент, кожна з яких визначається своєю особливістю взаємодії з несучою рідиною та способами утворення, а також своїм рівнянням стану. Одночасно з газовими фазами в несучій рідині можуть переноситись і перетворюватись як тверді, так і рідинні включення і саме одночасний опис всіх цих процесів є найбільш цікавим. Прикладом з металургійної практики, який ілюструє описану ситуацію, може служити інжекція в ківш через шибєрний затвор корегуючих та легуючих порошкоподібних матеріалів разом зі струменем інертного газу (аргону) під час наповнення ковша, коли струмінь металу втягує в об'єм розплаву атмосферне повітря. У даному випадку в розплаві сталі одночасно існують принаймні дві газові фази – аргон та атмосферне повітря (не рахуючи вже вуглекислого газу, завжди присутнього в розплаві сталі), а також і тверда фаза, яка може мати кілька складових частин – корегуючі та легуючі порошкоподібні матеріали, які в процесі руху розчиняються чи розплавляються, утворюючи, таким чином, кілька рідинних фаз, розподілом яких по об'єму ковша більше всього і цікавляться металурги.

Дещо полегшити досить складну ситуацію може досить точно в багатьох задачах припущення, що об'ємні густини всіх фаз в середовищі, за винятком

об'ємної густини несучої рідини, малі, і всі рівняння слід розглядати в лінійному, а то і в нульовому наближенні за об'ємними густинам дисперсних фаз. Щодо газових фаз, то для них, крім того, справедливе “вакуумне” наближення.

Запишемо основні рівняння описаного вище багатофазного середовища, користуючись висунутими припущеннями та формулами попередніх лекцій.

Індексом 1 будемо позначати величини, які відносяться до несучої рідини. Припустимо, що в середовищі існує кілька газових фаз, які нумеруватимемо індексом  $a$ , і декілька твердих та рідинних фаз, які нумеруватимемо спільним індексом  $b$ . Для рідинних додаткових фаз не будемо відрізняти фази, які розчиняються в несучій рідині на молекулярному рівні (гомогенна суміш) від фаз, що мають з несучою рідиною локальну поверхню поділу (гетерогенна суміш), припускаючи все ж, що в разі розчинення сумарний об'єм середовища не змінюється. В цьому разі математичні описання як в гомогенному, так і в гетерогенному випадку збігаються.

Врахуємо можливість залежності густини несучої рідини від температури:

$$\rho_1^0 = \rho_0(1 + \varepsilon), \quad (8.1)$$

де параметр  $\varepsilon$  залежить від температури і характеризує залежність від температури густини несучої рідини (температурну усадку). Практично в усіх випадках  $\varepsilon$  – дуже мала величина, і подальші формули будемо розглядати в лінійному по  $\varepsilon$  наближенні.

Густини фаз в середовищі визначаються формулами

$$\rho_1 = \gamma \rho_1^0, \quad \rho_a = \alpha_a \rho_a^0, \quad \rho_b = \beta_b \rho_b^0, \quad (8.2)$$

де

$$\gamma = 1 - \alpha - \beta, \quad \alpha = \sum_a \alpha_a, \quad \beta = \sum_b \beta_b. \quad (8.3)$$

Надалі будемо враховувати можливість залежності густини газу від термодинамічних параметрів (температури, тиску тощо). Густина ж твердих та рідин-



них дисперсних фаз вважатимемо незмінними. Густина середовища в цілому визначається формулою

$$\rho = \rho_o \left[ \gamma(1 + \varepsilon) + \sum_b \beta_b x_b \right], \quad (8.4)$$

де  $x_b = \rho_b^o / \rho_o$ . Баричентрична швидкість середовища може бути знайдена за формулою:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + (1 - \varepsilon) \sum_b \beta_b x_b \vec{v}_{b1}, \quad (8.5)$$

а дифузійні швидкості фаз за формулами

$$\vec{w}_1 = -(1 - \varepsilon) \sum_b \beta_b x_b \vec{v}_{b1}, \quad (8.6)$$

$$\vec{w}_a = \vec{v}_{a1} + \vec{w}_1, \quad \vec{w}_b = \vec{v}_{b1} + \vec{w}_1. \quad (8.7)$$

Рівняння нерозривності для середовища в цілому (1.11) має вигляд

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \sum_a \left[ \frac{\partial \alpha_a}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_a \vec{v}) \right] + \sum_b [1 - x_b(1 - \varepsilon)] \left[ \frac{\partial \beta_b}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\beta_b \vec{v}) \right] - \gamma \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (8.8)$$

Для отримання рівнянь масопереносу окремих фаз будемо виходити з рівнянь (1.31). Тоді для газових фаз маємо

$$\frac{\partial \alpha_a}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_a \vec{v}) = -\vec{\nabla} \cdot (\alpha_a \vec{w}_a) + \Phi_a, \quad (8.9)$$

де  $\Phi_a$  – сумарне ефективне об'ємне джерело  $a$ -ї газової фази.

$$\Phi_a = \sum_j J_{ja} / \rho_a^o - \alpha_a \frac{d \ln \rho_a^o}{dt} \quad (8.10)$$

Для твердих та рідинних дисперсних фаз маємо

$$\frac{\partial \beta_b}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\beta_b \vec{v}) = -\vec{\nabla} \cdot (\beta_b \vec{w}_b) + \Phi_b, \quad (8.11)$$

де  $\Phi_b = \sum_j J_{jb} / \rho_b^o$  – сумарне об'ємне джерело  $b$ -ї твердої або рідинної дисперс-

них фаз. Підставляючи замість лівих частин формул (8.9) і (8.11) їх праві частини в формулу (8.8), отримуємо

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{w} - (1 - \varepsilon) \vec{\nabla} \cdot [(1 + \varepsilon) \vec{w}_1] + \psi - \gamma \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (8.12)$$

де позначено:

$$\bar{w} = \sum_a \alpha_a \bar{w}_a + \sum_b \beta_b \bar{w}_b, \quad (8.13)$$

$$\Psi = \sum_a \Phi_a + \sum_b [1 - x_b(1 - \varepsilon)] \Phi_b. \quad (8.14)$$

Рівняння руху середовища в цілому (1.16) в нашому випадку має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}}{dt} = & -\bar{\nabla} \bar{p} + \nu_e \Delta \bar{v} + \zeta'_e \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{v}) + \left[ \gamma \varepsilon - \alpha - \sum_b \beta_b (1 - x) \right] \bar{g} - \\ & - \sum_b \nabla^k (\beta_b x_b \bar{w}_b w_b^k), \end{aligned} \quad (8.15)$$

де  $\nu_e$  та  $\zeta'_e$  – ефективні коефіцієнти кінематичної та об'ємної в'язкості. Об'ємною в'язкістю, як правило, будемо нехтувати, покладаючи  $\zeta'_e = 0$ . Ефективну кінематичну в'язкість, якщо скористатися з формули (2.19), можна обчислювати за співвідношенням

$$\nu_e = \nu'_1 \left[ 1 - \gamma \varepsilon + \alpha(A + 1) + \sum_b \beta_b (A + 1 - x_b) \right], \quad (8.16)$$

яке враховує наявність дисперсних фаз, але потребує ще врахування турбулентності шляхом моделювання коефіцієнта  $\nu'_1 = \mu_1 / \rho_0$ . Крім в'язкості, дисперсні фази в рівнянні руху проявляються ще у виникненні додаткових складових об'ємної сили. Так, у множнику перед  $\bar{g}$  перший доданок пов'язаний з температурною усадкою несучої рідини, другий – з наявністю газових фаз, а третій – з наявністю в середовищі твердих та рідинних дисперсних фаз.

Для визначення швидкостей дисперсних фаз можна скористатися або диференціальними рівняннями для кожної з фаз (в наших умовах це рівняння типу (3.37)), або, якщо знехтувати інерційними властивостями деяких дисперсних фаз (що насамперед, справедливо для газових фаз), формулами виду (2.22)–(2.26), (3.39). Як вже зазначалося, таким чином описується колективний рух частинок. Для врахування хаотичної складової руху, яка має особливо велике значення при турбулентному русі середовища, коли частинки розносяться турбулентними вихорами, до колективної складової дифузійної швидкості  $\bar{w}_l^c$  слід

додати дифузійну складову  $\bar{w}_l^d$ :  $\bar{w}_l = \bar{w}_l^c + \bar{w}_l^d$ , де  $\bar{w}_l^c$  визначається зазначеними вище рівняннями, а  $\bar{w}_l^d$  – за формулою

$$\alpha_l \bar{w}_l^d = -D_l \bar{\nabla} \alpha_l, \quad (8.17)$$

де  $D_l$  – ефективні коефіцієнти дифузії для кожної з фаз,  $\alpha_l$  при  $l = a$  є  $\alpha_a$  та при  $l = b$  –  $\beta_b$ . З урахуванням цього, рівняння масопереносу дисперсних фаз набувають вигляду

$$\frac{\partial \alpha_a}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot [\alpha_a (\bar{v} + \bar{w}_a^c)] = \bar{\nabla} \cdot (D_a \bar{\nabla} \alpha_a) + \Phi_a, \quad (8.18)$$

$$\frac{\partial \beta_b}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot [\beta_b (\bar{v} + \bar{w}_b^c)] = \bar{\nabla} \cdot (D_b \bar{\nabla} \beta_b) + \Phi_b. \quad (8.19)$$

В разі розчиняємих рідинних  $D_b$  крім турбулентної може мати й молекулярну складову.

При отриманні рівняння енергії врахуємо, що деякі з фаз можуть знаходитись у рівновазі з несучою рідиною, а деякі – ні. В цьому випадку треба використовувати рівняння (1.38), які дозволяють описувати багатотемпературне середовище. Підсумовуючи ці рівняння за всіма фазами з урахуванням “вакуумного” наближення отримуємо

$$C_1 \rho_1 \frac{d_1 T_1}{dt} + \sum_b C_b \rho_b \frac{d_b T_b}{dt} = -\bar{\nabla} \cdot \bar{q} - \sum_{i,j} J_{ji} E_i + Q. \quad (8.20)$$

Припустимо, що фази, які будемо позначати індексом  $q$ , знаходяться в рівновазі з несучою рідиною, тобто  $T_q = T_l = T_r$ , де  $T_r$  – рівноважне значення температури, а решта інших (будемо позначать їх індексом  $p$ ) завдяки чи то фазовим перетворенням, чи то хімічним реакціям підтримуються при температурах  $T_p = T_{fp}$ , які визначаються діаграмами стану. Якщо ще припустити, що тепловий потік  $\bar{q}$  визначається рівноважним температурним полем  $T_r$  згідно із законом Фур’є (1.43) з деяким ефективним коефіцієнтом теплопровідності  $\lambda_e$ , то замість (8.20) отримуємо

$$\begin{aligned} \left[ C_1\gamma(1+\varepsilon) + \sum_q C_q\beta_q x_q \right] \frac{dT_r}{dt} = \vec{\nabla} \cdot (\lambda'_e \nabla T_r) + Q' - \sum_{i,j} J'_{ji} E_i - \\ - \left[ C_1\gamma(1+\varepsilon)\bar{w}_1 + \sum_q C_q\beta_q x_q \bar{w}_q \right] \vec{\nabla} T_r - \sum_p C_p\beta_p x_p \frac{d_p T_{fp}}{dt}, \end{aligned} \quad (8.21)$$

де

$$\lambda'_e = \lambda_e / \rho_o, \quad J'_{ij} = J_{ji} / \rho_o, \quad Q' = Q / \rho_o.$$

Для визначення  $\lambda_e$  може бути застосована формула

$$\lambda_e = \gamma\lambda_1 + \sum_a \alpha_a \lambda_a + \sum_b \beta_b \lambda_b, \quad (8.22)$$

яка відповідає середньозваженому за фазами значенню теплопровідності. Запис рівняння (8.21) можна скоротити ввівши позначення

$$C_r = C_1\gamma(1+\varepsilon) + \sum_q C_q\beta_q x_q, \quad (8.23)$$

$$\bar{\chi}_r = C_1\gamma(1+\varepsilon)\bar{w}_1 + \sum_q C_q\beta_q x_q \bar{w}_q, \quad (8.24)$$

$$\theta = Q - \sum_{i,j} J_{ji} E_i, \quad (8.25)$$

з урахуванням яких замість (8.21) отримуємо

$$C_r \frac{dT_r}{dt} = \vec{\nabla} \cdot (\lambda'_e \nabla T_r) + \theta - \bar{\chi}_r \cdot \vec{\nabla} T_r - \sum_p C_p\beta_p x_p \frac{d_p T_{fp}}{dt}. \quad (8.26)$$

## ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. С.Є. Самохвалов. Теплофізичні процеси в багатофазних середовищах: теоретичні основи комп'ютерного моделювання. — Дніпродзержинськ, 1994. — 172 с.
2. Р.И. Нигматулин. Основы механики гетерогенных сред. — М.: «Наука», 1978.—336 с.
3. А.П. Огурцов, С.Є. Самохвалов. Математичне моделювання теплофізичних процесів у багатофазних середовищах. — К.: "Наукова думка", 2001. — 410 с.

## НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Конспект лекцій з дисципліни «Чисельні методи у комп'ютерному моделюванні технологічних процесів» для здобувачів вищої освіти третього (освітньо-наукового) рівня докторів філософії спеціальності 113 «Прикладна математика»

Укладачі: д.т.н., професор Самохвалов С.Є.  
к.т.н., доцент Косухіна О.С.

Підписано до друку \_\_\_\_\_ 2018 р.  
Формат \_\_\_\_\_ Обсяг \_\_\_\_\_ др. арк.  
Тираж \_\_\_\_\_ екз. Замовлення \_\_\_\_\_

Редакційно-видавничий відділ ДДТУ  
51918, м. Кам'янське, вул.Дніпробудівська, 2.