

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДНІПРОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

**до практичних робіт з дисципліни
«Моделювання технологічних та фізичних процесів»
(розділи – «Фізичне моделювання»
і «Математичне моделювання»)**

**освітньо-наукової програми вищої освіти
(підготовка докторів філософії)
зі спеціальності 136 “Металургія”**

**Затверджено редакційно-видавничою
секцією науково-методичної ради ДДТУ,
від _____ 2017 р., протокол № ____**

**Кам’янське
2017**

Методичні вказівки до практичних робіт з дисципліни «Моделювання технологічних та фізичних процесів» (розділи – «Фізичне моделювання» і «Математичне моделювання») освітньо-наукової програми вищої освіти (підготовка докторів філософії) зі спеціальності 136 “Металургія” / Пантейков С.П.- Кам’янське, ДДТУ, 2017.- 42 с.

Укладач: канд. техн. наук, доцент Пантейков С.П.

Відповідальний за випуск: канд. техн. наук, доцент Кашеєв М.А.

Рецензент: д-р техн. наук, професор Самохвалов С.Є.

Затверджено на засіданні кафедри металургії чорних металів,
протокол № 11 від 05 червня 2017 р.

Розглянуті практичні задачі з фізичного та математичного моделювання процесів.

По фізичному моделюванню розглянуто застосування методу нульових розмірностей для знаходження критеріїв подібності процесу на прикладі задачі змушеного механічного коливання з демпфіруванням, наведені вхідні дані до варіантів розрахунків.

По математичному моделюванню розглянуті процеси нагрівання стрижня, охолодження зливка квадратного перерізу, твердіння у виливниці зливка квадратного перерізу. Наведені математичні описи процесів. Викладені методичні вказівки щодо проведення розрахунків і оформлення завдання, наведені вхідні дані до розрахунків.

З М І С Т

	стор.
В С Т У П.....	4
1 ФІЗИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ.....	4
2.1 Знаходження критеріїв подібності процесів із застосування теорії подібності і розмірностей.....	4
2 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ.....	8
2.1 Математичне моделювання процесу нагрівання стрижня (граничні умови 1-го роду).....	8
2.2 Математичне моделювання процесу охолодження зливка квадратного перерізу (граничні умови 3-го роду).....	12
2.3 Математичне моделювання процесу твердіння зливка у виливниці квадратного перерізу (граничні умови 3-го роду).....	26
2.4 Математичне моделювання процесу плавлення тіла правильної геометричної форми (метод Дюзінбера).....	34
2.4.1 Плавлення тіла, попередньо прогрітого по всій масі до температури плавлення.....	35
2.4.2 Плавлення тіла, попередньо непрогрітого по всій масі до температури плавлення.....	35
2.4.3 Алгоритм розрахунку.....	37
2.5 Порядок оформлення завдань.....	40
ЛІТЕРАТУРА, ЩО РЕКОМЕНДУЄТЬСЯ.....	41

ВСТУП

Прискорення наукового-технічного прогресу неможливо без інтенсифікації всіх видів наукової дослідницької роботи. В лабораторних дослідженнях значний обсяг інформації може бути отриманий при використанні різних видів фізичного моделювання з дотриманням подібності процесів, що відбуваються на натурі, що може привести до нових технологічних і конструкторських рішень. Основною вимогою при фізичному моделюванні є дотримання можливо більш повної подібності процесів на зразку і моделі. Теорія подібності дозволяє виконувати фізичне моделювання таким чином, що в певних межах і з відомими припущеннями результати модельних досліджень можна розповсюджувати на подібні виробничі прилади та устаткування, для чого необхідно визначитися з умовами рівності основних критеріїв подібності на зразку і моделі. Для цього треба зробити аналіз всіх величин, що визначають процес і визначити всі найбільш значні фактори, що впливають на процес для виведення основних критеріїв подібності процесу на фізичній моделі реальному процесі на виробництві.

В теоретичних дослідження найбільш глибокі і всебічні висновки можуть бути отримані при розробці математичних моделей процесів та їх реалізація на персональних комп'ютерах. У зв'язку із поширенням теплових процесів у металургійних агрегатах (нагрівання, охолодження та твердіння різних тіл і матеріалів) дуже широкого поширення отримало математичне моделювання задач теплопровідності за допомогою різноманітних різницевого способів.

1 ФІЗИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

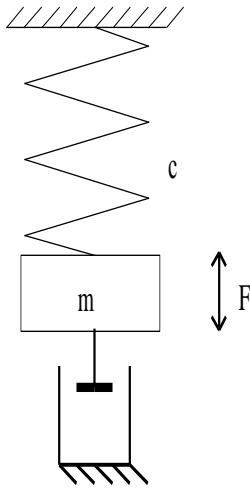
2.1 Знаходження критеріїв подібності процесів із застосування теорії подібності і розмірностей

У теорії подібності велике значення мають комплекси величин, що уявляють собою добуток різноманітних степеней цих величин; їх називають критеріями подібності і позначають літерою π (Π_i).

Критерії подібності використовують як параметри і змінні досліджуємої системи. Тут постає важливіше питання – скільки незалежних між собою критеріїв можна утворити з n розмірних величин для розглядуемого процесу. Для знаходження критеріїв подібності існує багато способів.

Розглянемо метод нульових розмірностей при отриманні критеріїв подібності на прикладі задачі змушеного механічного коливання з демпфіруванням.

Тягар масою m (рис.1) коливається на пружині жорсткістю c у в'язкому середовищі, сила опору якого $F_k = -k \cdot v$. На тягар діє збурна сила $F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$. Переміщення тягара x є функцією цих величин та часу t :



$$x = f(m, k, \omega, F_0, c, t) \quad (1.1)$$

Розмірність даних величин

- $\Rightarrow x$ (м) – переміщення тягара;
- $\Rightarrow m$ (кг) – маса тягара;
- $\Rightarrow k$ (кг/с) – коефіцієнт опору середовища;
- $\Rightarrow t$ (с) – час;
- $\Rightarrow \omega$ (1/с) – частота коливань;
- $\Rightarrow F_0$ (кг·м/с²) – збурна сила;
- $\Rightarrow c$ (кг/с²) – жорсткість пружини.

Рис.1. Коливання з демпфіруванням підвішеного до пружини тягара

Згідно з цим методом необхідно вибрати за числом основних одиниць таке ж саме число параметрів з записаної сукупності, для яких визначник, що складений з показників степеней основних одиниць, не дорівнював би нулю. В нашому випадку маємо три основні одиниці – м, кг, с. З наведеної сукупності параметрів виберемо три – такими параметрами можуть бути m, ω, F_0 . Обозначимо розмірності наступним чином: кг - М, м - L, с - Т.

Зробимо заміну розмірностей обраних параметрів m, ω, F_0 через добуток основних розмірностей у відповідних степенях:

$$[m] = [M]^1 \cdot [L]^0 \cdot [T]^0, [\omega] = [M]^0 \cdot [L]^0 \cdot [T]^{-1}, [F_0] = [M]^1 \cdot [L]^1 \cdot [T]^{-2}$$

Складемо визначник за цими степенями:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Число величин, що характеризує цей процес дорівнює 7-ми, ранг матриці рівний 3-м. Тому число безрозмірних комплексів, які характеризують цей процес, обирається як різниця між загальним числом параметрів і їхньою основною кількістю, тобто кількість безрозмірних комплексів у нашому випадку буде дорівнювати $7 - 3 = 4$.

Рівняння (1) можна також виразити так:

$$\frac{x}{m^{\alpha_x} \cdot \omega^{\beta_x} \cdot F_0^{\gamma_x}} = \Phi \left(\frac{k}{m^{\alpha_k} \cdot \omega^{\beta_k} \cdot F_0^{\gamma_k}}; \frac{c}{m^{\alpha_c} \cdot \omega^{\beta_c} \cdot F_0^{\gamma_c}}; \frac{t}{m^{\alpha_t} \cdot \omega^{\beta_t} \cdot F_0^{\gamma_t}} \right), \quad (1.2)$$

або у загальному вигляді може бути уявленим як сукупність критеріїв:

$$\pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3, \pi_4), \quad (1.3)$$

Значення α , β , γ для кожного з критеріїв знаходяться з умови, що розмірність кожного критерія дорівнює одиниці.

Для першого члена критеріальної функції розмірності, що входять до його величин, записуються наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{[x]}{[m]^{\alpha_x} \cdot [\omega]^{\beta_x} \cdot [F_0]^{\gamma_x}} &= \frac{[L]}{[M]^{\alpha_x} \cdot [T^{-1}]^{\beta_x} \cdot ([M] \cdot [L] \cdot [T]^{-2})^{\gamma_x}} = \\ &= [M]^{-\alpha_x - \gamma_x} \cdot [T]^{\beta_x + 2 \cdot \gamma_x} \cdot [L]^{1 - \gamma_x} = 1 \end{aligned}$$

Якщо добуток розмірностей у відповідних степенях дорівнює одиниці, то припускаємо, що і кожна розмірність також дорівнює 1, тобто $[M]^{-\alpha_x - \gamma_x} = 1$ і $[T]^{\beta_x + 2 \cdot \gamma_x} = 1$ і $[L]^{1 - \gamma_x} = 1$. З курсу вищої математики відомо, що якщо число, яке зведене у деяку степінь, дорівнює одиниці, то сама степінь повинна дорівнювати нулю. Згідно з цим ми можемо з степеней розмірностей скласти системи з трьох рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} -\alpha_x - \gamma_x &= 0 \\ \beta_x + 2 \cdot \gamma_x &= 0 \\ 1 - \gamma_x &= 0 \end{aligned} \right\}, \text{ звідки знаходимо } \gamma_x = 1, \alpha_x = -1, \beta_x = -2$$

Перевірку розмірностей знайденого критерія здійснюємо таким чином:

$$[\pi_1] = \frac{[x]}{[m]^{-1} \cdot [\omega]^{-2} \cdot [F_0]^1} = \frac{\cancel{[L]}}{\cancel{[M]}^{-1} \cdot (\cancel{[T]}^{-1})^{-2} \cdot (\cancel{[M]} \cdot \cancel{[L]} \cdot \cancel{[T]}^{-2})^1} = 1$$

Згідно за отриманими степенями α , β і γ критерій π_1 буде мати вигляд:

$$\pi_1 = \frac{x \cdot m \cdot \omega^2}{F_0} \quad (1.4)$$

Аналогічно знаходимо і інші критерії. Так, для другого члена критеріальної функції розмірності, що містять його величини, можна записати так:

$$\begin{aligned} \frac{[k]}{[m]^{\alpha_k} \cdot [\omega]^{\beta_k} \cdot [F_0]^{\gamma_k}} &= \frac{([M] \cdot [T]^{-1})}{[M]^{\alpha_k} \cdot [T^{-1}]^{\beta_k} \cdot ([M] \cdot [L] \cdot [T]^{-2})^{\gamma_k}} = \\ &= [M]^{1 - \alpha_k - \gamma_k} \cdot [T]^{-1 + \beta_k + 2 \cdot \gamma_k} \cdot [L]^{-\gamma_k} = 1 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} 1 - \alpha_k - \gamma_k &= 0 \\ -1 + \beta_k + 2 \cdot \gamma_k &= 0 \\ -\gamma_k &= 0 \end{aligned} \right\}, \text{ звідки знаходимо } \gamma_k = 0, \beta_k = 1, \alpha_k = 1$$

Перевірка розмірностей критерія π_2 :

$$[\pi_2] = \frac{[k]}{[m]^1 \cdot [\omega]^1 \cdot [F_0]^0} = \frac{\cancel{[M]} \cdot \cancel{[T]}^{-1}}{\cancel{[M]} \cdot \cancel{[T]}^{-1}} = 1$$

Критерій π_2 буде мати вигляд:

$$\pi_2 = \frac{k}{m \cdot \omega} \quad (1.5)$$

Для третього члена критеріальної функції розмірності величин записуємо наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{[c]}{[m]^{\alpha_c} \cdot [\omega]^{\beta_c} \cdot [F_0]^{\gamma_c}} &= \frac{([M] \cdot [T]^{-2})}{[M]^{\alpha_c} \cdot ([T]^{-1})^{\beta_c} \cdot ([M] \cdot [L] \cdot [T]^{-2})^{\gamma_c}} = \\ &= [M]^{1-\alpha_c-\gamma_c} \cdot [T]^{-2+\beta_c+2\cdot\gamma_c} \cdot [L]^{-\gamma_c} = 1 \\ \left. \begin{aligned} 1 - \alpha_c - \gamma_c &= 0 \\ -2 + \beta_c + 2 \cdot \gamma_c &= 0 \\ -\gamma_c &= 0 \end{aligned} \right\}, \text{ звідки знаходимо } \gamma_c = 0, \beta_c = 2, \alpha_c = 1 \end{aligned}$$

Здійснюємо перевірку розмірностей для критерія π_3 :

$$[\pi_3] = \frac{[c]}{[m]^1 \cdot [\omega]^2 \cdot [F_0]^0} = \frac{\cancel{[M]} \cdot \cancel{[T]}^{-2}}{\cancel{[M]} \cdot (\cancel{[T]}^{-1})^2} = 1$$

Критерій π_3 буде мати наступний вигляд:

$$\pi_3 = \frac{c}{m \cdot \omega^2} \quad (1.6)$$

Розмірності останнього (четвертого) члена критеріальної функції запишемо так:

$$\begin{aligned} \frac{[t]}{[m]^{\alpha_t} \cdot [\omega]^{\beta_t} \cdot [F_0]^{\gamma_t}} &= \frac{[T]}{[M]^{\alpha_t} \cdot ([T]^{-1})^{\beta_t} \cdot ([M] \cdot [L] \cdot [T]^{-2})^{\gamma_t}} = \\ &= [M]^{-\alpha_t-\gamma_t} \cdot [T]^{1+\beta_t+2\cdot\gamma_t} \cdot [L]^{-\gamma_t} = 1 \\ \left. \begin{aligned} -\alpha_t - \gamma_t &= 0 \\ 1 + \beta_t + 2 \cdot \gamma_t &= 0 \\ -\gamma_t &= 0 \end{aligned} \right\}, \text{ звідки знаходимо } \gamma_t = 0, \beta_t = -1, \alpha_t = 0 \end{aligned}$$

Перевірка розмірностей:

$$[\pi_4] = \frac{[t]}{[m]^0 \cdot [\omega]^{-1} \cdot [F_0]^0} = \frac{\cancel{[T]}^1}{(\cancel{[T]}^{-1})^{-1}} = 1$$

Четвертий критерій π_4 має вигляд :

$$\pi_4 = t \cdot \omega \quad (1.7)$$

Рівняння (1.3) з урахуванням виразів (1.4)...(1.7) можна записати у вигляді:

$$\frac{x \cdot m \cdot \omega^2}{F_0} = \Phi\left(\frac{k}{m \cdot \omega}; \frac{c}{m \cdot \omega^2}; t \cdot \omega\right) \quad (1.8)$$

Результати експерименту дозволяють визначити взаємозв'язок між вказаними параметрами, котрий буде справедливим як для моделі, так і для взірця, а математичне формулювання цього зв'язку буде мати вигляд $\pi_1 = \text{idem}$, $\pi_2 = \text{idem}$, $\pi_3 = \text{idem}$, $\pi_4 = \text{idem}$.

2 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Серед різницевих методів при вирішенні завдань теплопровідності велике поширення одержав метод контрольного об'єму. Одним з важливих властивостей цього методу є те, що в ньому закладене точне інтегральне збереження таких величин, як маса, кількість руху та енергії на будь-якій групі контрольних об'ємів і, отже, на всій розрахунковій області. Ця властивість проявляється при будь-якому числі вузлів, а не тільки у випадку великої їхньої кількості. Таким чином, навіть рішення на грубій сітці метод контрольного об'єму задовольняє точним інтегральним балансам.

Використання методу контрольного об'єму покажемо на прикладах рішення одновимірної задачі нагрівання стрижня, двовимірних задач охолодження зливка квадратного перерізу та твердіння зливка у виливниці квадратного перерізу.

2.1 Математичне моделювання процесу нагрівання стрижня (граничні умови 1-го роду)

Використовуючи метод контрольного об'єму, знайти розподіл температур у сталевому стрижні протягом заданого проміжку часу V_k при граничних умовах першого роду – відомі температури на лівому (t_l , °C) і правому (t_n , °C) кінцях стрижня.

При розробці цієї математичної моделі зробимо наступні припущення:

1. Стрижень зроблений з однорідного провідного матеріалу, теплофізичні характеристики якого постійні та дорівнюють: щільність $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, питома теплоємність $c = 710 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{°C)}$, коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 30 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°C)}$.

2. Стрижень теплоізований з боків, тобто теплота розповсюджується тільки за його довжиною – уздовж осі x (рис. 2).

3. Стрижень термічно тонкий - це значить, що температура всіх вузлів у кожному поперечному перерізі стрижня однакова.

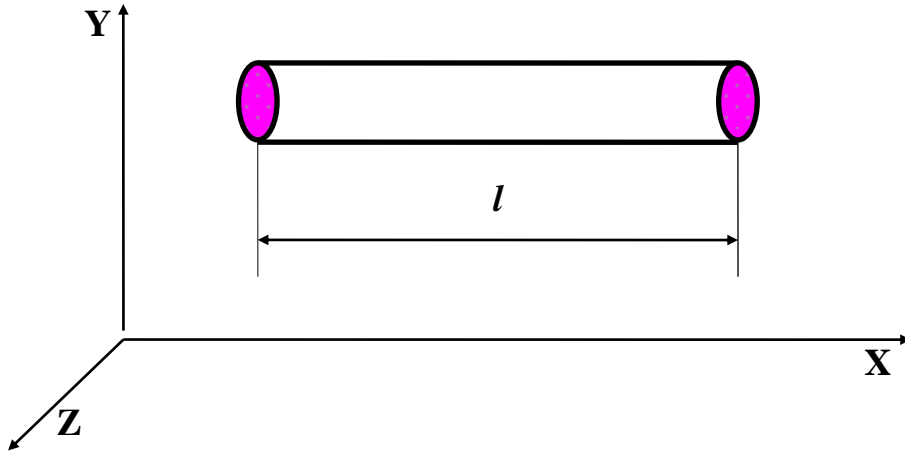


Рисунок 2 – Розташування стрижня в декартовій системі координат

Рішення:

Для рішення поставленого завдання стрижень довжиною l розбиваємо на m рівних розрахункових об'ємів, кожен з яких дорівнює $(\Delta x \cdot S)$, таким чином, щоб $l = \Delta x \cdot m$ (рис. 3).

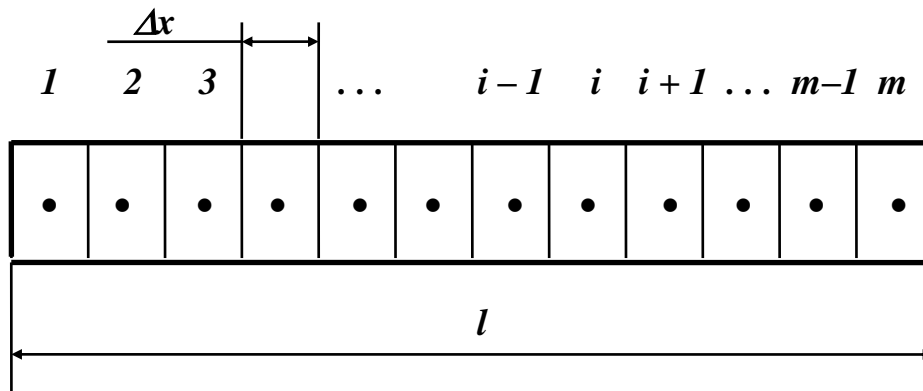


Рисунок 3 - Схема розбивки стрижня на розрахункові елементи

Для внутрішніх об'ємів з координатами $2 \leq i \leq m-1$ запишемо змінювання тепломісткості i -об'єму, починаючи з моменту часу $n \cdot \Delta \tau$ до моменту часу $(n+1) \cdot \Delta \tau$, де $n = 0, 1, 2, \dots$.

Рівняння процесу перенесення теплоти має вигляд:

$$\rho \cdot S \cdot \Delta x \cdot c \cdot \frac{t_i^{n+1} - t_i^n}{\Delta \tau} = \lambda \cdot S \cdot \frac{t_{i-1}^n - t_i^n}{\Delta x} - \lambda \cdot S \cdot \frac{t_i^n - t_{i+1}^n}{\Delta x} \quad (2.1)$$

Тоді температура в i -му об'ємі на $(n+1)$ -му часовому інтервалі буде дорівнювати:

$$t_i^{n+1} = t_i^n + \frac{a \cdot \Delta \tau}{\Delta x^2} \cdot (t_{i-1}^n - 2 \cdot t_i^n + t_{i+1}^n), \quad (2.2)$$

де S - площа поперечного перерізу стрижня, m^2 ; Δx - довжина об'єму, m ; $a = \lambda/(\rho c)$ - коефіцієнт теплопровідності, m^2/c ; $\Delta \tau$ - величина кроку за часом, c , вибирається з умови сталості явної різницевої схеми:

$$\Delta \tau \leq \frac{\Delta x^2}{2 \cdot a} \quad (2.3)$$

Отже, температури при $i = 2, 3, \dots, m-1$ на першому ($n=0$) часовому інтервалі визначаються так:

$$\begin{aligned} t_2^1 &= t_2^0 + \frac{a \cdot \Delta \tau}{\Delta x^2} \cdot (t_1^0 - 2 \cdot t_2^0 + t_3^0); \\ t_3^1 &= t_3^0 + \frac{a \cdot \Delta \tau}{\Delta x^2} \cdot (t_2^0 - 2 \cdot t_3^0 + t_4^0); \\ &\dots\dots\dots; \\ t_{m-1}^1 &= t_{m-1}^0 + \frac{a \cdot \Delta \tau}{\Delta x^2} \cdot (t_{m-2}^0 - 2 \cdot t_{m-1}^0 + t_m^0), \end{aligned} \quad (2.4)$$

де $t_1^0 = t_n$, $t_m^0 = t_n$, $^{\circ}C$. Температури $t_2^0, t_3^0, \dots, t_{m-1}^0$ є початковими температурами стрижня і дорівнюють t_0 , $^{\circ}C$.

На другому ($n=1$) часовому інтервалі температури в i -их об'ємах ($i = 2, 3, \dots, m-1$) будуть обчислюватися аналогічно:

$$\begin{aligned} t_2^2 &= t_2^1 + \frac{a \cdot \Delta \tau}{\Delta x^2} \cdot (t_1^1 - 2 \cdot t_2^1 + t_3^1); \\ t_3^2 &= t_3^1 + \frac{a \cdot \Delta \tau}{\Delta x^2} \cdot (t_2^1 - 2 \cdot t_3^1 + t_4^1); \\ &\dots\dots\dots; \\ t_{m-1}^2 &= t_{m-1}^1 + \frac{a \cdot \Delta \tau}{\Delta x^2} \cdot (t_{m-2}^1 - 2 \cdot t_{m-1}^1 + t_m^1), \end{aligned} \quad (2.5)$$

де $t_1^1 = t_n$, $t_m^1 = t_n$, $^{\circ}C$. Температури $t_2^1, t_3^1, \dots, t_{m-1}^1$ є температурами стрижня, $^{\circ}C$, що обчислені на попередньому часовому інтервалі за допомогою формул (2.4).

Аналогічні рівняння записуються для інших часових інтервалів.

Таблиця 2.1 - ПОЧАТКОВІ ДАНІ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ

Номери варіантів	Температура на лівому кінці стрижня $t_n, \text{ }^\circ\text{C}$	Температура на правому кінці стрижня $t_n, \text{ }^\circ\text{C}$	Початкова температура стрижня, $t_0, \text{ }^\circ\text{C}$	Довжина стрижня, $l, \text{ м}$	Час нагрівання, $V_{\kappa}, \text{ с}$	Кількість вузлів (об'ємів), m	Інтервал друку, $w, \text{ с}$
1	100	150	20	0,10	600	5	120
2	120	160	22	0,12	660	7	60
3	140	180	24	0,14	720	9	180
4	170	210	26	0,16	780	11	60
5	150	220	30	0,13	840	8	120
6	110	200	21	0,15	900	10	180
7	130	170	29	0,17	960	12	60
8	160	190	23	0,20	1080	15	180
9	200	250	25	0,19	1200	14	120
10	180	230	27	0,21	1320	17	120
11	190	240	28	0,22	1380	19	60
12	210	270	31	0,24	1440	22	180
13	170	280	33	0,26	1500	25	60
14	220	260	35	0,28	1560	27	120
15	230	290	37	0,27	1620	26	180
16	240	320	32	0,25	1680	23	60
17	260	300	34	0,23	1740	21	120
18	250	310	36	0,30	1800	29	180
19	270	340	38	0,25	1020	24	60
20	300	400	39	0,22	1140	22	60
21	290	450	42	0,23	1260	24	60
22	280	470	44	0,27	1920	25	120
23	320	490	46	0,29	1980	31	180
24	350	500	43	0,12	2030	15	120
25	330	650	45	0,17	2100	16	60
26	340	600	15	0,19	2160	12	180
27	370	700	50	0,23	2220	21	60
28	380	750	17	0,27	2280	25	120
29	360	620	18	0,13	2340	15	180
30	390	680	19	0,12	2400	17	240

2.2 Математичне моделювання процесу охолодження зливка квадратного перерізу (граничні умови 3-го роду)

Розглянемо задачу охолодження зливка на повітрі. Припускаємо, що поперечний переріз зливка має форму квадрату (рис. 4). Якщо висота зливка значно перевищує розміри поперечного перерізу, то теплові потоки по висоті зливка можна не враховувати.

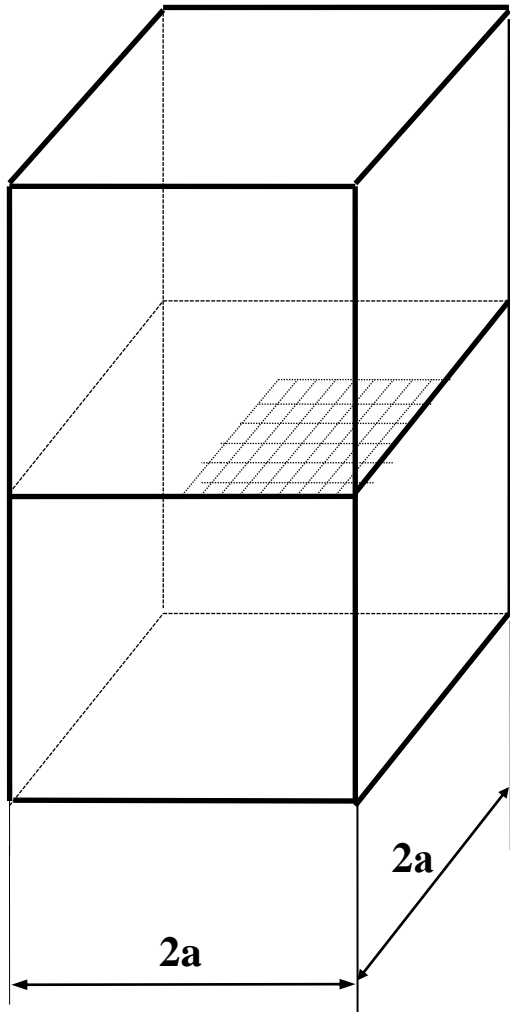


Рисунок 4 – Схема зливка

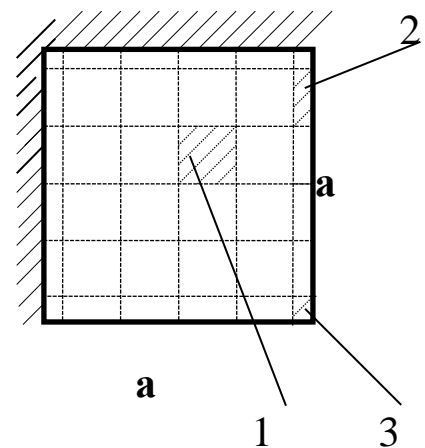
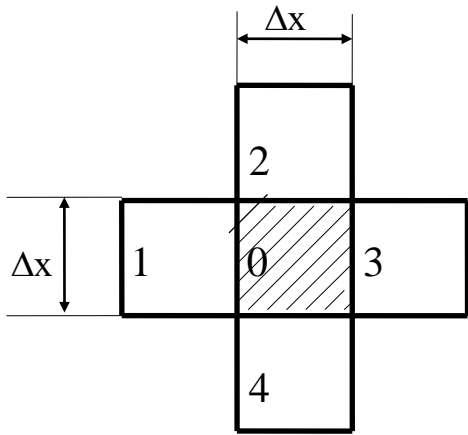


Рисунок 5 – Розрахункова область зливка: 1 - цілий об'єм; 2 - половина об'єму; 3 - четвертина об'єму

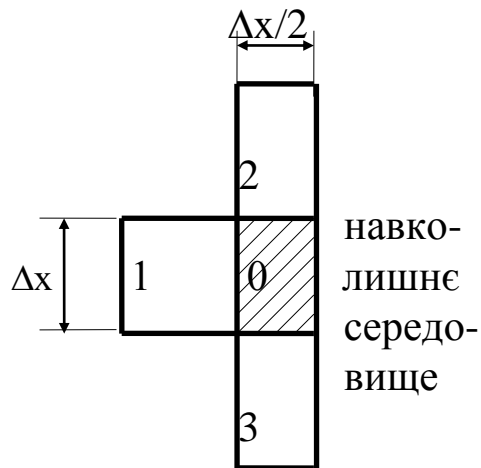
Так як умови зовнішнього теплообміну однакові для усіх бокових граней зливка, то за розрахункову область можна прийняти четверту частину поперечного перерізу зливка (рис.5).

Задачу охолодження зливка вирішуємо методом контрольного об'єму [1, 2], який є одним з найбільш ефективних серед різницевого методів розв'язання задач нестационарної теплопровідності. Сітка, грані якої розташовані таким чином, щоб вузлова точка була в середині квадрату, називається контрольним об'ємом. При розбивці розрахункової області на сітку можливі три випадку розташування контрольних об'ємів (рис.6) різних розмірів (рис.5).



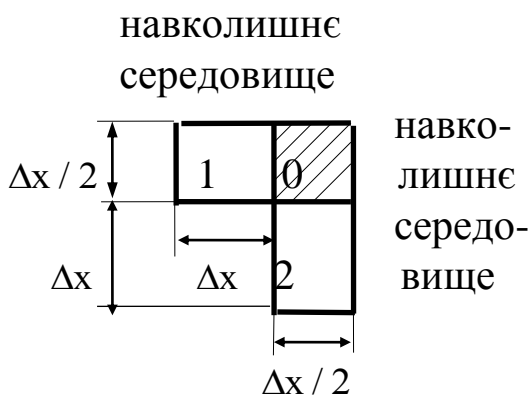
Контрольний об'єм з номером 0 розташований всередині розрахункової області

a)



Контрольний об'єм розташований на межі розрахункової області

б)



Контрольний об'єм розташований в куті розрахункової області

в)

Рисунок 6 – Варіанти розташування контрольних об'ємів

Для кожного з трьох випадків виведемо рівняння балансу теплоти, які дозволяють визначити невідому температуру t_0^{k+1} контрольного об'єму в момент часу $\tau = (k+1) \cdot \Delta\tau$ по відомим температурам у сусідніх об'ємах у попередній момент часу $\tau = k \cdot \Delta\tau$. В розрахунках приймаємо, що теплофізичні характеристики тіла λ (коефіцієнт теплопровідності), ρ (щільність) та c (питома теплоємність) є постійними. Постійними також задані коефіцієнт тепловіддачі α навколишнього середовища до поверхні зливка та температура навколишнього середовища t_c .

В першому випадку (рис.б, а) змінення вмісту тепла контрольного об'єму $V = \Delta x \cdot \Delta x \cdot 1$ за проміжок часу $\Delta\tau$ визначається за співвідношенням $c \cdot \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta x \cdot \frac{t_0^{k+1} - t_0^k}{\Delta\tau} = c \cdot \rho \cdot \Delta x^2 \cdot \frac{t_0^{k+1} - t_0^k}{\Delta\tau}$. Кількість теплоти, яка увійшла у даний об'єм через ліву грань площею $S_1 = \Delta x \cdot 1$ за допомогою теплопровідності, дорівнює $\lambda \cdot \Delta x \cdot \frac{t_1^k - t_0^k}{\Delta x} = \lambda \cdot (t_1^k - t_0^k)$. Кількість теплоти, що вийшла з даного об'єму через праву грань, дорівнює $\lambda \cdot \Delta x \cdot \frac{t_0^k - t_3^k}{\Delta x} = \lambda \cdot (t_0^k - t_3^k)$. Кількість теплоти, яка поступила за цей же час через верхню грань площею $S_2 = \Delta x \cdot 1$ за допомогою теплопровідності, дорівнює $\lambda \cdot \Delta x \cdot \frac{t_2^k - t_0^k}{\Delta x} = \lambda \cdot (t_2^k - t_0^k)$. Кількість теплоти, що вийшла через нижню грань, дорівнює $\lambda \cdot \Delta x \cdot \frac{t_0^k - t_4^k}{\Delta x} = \lambda \cdot (t_0^k - t_4^k)$. Таким чином, рівняння балансу теплоти для контрольного об'єму з номером 0 має вигляд:

$$\begin{aligned} c \cdot \rho \cdot \Delta x^2 \cdot \frac{t_0^{k+1} - t_0^k}{\Delta\tau} &= \lambda \cdot (t_1^k - t_0^k) - \lambda \cdot (t_0^k - t_3^k) + \lambda \cdot (t_2^k - t_0^k) - \lambda \cdot (t_0^k - t_4^k) = \\ &= \lambda \cdot (t_1^k - t_0^k - t_0^k + t_3^k + t_2^k - t_0^k - t_0^k + t_4^k) = \\ &= \lambda \cdot (t_1^k - 4 \cdot t_0^k + t_3^k + t_2^k + t_4^k) \end{aligned} \quad (2.6)$$

В другому випадку (рис.б, б) змінення тепловмісту контрольного об'єму $V = \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta x \cdot 1$ за проміжок часу $\Delta\tau$ визначається за формулою $c \cdot \rho \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta x \cdot \frac{t_0^{k+1} - t_0^k}{\Delta\tau} = c \cdot \rho \cdot \frac{\Delta x^2}{2} \cdot \frac{t_0^{k+1} - t_0^k}{\Delta\tau}$. Кількість теплоти, що увійшла через

ліву грань площею $S_1 = \Delta x \cdot 1$, дорівнює $\lambda \cdot \Delta x \cdot \frac{t_1^k - t_0^k}{\Delta x} = \lambda \cdot (t_1^k - t_0^k)$. Кількість те-

плоти, яка вийшла через праву грань за допомогою конвективного теплообміну з навколишнім середовищем, дорівнює $\alpha \cdot \Delta x \cdot (t_0^k - t_c)$. Кількість теплоти, що прий-

шла через верхню грань площею  шляхом теплопровідності, дорівнює

$\lambda \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_2^k - t_0^k}{\Delta x} = \lambda \cdot \frac{(t_2^k - t_0^k)}{2}$. Кількість теплоти, що вийшла через нижню грань,

дорівнює $\lambda \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_0^k - t_3^k}{\Delta x} = \lambda \cdot \frac{(t_0^k - t_3^k)}{2}$.

Рівняння балансу теплоти у даному випадку має вигляд:

$$\begin{aligned} c \cdot \rho \cdot \frac{\Delta x^2}{2} \cdot \frac{t_0^{k+1} - t_0^k}{\Delta \tau} &= \lambda \cdot (t_1^k - t_0^k) - \alpha \cdot \Delta x \cdot (t_0^k - t_c) + \lambda \cdot \frac{(t_2^k - t_0^k)}{2} - \lambda \cdot \frac{(t_0^k - t_3^k)}{2} = \\ &= \lambda \cdot \left(t_1^k - t_0^k - \frac{t_2^k}{2} - \frac{t_0^k}{2} - \frac{t_0^k}{2} + \frac{t_3^k}{2} \right) + \alpha \cdot \Delta x \cdot (t_c - t_0^k) = \\ &= 2 \cdot \lambda \cdot \left(\frac{t_1^k}{2} - t_0^k - \frac{t_2^k}{4} + \frac{t_3^k}{4} \right) + \alpha \cdot \Delta x \cdot (t_c - t_0^k) \end{aligned} \quad (2.7)$$

В третьому випадку (рис.6, в) змінення тепловмісту контрольного об'єму

$V = \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot 1$ за проміжок часу $\Delta \tau$ визначається за формулою

$c \cdot \rho \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_0^{k+1} - t_0^k}{\Delta \tau} = c \cdot \rho \cdot \frac{\Delta x^2}{4} \cdot \frac{t_0^{k+1} - t_0^k}{\Delta \tau}$. Кількість теплоти, яка увійшла

шляхом теплопровідності через ліву грань площею $S_1 = \frac{\Delta x}{2} \cdot 1$, дорівнює

$\lambda \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_1^k - t_0^k}{\Delta x} = \lambda \cdot \frac{t_1^k - t_0^k}{2}$. Кількість теплоти, що вийшла через праву грань за до-

помогою конвективного теплообміну з навколишнім середовищем, дорівнює

$\alpha \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot (t_0^k - t_c)$. Кількість теплоти, що прийшла через верхню грань площею

$S_2 = \frac{\Delta x}{2} \cdot 1$ за допомогою конвекції, дорівнює $\alpha \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot (t_c - t_0^k)$. Кількість теплоти,

що вийшла шляхом теплопровідності через нижню грань, дорівнює $\lambda \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_0^k - t_2^k}{\Delta x} = \lambda \cdot \frac{t_0^k - t_2^k}{2}$. В цьому випадку рівняння балансу теплоти має вигляд:

$$\begin{aligned} c \cdot \rho \cdot \frac{\Delta x^2}{4} \cdot \frac{t_0^{k+1} - t_0^k}{\Delta \tau} &= \lambda \cdot \frac{t_1^k - t_0^k}{2} - \alpha \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot (t_0^k - t_c) + \alpha \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot (t_c - t_0^k) - \lambda \cdot \frac{t_0^k - t_2^k}{2} = \\ &= \frac{\lambda}{2} \cdot (t_1^k - t_0^k - t_0^k - t_2^k) + \alpha \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot (-t_0^k + t_c + t_c - t_0^k) = \\ &= \frac{\lambda}{2} \cdot (t_1^k - 2 \cdot t_0^k - t_2^k) + \alpha \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot (-2 \cdot t_0^k + 2 \cdot t_c) = \\ &= \lambda \cdot \left(\frac{t_1^k}{2} - t_0^k - \frac{t_2^k}{2} \right) + \alpha \cdot \Delta x \cdot (t_c - t_0^k) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Виразимо значення t_0^{k+1} з формул (1), (2), (3):

$$t_0^{k+1} = t_0^k + \frac{\lambda \cdot \Delta \tau}{c \cdot \rho \cdot \Delta x^2} \cdot \left(t_1^k - 4 \cdot t_0^k + t_3^k + t_2^k + t_4^k \right); \quad (2.9)$$

$$; \quad (2.10)$$

$$t_0^{k+1} = t_0^k + \frac{4 \cdot \Delta \tau}{c \cdot \rho \cdot \Delta x^2} \cdot \left[\lambda \cdot \left(\frac{t_1^k}{2} - t_0^k - \frac{t_2^k}{2} \right) + \alpha \cdot \Delta x \cdot (t_c - t_0^k) \right] \quad (2.11)$$

Як бачимо з запису різницевої рівнянь (2.6)...(2.8) у даній роботі застосовується явна різницева схема [3]. При використанні явної різницевої схеми крок за часом $\Delta \tau$ не може бути довільним, величина кроку $\Delta \tau$ повинна вибиратися з умов [4] - щоб водночас виконувалися три нерівності:

$$\begin{aligned} \Delta \tau &\leq \frac{c \cdot \rho \cdot \Delta x^2}{\lambda}, \\ \Delta \tau &\leq \frac{c \cdot \rho \cdot \Delta x^2}{2 \cdot (2 \cdot \lambda + \alpha \cdot \Delta x)}, \\ \Delta \tau &\leq \frac{c \cdot \rho \cdot \Delta x^2}{4 \cdot (\lambda + \alpha \cdot \Delta x)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

При $\alpha \neq 0$ знаменник останньої дробі найбільший, тому умова тривалості різницевої схеми приймає вигляд:

$$\Delta \tau \leq \frac{c \cdot \rho \cdot \Delta x^2}{4 \cdot (\lambda + \alpha \cdot \Delta x)} \quad (2.13)$$

Приклад. Для прикладу розрахункову область зливка розбиваємо на $m \times n$ контрольних об'ємів (рис.7).

Штриховка на поверхні означає, що тепловий потік дорівнює нулю. Для кожного контрольного об'єму необхідно скласти рівняння балансу теплоти. Але, наприклад, для об'ємів ($i=2\dots m-1$), рівняння будуть ідентичними, тому для любого зливка та кількості вузлових точок можна записати 9 типів рівнянь балансу теплоти:

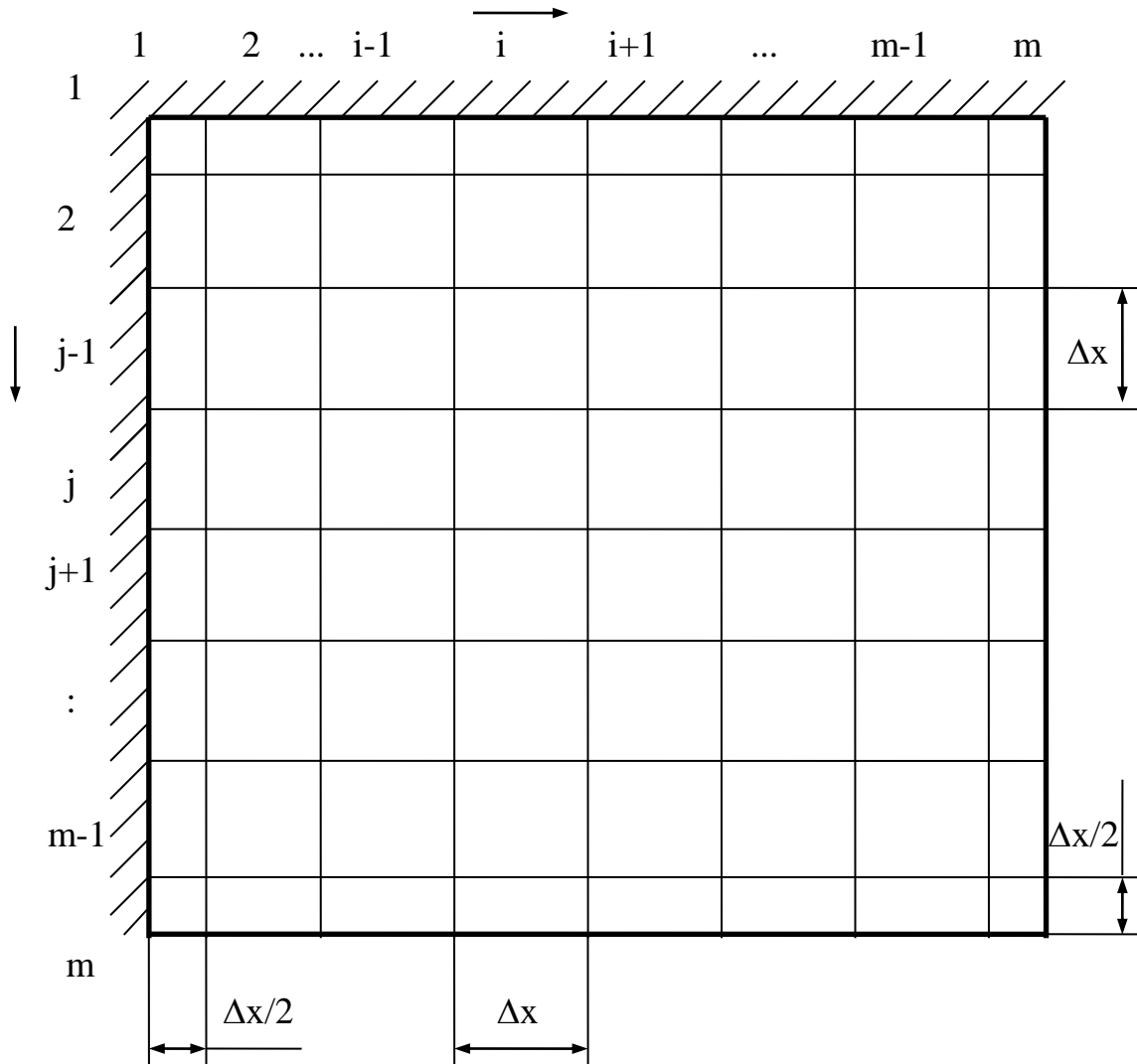


Рисунок 7 – Схема розбивки розрахункової області на контрольні об'єми

1. Контрольний об'єм з координатами $i = 1; j = 1$:

$$c \cdot \rho \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_{1,1}^{k+1} - t_{1,1}^k}{\Delta \tau} = 0 - \frac{\Delta x}{2} \cdot \lambda \cdot \frac{t_{1,1}^k - t_{2,1}^k}{\Delta x} + 0 - \frac{\Delta x}{2} \cdot \lambda \cdot \frac{t_{1,1}^k - t_{1,2}^k}{\Delta x};$$

2. Контрольні об'єми з координатами $2 \leq i \leq m-1; j = 1$:

$$c \cdot \rho \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_{i,1}^{k+1} - t_{i,1}^k}{\Delta \tau} = \frac{\Delta x}{2} \cdot \lambda \cdot \frac{t_{i-1,1}^k - t_{i,1}^k}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \cdot \lambda \cdot \frac{t_{i,1}^k - t_{i+1,1}^k}{\Delta x} + \\ + 0 - \Delta x \cdot \lambda \cdot \frac{t_{i,1}^k - t_{i,2}^k}{\Delta x};$$

3. Контрольний об'єм з координатами $i = m; j = 1$:

$$c \cdot \rho \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_{m,1}^{k+1} - t_{m,1}^k}{\Delta \tau} = \frac{\Delta x}{2} \cdot \lambda \cdot \frac{t_{m-1,1}^k - t_{m,1}^k}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \cdot \alpha \cdot (t_{m,1}^k - t_c) + \\ + 0 - \frac{\Delta x}{2} \cdot \lambda \cdot \frac{t_{m,1}^k - t_{m,2}^k}{\Delta x};$$

4. Контрольні об'єми з координатами $i = 1; 2 \leq j \leq m-1$:

$$c \cdot \rho \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta x \cdot \frac{t_{1,j}^{k+1} - t_{1,j}^k}{\Delta \tau} = 0 - \Delta x \cdot \lambda \cdot \frac{t_{1,j}^k - t_{2,j}^k}{\Delta x} + \\ + \frac{\Delta x}{2} \cdot \lambda \cdot \frac{t_{1,j-1}^k - t_{1,j}^k}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \cdot \lambda \cdot \frac{t_{1,j}^k - t_{1,j+1}^k}{\Delta x};$$

5. Контрольні об'єми з координатами $2 \leq i \leq m-1; 2 \leq j \leq m-1$:

$$c \cdot \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta x \cdot \frac{t_{i,j}^{k+1} - t_{i,j}^k}{\Delta \tau} = \Delta x \cdot \lambda \cdot \frac{t_{i-1,j}^k - t_{i,j}^k}{\Delta x} - \Delta x \cdot \lambda \cdot \frac{t_{i,j}^k - t_{i+1,j}^k}{\Delta x} + \\ + \Delta x \cdot \lambda \cdot \frac{t_{i,j-1}^k - t_{i,j}^k}{\Delta x} - \Delta x \cdot \lambda \cdot \frac{t_{i,j}^k - t_{i,j+1}^k}{\Delta x};$$

6. Контрольні об'єми з координатами $i = m; 2 \leq j \leq m-1$:

$$c \cdot \rho \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta x \cdot \frac{t_{m,j}^{k+1} - t_{m,j}^k}{\Delta \tau} = \Delta x \cdot \lambda \cdot \frac{t_{m-1,j}^k - t_{m,j}^k}{\Delta x} - \Delta x \cdot \alpha \cdot (t_{m,j}^k - t_c) + \\ + \frac{\Delta x}{2} \cdot \lambda \cdot \frac{t_{m,j-1}^k - t_{m,j}^k}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \cdot \lambda \cdot \frac{t_{m,j}^k - t_{m,j+1}^k}{\Delta x};$$

7. Контрольний об'єм з координатами $i = 1; j = m$:

$$c \cdot \rho \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_{1,m}^{k+1} - t_{1,m}^k}{\Delta \tau} = 0 - \frac{\Delta x}{2} \cdot \lambda \cdot \frac{t_{1,m}^k - t_{2,m}^k}{\Delta x} + \\ + \frac{\Delta x}{2} \cdot \lambda \cdot \frac{t_{1,m-1}^k - t_{1,m}^k}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \cdot \alpha \cdot (t_{1,m}^k - t_c);$$

8. Контрольні об'єми з координатами $2 \leq i \leq m-1; j = m$:

$$c \cdot \rho \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_{i,m}^{k+1} - t_{i,m}^k}{\Delta \tau} = \frac{\Delta x}{2} \cdot \lambda \cdot \frac{t_{i-1,m}^k - t_{i,m}^k}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \cdot \lambda \cdot \frac{t_{i,m}^k - t_{i+1,m}^k}{\Delta x} + \\ + \Delta x \cdot \lambda \cdot \frac{t_{i,m-1}^k - t_{i,m}^k}{\Delta x} - \Delta x \cdot \alpha \cdot (t_{i,m}^k - t_c);$$

9. Контрольний об'єм з координатами $i = m; j = m$:

$$c \cdot \rho \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_{m,m}^{k+1} - t_{m,m}^k}{\Delta \tau} = \frac{\Delta x}{2} \cdot \lambda \cdot \frac{t_{m-1,m}^k - t_{m,m}^k}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \cdot \alpha \cdot (t_{m,m}^k - t_c) + \\ + \frac{\Delta x}{2} \cdot \lambda \cdot \frac{t_{m,m-1}^k - t_{m,m}^k}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \cdot \alpha \cdot (t_{m,m}^k - t_c)$$

З отриманих рівнянь балансу теплоти визначаються невідомі температури контрольних об'ємів $t_{i,j}^{k+1}$ на $(k+1)$ часовому шарі:

$$t_{1,1}^{k+1} = t_{1,1}^k + \frac{2 \cdot \Delta \tau \cdot \lambda}{c \cdot \rho \cdot \Delta x^2} \cdot [t_{2,1}^k - 2 \cdot t_{1,1}^k + t_{1,2}^k];$$

$$t_{i,1}^{k+1} = t_{i,1}^k + \frac{\Delta \tau \cdot \lambda}{c \cdot \rho \cdot \Delta x^2} \cdot [t_{i-1,1}^k - 4 \cdot t_{i,1}^k + t_{i+1,1}^k + 2 \cdot t_{i,2}^k], \quad 2 \leq i \leq m-1;$$

$$t_{m,1}^{k+1} = t_{m,1}^k + \frac{2 \cdot \Delta \tau \cdot \lambda}{c \cdot \rho \cdot \Delta x^2} \cdot [t_{m-1,1}^k - 2 \cdot t_{m,1}^k + t_{m,2}^k - \Delta x \cdot \frac{\alpha}{\lambda} \cdot (t_{m,1}^k - t_c)];$$

$$t_{1,j}^{k+1} = t_{1,j}^k + \frac{\Delta\tau \cdot \lambda}{c \cdot \rho \cdot \Delta x^2} \cdot \left[2 \cdot t_{2,j}^k - 4 \cdot t_{1,j}^k + t_{1,j-1}^k + t_{1,j+1}^k \right], \quad 2 \leq j \leq m-1;$$

$$t_{i,j}^{k+1} = t_{i,j}^k + \frac{\Delta\tau \cdot \lambda}{c \cdot \rho \cdot \Delta x^2} \cdot \left[t_{i-1,j}^k - 4 \cdot t_{i,j}^k + t_{i+1,j}^k + t_{i,j-1}^k + t_{i,j+1}^k \right],$$

$$2 \leq i \leq m-1 \text{ та } 2 \leq j \leq m-1;$$

$$t_{m,j}^{k+1} = t_{m,j}^k + \frac{\Delta\tau \cdot \lambda}{c \cdot \rho \cdot \Delta x^2} \cdot \left[2 \cdot t_{m-1,j}^k - 4 \cdot t_{m,j}^k + t_{m,j-1}^k + t_{m,j+1}^k - \right. \\ \left. - 2 \cdot \Delta x \cdot \frac{\alpha}{\lambda} \cdot (t_{m,j}^k - t_c) \right]; \quad 2 \leq j \leq m-1$$

$$t_{1,m}^{k+1} = t_{1,m}^k + \frac{2 \cdot \Delta\tau \cdot \lambda}{c \cdot \rho \cdot \Delta x^2} \cdot \left[t_{2,m}^k - 2 \cdot t_{1,m}^k + t_{1,m-1}^k - \Delta x \cdot \frac{\alpha}{\lambda} \cdot (t_{1,m}^k - t_c) \right];$$

$$t_{i,m}^{k+1} = t_{i,m}^k + \frac{\Delta\tau \cdot \lambda}{- \cdot \rho \cdot \Delta x^2} \cdot \left[t_{i-1,m}^k - 4 \cdot t_{i,m}^k + t_{i+1,m}^k + 2 \cdot t_{i,m-1}^k - \right. \\ \left. - 2 \cdot \Delta x \cdot \frac{\alpha}{\lambda} \cdot (t_{i,m}^k - t_c) \right], \quad 2 \leq i \leq m-1;$$

$$t_{m,m}^{k+1} = t_{m,m}^k + \frac{2 \cdot \Delta\tau \cdot \lambda}{c \cdot \rho \cdot \Delta x^2} \cdot \left[t_{m-1,m}^k - 2 \cdot t_{m,m}^k + t_{m,m-1}^k - 2 \cdot \Delta x \cdot \frac{\alpha}{\lambda} \cdot (t_{m,m}^k - t_c) \right]$$

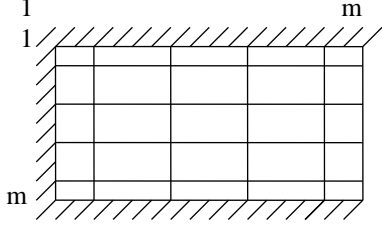
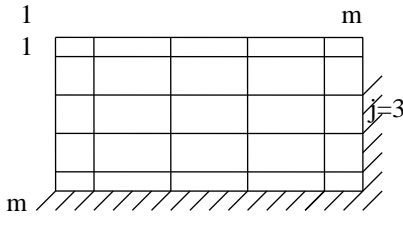
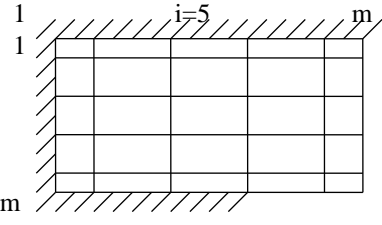
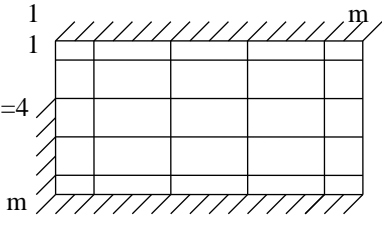
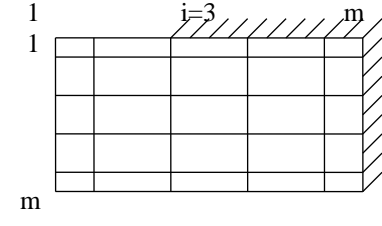
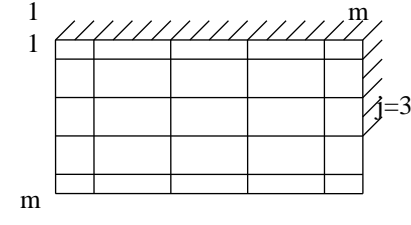
Таблиця 2.2 – Вхідні дані для розрахунку процесу охолодження зливка

Варіант	Розрахункова область	Параметри процесу
1		$t_0=1025\text{ }^{\circ}\text{C}$; $t_c=11\text{ }^{\circ}\text{C}$; $\alpha=118,5\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^{\circ}\text{C})$; $a=15\text{ см}$; $m=8$; $V_k=31\text{ мин}$; $w=1\text{ мин}$
2		$t_0=1135\text{ }^{\circ}\text{C}$; $t_c=25\text{ }^{\circ}\text{C}$; $\alpha=111,5\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^{\circ}\text{C})$; $a=25\text{ см}$; $m=7$; $V_k=29\text{ мин}$; $w=1\text{ мин}$
3		$t_0=1068\text{ }^{\circ}\text{C}$; $t_c=30\text{ }^{\circ}\text{C}$; $\alpha=123\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^{\circ}\text{C})$; $a=10\text{ см}$; $m=9$; $V_k=22\text{ мин}$; $w=2\text{ мин}$
4		$t_0=995\text{ }^{\circ}\text{C}$; $t_c=15\text{ }^{\circ}\text{C}$; $\alpha=115,5\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^{\circ}\text{C})$; $a=15\text{ см}$; $m=9$; $V_k=10\text{ мин}$; $w=1\text{ мин}$
5		$t_0=1015\text{ }^{\circ}\text{C}$; $t_c=22\text{ }^{\circ}\text{C}$; $\alpha=113,5\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^{\circ}\text{C})$; $a=25\text{ см}$; $m=8$; $V_k=28\text{ мин}$; $w=2\text{ мин}$
6		$t_0=1055\text{ }^{\circ}\text{C}$; $t_c=31\text{ }^{\circ}\text{C}$; $\alpha=104,5\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^{\circ}\text{C})$; $a=20\text{ см}$; $m=8$; $V_k=19\text{ мин}$; $w=1\text{ мин}$

Варіант	Розрахункова область	Параметри процесу
7		$t_0=1134\text{ }^{\circ}\text{C}$; $t_c=27\text{ }^{\circ}\text{C}$; $\alpha=106,5\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^{\circ}\text{C})$; $a=15\text{ см}$; $m=9$; $V_k=32\text{ мин}$; $w=2\text{ мин}$
8		$t_0=1100\text{ }^{\circ}\text{C}$; $t_c=13\text{ }^{\circ}\text{C}$; $\alpha=100\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^{\circ}\text{C})$; $a=20\text{ см}$; $m=5$; $V_k=20\text{ мин}$; $w=2\text{ мин}$
9		$t_0=1120\text{ }^{\circ}\text{C}$; $t_c=20\text{ }^{\circ}\text{C}$; $\alpha=110\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^{\circ}\text{C})$; $a=25\text{ см}$; $m=6$; $V_k=30\text{ мин}$; $w=3\text{ мин}$
10		$t_0=1080\text{ }^{\circ}\text{C}$; $t_c=32\text{ }^{\circ}\text{C}$; $\alpha=90\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^{\circ}\text{C})$; $a=20\text{ см}$; $m=5$; $V_k=12\text{ мин}$; $w=1\text{ мин}$
11		$t_0=1065\text{ }^{\circ}\text{C}$; $t_c=18\text{ }^{\circ}\text{C}$; $\alpha=115\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^{\circ}\text{C})$; $a=20\text{ см}$; $m=6$; $V_k=23\text{ мин}$; $w=1\text{ мин}$
12		$t_0=1110\text{ }^{\circ}\text{C}$; $t_c=10\text{ }^{\circ}\text{C}$; $\alpha=98\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^{\circ}\text{C})$; $a=15\text{ см}$; $m=5$; $V_k=17\text{ мин}$; $w=1\text{ мин}$

Варіант	Розрахункова область	Параметри процесу
13		$t_0=1045\text{ }^\circ\text{C}; t_c=29\text{ }^\circ\text{C};$ $\alpha=120\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^\circ\text{C});$ $a=25\text{ см}; m=7;$ $V_k=33\text{ мин}; w=3\text{ мин}$
14		$t_0=980\text{ }^\circ\text{C}; t_c=17\text{ }^\circ\text{C};$ $\alpha=114\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^\circ\text{C});$ $a=20\text{ см}; m=7;$ $V_k=11\text{ мин}; w=1\text{ мин}$
15		$t_0=1096\text{ }^\circ\text{C}; t_c=26\text{ }^\circ\text{C};$ $\alpha=110,5\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^\circ\text{C});$ $a=30\text{ см}; m=7;$ $V_k=15\text{ мин}; w=1\text{ мин}$
16		$t_0=1005\text{ }^\circ\text{C}; t_c=28\text{ }^\circ\text{C};$ $\alpha=106,5\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^\circ\text{C});$ $a=25\text{ см}; m=9;$ $V_k=27\text{ мин}; w=3\text{ мин}$
17		$t_0=1109\text{ }^\circ\text{C}; t_c=14\text{ }^\circ\text{C};$ $\alpha=113,5\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^\circ\text{C});$ $a=30\text{ см}; m=8;$ $V_k=16\text{ мин}; w=1\text{ мин}$
18		$t_0=1205\text{ }^\circ\text{C}; t_c=24\text{ }^\circ\text{C};$ $\alpha=123\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^\circ\text{C});$ $a=25\text{ см}; m=7;$ $V_k=26\text{ мин}; w=2\text{ мин}$

Варіант	Розрахункова область	Параметри процесу
19		$t_0=1158\text{ }^{\circ}\text{C}; t_c=29\text{ }^{\circ}\text{C};$ $\alpha=101\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^{\circ}\text{C});$ $a=18\text{ см}; m=4;$ $V_k=20\text{ мин}; w=2\text{ мин}$
20		$t_0=1038\text{ }^{\circ}\text{C}; t_c=17\text{ }^{\circ}\text{C};$ $\alpha=119,5\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^{\circ}\text{C});$ $a=15\text{ см}; m=6;$ $V_k=16\text{ мин}; w=1\text{ мин}$
21		$t_0=992\text{ }^{\circ}\text{C}; t_c=31\text{ }^{\circ}\text{C};$ $\alpha=134\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^{\circ}\text{C});$ $a=25\text{ см}; m=7;$ $V_k=14\text{ мин}; w=1\text{ мин}$
22		$t_0=975\text{ }^{\circ}\text{C}; t_c=12\text{ }^{\circ}\text{C};$ $\alpha=118,5\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^{\circ}\text{C});$ $a=25\text{ см}; m=9;$ $V_k=13\text{ мин}; w=1\text{ мин}$
23		$t_0=1036\text{ }^{\circ}\text{C}; t_c=33\text{ }^{\circ}\text{C};$ $\alpha=107,5\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^{\circ}\text{C});$ $a=20\text{ см}; m=7;$ $V_k=25\text{ мин}; w=1\text{ мин}$
24		$t_0=1014\text{ }^{\circ}\text{C}; t_c=21\text{ }^{\circ}\text{C};$ $\alpha=114,5\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^{\circ}\text{C});$ $a=30\text{ см}; m=5;$ $V_k=24\text{ мин}; w=2\text{ мин}$

Варіант	Розрахункова область	Параметри процесу
25		$t_0=1106\text{ }^\circ\text{C}; t_c=19\text{ }^\circ\text{C};$ $\alpha=108,5\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^\circ\text{C});$ $a=30\text{ см}; m=6;$ $V_k=18\text{ мин}; w=2\text{ мин}$
26		$t_0=1117\text{ }^\circ\text{C}; t_c=24\text{ }^\circ\text{C};$ $\alpha=109,5\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^\circ\text{C});$ $a=30\text{ см}; m=9;$ $V_k=26\text{ мин}; w=2\text{ мин}$
27		$t_0=1210\text{ }^\circ\text{C}; t_c=22\text{ }^\circ\text{C};$ $\alpha=115\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^\circ\text{C});$ $a=13\text{ см}; m=5;$ $V_k=25\text{ мин}; w=2\text{ мин}$
28		$t_0=1158\text{ }^\circ\text{C}; t_c=28\text{ }^\circ\text{C};$ $\alpha=117,5\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^\circ\text{C});$ $a=24\text{ см}; m=7;$ $V_k=30\text{ мин}; w=3\text{ мин}$
29		$t_0=1087\text{ }^\circ\text{C}; t_c=16\text{ }^\circ\text{C};$ $\alpha=112,5\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^\circ\text{C});$ $a=30\text{ см}; m=9;$ $V_k=14\text{ мин}; w=1\text{ мин}$
30		$t_0=1063\text{ }^\circ\text{C}; t_c=23\text{ }^\circ\text{C};$ $\alpha=121,5\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^\circ\text{C});$ $a=15\text{ см}; m=5;$ $V_k=21\text{ мин}; w=3\text{ мин}$

2.3 Математичне моделювання процесу твердіння зливка у виливниці квадратного перерізу (граничні умови 3-го роду)

Припускаємо, що маємо злинок у формі (рис.8, а), висота якого H . Зливков знаходиться у виливниці. Висота її також дорівнює H , що значно більше половин її сторін, які дорівнюють $2a$ (рис.8, б).

Виходячи з умов $H \gg a$ та відокремлюючи переріз $a \times a$, розглянемо задачу твердіння як двомірну. Зважаючи на симетрію зливка виділимо його четверту частину (рис.1, а) разом зі стінками виливниці. Як зразок розіб'ємо розрахункову область на $m \times m$ контрольних об'ємів у формі квадрату зі сторонами, які дорівнюють Δx , та застосуємо метод контрольного об'єму [1...3] (рис.2).

При складанні рівнянь балансу теплоти приймаємо наступні припущення:

- температура розплава t_0 в початковий момент часу $\tau = 0$ розподілена рівномірно за перерізом зливка;
- відсутні будь-які конвективні потоки в шарі металу;
- у процесі твердіння зміни об'єму металу (усадка) не враховуються, зазор між зливком та виливницею не утворюється;

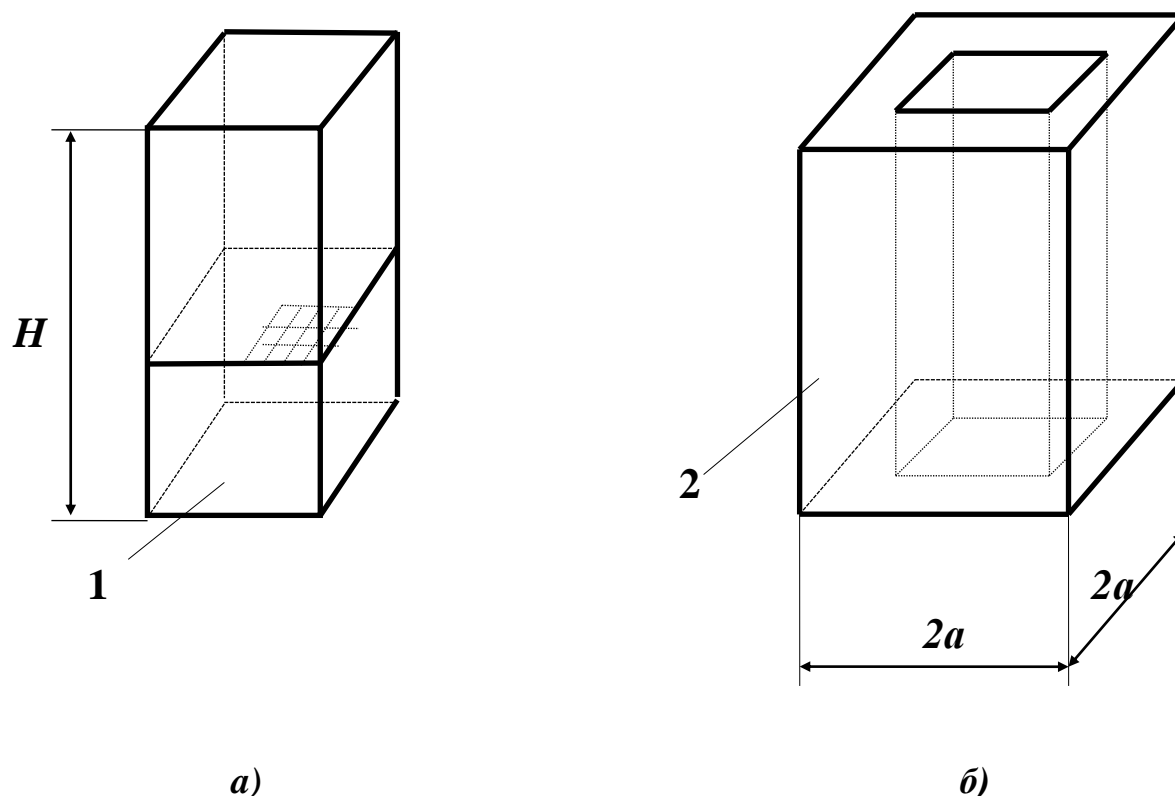


Рисунок 8 – Схема зливка (а) і виливниці (б)

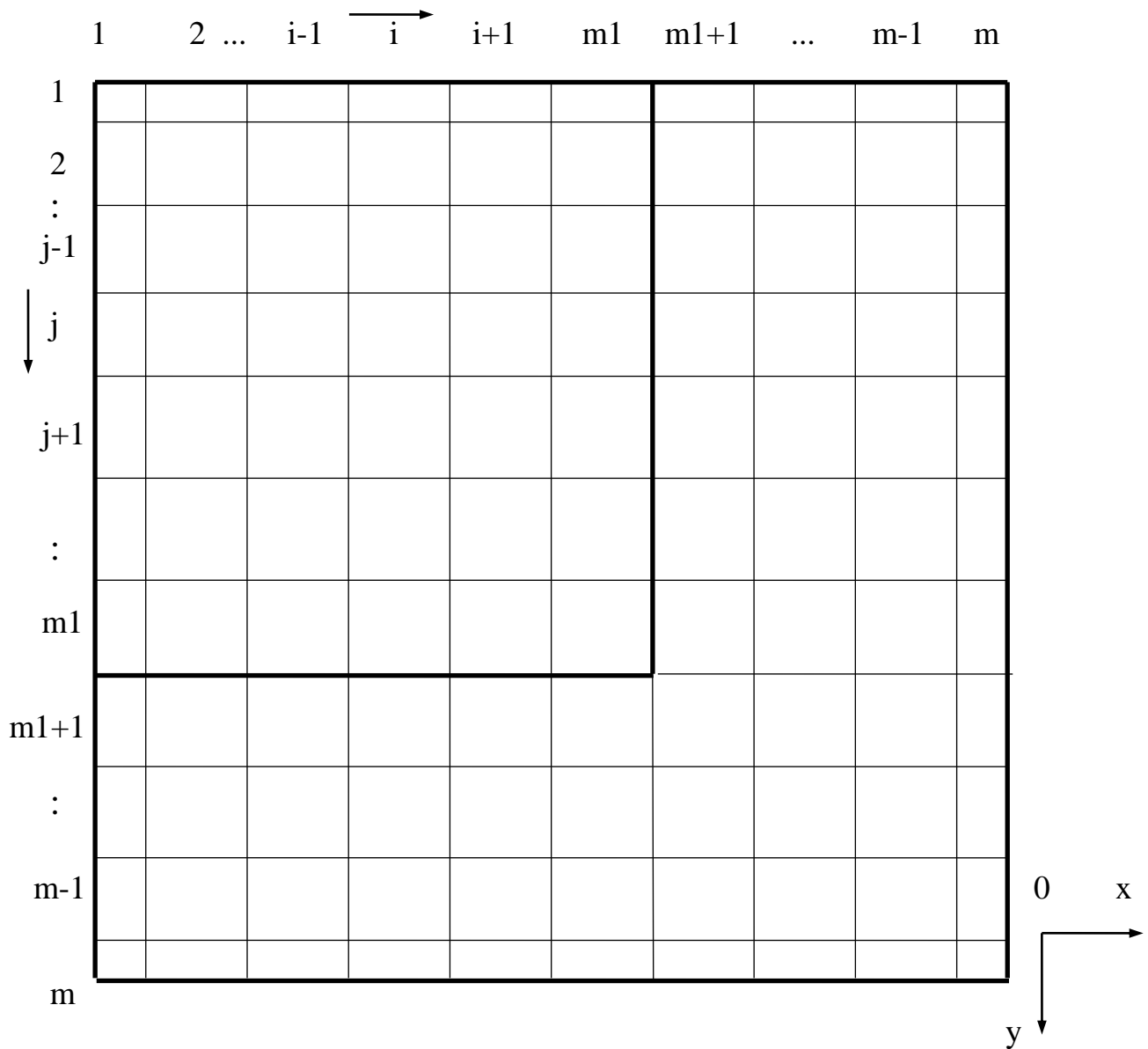


Рисунок 9 – Схема розрахункової області зливок-виливниці

- теплофізичні характеристики розплава і виливниці не залежать від температури;
- виділення теплоти фазового переходу L у двофазній зоні температур ліквідус t_L та солідус t_S враховуються шляхом збільшення теплоємності контрольованого об'єму у вигляді $c + \frac{L}{t_L - t_S}$;
- на зовнішній поверхні виливниці задається конвективний теплообмін з коефіцієнтом тепловіддачі α та температурою навколишнього середовища t_c .

Рівняння балансу теплоти

1. Контрольний об'єм з координатами $i = 1; j = 1$:

$$c_{1,1} \cdot \rho_{1,1} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_{1,1}^{k+1} - t_{1,1}^k}{\Delta \tau} = 0 - \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_{1,1}^k - t_{2,1}^k}{\frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{1,1}} + \frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{2,1}}} + 0 - \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_{1,1}^k - t_{1,2}^k}{\frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{1,1}} + \frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{1,2}}}$$

2. Контрольні об'єми з координатами $2 \leq i \leq m-1; j = 1$:

$$c_{i,1} \cdot \rho_{i,1} \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_{i,1}^{k+1} - t_{i,1}^k}{\Delta \tau} = \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_{i-1,1}^k - t_{i,1}^k}{\frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{i-1,1}} + \frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{i,1}}} - \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_{i,1}^k - t_{i+1,1}^k}{\frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{i,1}} + \frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{i+1,1}}} +$$

$$+ 0 - \Delta x \cdot \frac{t_{i,1}^k - t_{i,2}^k}{\frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{i,1}} + \frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{i,2}}};$$

3. Контрольний об'єм з координатами $i = m; j = 1$:

$$c_{m,1} \cdot \rho_{m,1} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_{m,1}^{k+1} - t_{m,1}^k}{\Delta \tau} = \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_{m-1,1}^k - t_{m,1}^k}{\frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{m-1,1}} + \frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{m,1}}} - \frac{\Delta x}{2} \cdot \alpha_{m,1} \cdot (t_{m,1}^k - t_c) +$$

$$+ 0 - \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_{m,1}^k - t_{m,2}^k}{\frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{m,1}} + \frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{m,2}}};$$

4. Контрольні об'єми з координатами $i = 1; 2 \leq j \leq m-1$:

$$c_{1,j} \cdot \rho_{1,j} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta x \cdot \frac{t_{1,j}^{k+1} - t_{1,j}^k}{\Delta \tau} = 0 - \Delta x \cdot \frac{t_{1,j}^k - t_{2,j}^k}{\frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{1,j}} + \frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{2,j}}} +$$

$$+ \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_{1,j-1}^k - t_{1,j}^k}{\frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{1,j-1}} + \frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{1,j}}} - \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_{1,j}^{k+1} - t_{1,j+1}^k}{\frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{1,j}} + \frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{1,j+1}}};$$

5. Контрольні об'єми з координатами $2 \leq i \leq m-1$; $2 \leq j \leq m-1$:

$$c_{i,j} \cdot \rho_{i,j} \cdot \Delta x \cdot \Delta x \cdot \frac{t_{i,j}^{k+1} - t_{i,j}^k}{\Delta \tau} = \Delta x \cdot \frac{t_{i-1,j}^k - t_{i,j}^k}{\frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{i-1,j}} + \frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{i,j}}} - \Delta x \cdot \frac{t_{i,j}^k - t_{i+1,j}^k}{\frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{i,j}} + \frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{i+1,j}}} +$$

$$+ \Delta x \cdot \frac{t_{i,j-1}^k - t_{i,j}^k}{\frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{i,j-1}} + \frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{i,j}}} - \Delta x \cdot \frac{t_{i,j}^k - t_{i,j+1}^k}{\frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{i,j}} + \frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{i,j+1}}};$$

6. Контрольні об'єми з координатами $i = m$; $2 \leq j \leq m-1$:

$$c_{m,j} \cdot \rho_{m,j} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta x \cdot \frac{t_{m,j}^{k+1} - t_{m,j}^k}{\Delta \tau} = \Delta x \cdot \frac{t_{m-1,j}^k - t_{m,j}^k}{\frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{m-1,j}} + \frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{m,j}}} - \Delta x \cdot \alpha_{m,j} \cdot (t_{m,j}^k - t_c) +$$

$$+ \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_{m,j-1}^k - t_{m,j}^k}{\frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{m,j-1}} + \frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{m,j}}} - \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_{m,j}^k - t_{m,j+1}^k}{\frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{m,j}} + \frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{m,j+1}}};$$

7. Контрольний об'єм з координатами $i = 1$; $j = m$:

$$c_{1,m} \cdot \rho_{1,m} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_{1,m}^{k+1} - t_{1,m}^k}{\Delta \tau} = 0 - \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_{1,m}^k - t_{2,m}^k}{\frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{1,m}} + \frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{2,m}}} +$$

$$+ \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_{1,m-1}^k - t_{1,m}^k}{\frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{1,m-1}} + \frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{1,m}}} - \frac{\Delta x}{2} \cdot \alpha_{1,m} \cdot (t_{1,m}^k - t_c);$$

8. Контрольні об'єми з координатами $2 \leq i \leq m-1$; $j = m$:

$$c_{i,m} \cdot \rho_{i,m} \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_{i,m}^{k+1} - t_{i,m}^k}{\Delta \tau} = \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_{i-1,m}^k - t_{i,m}^k}{\frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{i-1,m}} + \frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{i,m}}} - \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_{i,m}^k - t_{i+1,m}^k}{\frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{i,m}} + \frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{i+1,m}}} +$$

$$+ \Delta x \cdot \frac{t_{i,m-1}^k - t_{i,m}^k}{\frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{i,m-1}} + \frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{i,m}}} - \Delta x \cdot \alpha_{i,m} \cdot (t_{i,m}^k - t_c);$$

9. Контрольний об'єм з координатами $i = m; j = m$:

$$c_{m,m} \cdot \rho_{m,m} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_{m,m}^{k+1} - t_{m,m}^k}{\Delta \tau} = \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_{m-1,m}^k - t_{m,m}^k}{\frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{m-1,m}} + \frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{m,m}}} - \frac{\Delta x}{2} \cdot \alpha_{m,m} \cdot (t_{m,m}^k - t_c) \\ + \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{t_{m,m-1}^k - t_{m,m}^k}{\frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{m,m-1}} + \frac{\Delta x}{2 \cdot \lambda_{m,m}}} - \frac{\Delta x}{2} \cdot \alpha_{m,m} \cdot (t_{m,m}^k - t_c)$$

Масиви теплофізичних параметрів щільності $\rho_{i,j}$, теплопровідності $\lambda_{i,j}$ і питомої теплоємності $c_{i,j}$ формуються наступним чином:

$$\rho_{i,j} = \rho_{зл}; \lambda_{i,j} = \lambda_{зл}; c_{i,j} = c_{зл} \quad \text{при } 1 \leq i \leq m1 \quad \text{і } 1 \leq j \leq m1$$

$$\rho_{i,j} = \rho_{вил}; \lambda_{i,j} = \lambda_{вил}; c_{i,j} = c_{вил} \quad \text{при } m1+1 \leq i \leq m \quad \text{і } 1 \leq j \leq m1$$

$$\text{та } 1 \leq i \leq m \quad \text{і } m1+1 \leq j \leq m,$$

де $\rho_{зл}, \lambda_{зл}, c_{зл}, \rho_{вил}, \lambda_{вил}, c_{вил}$ – щільність, теплопровідність і питома теплоємність відповідно для матеріалів зливка і виливниці.

Теплофізичні величини зливка в залежності від температури приймають наступні значення:

$$\rho_{зл}, \lambda_{зл}, c_{зл} = \begin{cases} \rho_p, \lambda_p, c_p & \text{при } t_{i,j}^k > t_L; \\ \rho_d, \lambda_d, c_d + \frac{L}{t_L - t_S} & \text{при } t_S \leq t_{i,j}^k \leq t_L; \\ \rho_T, \lambda_T, c_T & \text{при } t_{i,j}^k < t_S, \end{cases}$$

де ρ_p, λ_p, c_p – щільність, теплопровідність і питома теплоємність рідкої фази зливка; ρ_T, λ_T, c_T – щільність, теплопровідність і питома теплоємність твердої фази зливка; ρ_d, λ_d, c_d – щільність, теплопровідність і питома теплоємність у двофазній фазі зливка; L - теплота фазового переходу (прихована теплота плавлення) сталі в інтервалі температур t_L і t_S , Дж/кг.

Алгоритм розрахунків

1. Опис масивів - $t_{i,j}^k; t_{i,j}^{k+1}; \rho_{i,j}; \lambda_{i,j}; c_{i,j}$.

2. Введення вхідних даних -

$$\Delta x, \Delta \tau, W, t_S, t_L, t_c, t_p, t_{\text{вил}}, c_{\text{вил}}, \rho_{\text{вил}}, \lambda_{\text{вил}}, c_p, \rho_p, \lambda_p.$$

3. Формування початкового поля температур за формулами:

$$t_{i,j}^0 = t_p \quad \text{при } 1 \leq i \leq m1 \quad i \quad 1 \leq j \leq m1;$$

$$t_{i,j}^0 = t_{\text{вил}} \quad \text{при } m1+1 \leq i \leq m \quad i \quad 1 \leq j \leq m1 \quad \text{та} \quad 1 \leq i \leq m \quad i \quad m1+1 \leq j \leq m.$$

4. На основі поля температур $t_{i,j}^k$ формуються масиви теплофізичних величин $\rho_{i,j}, \lambda_{i,j}$ і $c_{i,j}$.

5. Поле температур $t_{i,j}^{k+1}$ розраховуємо за формулами, які виведені з рівнянь балансу теплоти:

$$t_{1,1}^{k+1} = t_{1,1}^k + \frac{4 \cdot \Delta \tau}{c_{1,1} \cdot \rho_{1,1} \cdot \Delta x} \cdot \left[-\frac{t_{1,1}^k - t_{2,1}^k}{\frac{\Delta x}{\lambda_{1,1}} + \frac{\Delta x}{\lambda_{2,1}}} - \frac{t_{1,1}^k - t_{1,2}^k}{\frac{\Delta x}{\lambda_{1,1}} + \frac{\Delta x}{\lambda_{1,2}}} \right];$$

$$t_{i,1}^{k+1} = t_{i,1}^k + \frac{2 \cdot \Delta \tau}{c_{i,1} \cdot \rho_{i,1} \cdot \Delta x} \cdot \left[\frac{t_{i-1,1}^k - t_{i,1}^k}{\frac{\Delta x}{\lambda_{i-1,1}} + \frac{\Delta x}{\lambda_{i,1}}} - \frac{t_{i,1}^k - t_{i+1,1}^k}{\frac{\Delta x}{\lambda_{i,1}} + \frac{\Delta x}{\lambda_{i+1,1}}} - 2 \cdot \frac{t_{i,1}^k - t_{i,2}^k}{\frac{\Delta x}{\lambda_{i,1}} + \frac{\Delta x}{\lambda_{i,2}}} \right], \quad 2 \leq i \leq m-1;$$

$$t_{m,1}^{k+1} = t_{m,1}^k + \frac{4 \cdot \Delta \tau}{c_{m,1} \cdot \rho_{m,1} \cdot \Delta x} \cdot \left[\frac{t_{m-1,1}^k - t_{m,1}^k}{\frac{\Delta x}{\lambda_{m-1,1}} + \frac{\Delta x}{\lambda_{m,1}}} - \frac{\alpha_{m,1}}{2} \cdot (t_{m,1}^k - t_c) - \frac{t_{m,1}^k - t_{m,2}^k}{\frac{\Delta x}{\lambda_{m,1}} + \frac{\Delta x}{\lambda_{m,2}}} \right];$$

$$t_{1,j}^{k+1} = t_{1,j}^k + \frac{2 \cdot \Delta \tau}{c_{1,j} \cdot \rho_{1,j} \cdot \Delta x} \cdot \left[-2 \cdot \frac{t_{1,j}^k - t_{2,j}^k}{\frac{\Delta x}{\lambda_{1,j}} + \frac{\Delta x}{\lambda_{2,j}}} + \frac{t_{1,j-1}^k - t_{1,j}^k}{\frac{\Delta x}{\lambda_{1,j-1}} + \frac{\Delta x}{\lambda_{1,j}}} - \frac{t_{1,j}^k - t_{1,j+1}^k}{\frac{\Delta x}{\lambda_{1,j}} + \frac{\Delta x}{\lambda_{1,j+1}}} \right], \quad 2 \leq j \leq m-1;$$

$$t_{i,j}^{k+1} = t_{i,j}^k + \frac{2 \cdot \Delta \tau}{c_{i,j} \cdot \rho_{i,j} \cdot \Delta x} \cdot \left[\frac{t_{i-1,j}^k - t_{i,j}^k}{\frac{\Delta x}{\lambda_{i-1,j}} + \frac{\Delta x}{\lambda_{i,j}}} - \frac{t_{i,j}^k - t_{i+1,j}^k}{\frac{\Delta x}{\lambda_{i,j}} + \frac{\Delta x}{\lambda_{i+1,j}}} + \frac{t_{i,j-1}^k - t_{i,j}^k}{\frac{\Delta x}{\lambda_{i,j-1}} + \frac{\Delta x}{\lambda_{i,j}}} - \frac{t_{i,j}^k - t_{i,j+1}^k}{\frac{\Delta x}{\lambda_{i,j}} + \frac{\Delta x}{\lambda_{i,j+1}}} \right],$$

$2 \leq i \leq m-1 \quad \text{та} \quad 2 \leq j \leq m-1;$

$$t_{m,j}^{k+1} = t_{m,j}^k + \frac{2 \cdot \Delta\tau}{c_{m,j} \cdot \rho_{m,j} \cdot \Delta x} \cdot \left[2 \cdot \frac{t_{m-1,j}^k - t_{m,j}^k}{\frac{\Delta x}{\lambda_{m-1,j}} + \frac{\Delta x}{\lambda_{m,j}}} - \alpha_{m,j} \cdot (t_{m,j}^k - t_c) + \frac{t_{m,j-1}^k - t_{m,j}^k}{\frac{\Delta x}{\lambda_{m,j-1}} + \frac{\Delta x}{\lambda_{m,j}}} - \frac{t_{m,j}^k - t_{m,j+1}^k}{\frac{\Delta x}{\lambda_{m,j}} + \frac{\Delta x}{\lambda_{m,j+1}}} \right],$$

$$2 \leq j \leq m-1;$$

$$t_{1,m}^{k+1} = t_{1,m}^k + \frac{4 \cdot \Delta\tau}{c_{1,m} \cdot \rho_{1,m} \cdot \Delta x} \cdot \left[- \frac{t_{1,m}^k - t_{2,m}^k}{\frac{\Delta x}{\lambda_{1,m}} + \frac{\Delta x}{\lambda_{2,m}}} + \frac{t_{1,m-1}^k - t_{1,m}^k}{\frac{\Delta x}{\lambda_{1,m-1}} + \frac{\Delta x}{\lambda_{1,m}}} - \frac{\alpha_{1,m}}{2} \cdot (t_{1,m}^k - t_c) \right];$$

$$t_{i,m}^{k+1} = t_{i,m}^k + \frac{2 \cdot \Delta\tau}{c_{i,m} \cdot \rho_{i,m} \cdot \Delta x} \cdot \left[\frac{t_{i-1,m}^k - t_{i,m}^k}{\frac{\Delta x}{\lambda_{i-1,m}} + \frac{\Delta x}{\lambda_{i,m}}} - \frac{t_{i,m}^k - t_{i+1,m}^k}{\frac{\Delta x}{\lambda_{i,m}} + \frac{\Delta x}{\lambda_{i+1,m}}} + 2 \cdot \frac{t_{i,m-1}^k - t_{i,m}^k}{\frac{\Delta x}{\lambda_{i,m-1}} + \frac{\Delta x}{\lambda_{i,m}}} - \alpha_{i,m} \cdot (t_{i,m}^k - t_c) \right],$$

$$2 \leq i \leq m-1;$$

$$t_{m,m}^{k+1} = t_{m,m}^k + \frac{4 \cdot \Delta\tau}{c_{m,m} \cdot \rho_{m,m} \cdot \Delta x} \cdot \left[\frac{t_{m-1,m}^k - t_{m,m}^k}{\frac{\Delta x}{\lambda_{m-1,m}} + \frac{\Delta x}{\lambda_{m,m}}} + \frac{t_{m,m-1}^k - t_{m,m}^k}{\frac{\Delta x}{\lambda_{m,m-1}} + \frac{\Delta x}{\lambda_{m,m}}} - \alpha_{m,m} \cdot (t_{m,m}^k - t_c) \right]$$

6. Перенесення отриманного поля температур $t_{i,j}^{k+1}$ на $(k+1)$ -му часовому інтервалі в полі температур $t_{i,j}^k$ на k -му часовому інтервалі.
7. Накопичування у лічильнику часу V процесу тведіння і у лічильнику часу друку S , який використовується для друку результатів розрахунків.
8. Перевірка умови $S < W$, де W - заданий інтервал друку результатів. При виконанні данної умови управління передається на пункт 4. Якщо $S \geq W$, тоді виконується друк часу процесу V і поля температур $t_{i,j}^k$. Лічильник друку обнуляємо (тобто $S=0$).
9. Перевірка умови $t_{1,1}^k < t_s$ (повне твердіння зливка). При виконанні цієї умови відбувається зупинка розрахунку. Якщо $t_{1,1}^k \geq t_s$, тоді управління передається до пункту 4 і розрахунок повторюється.

Вхідні дані для розрахунку

Розміри зливка - $a_1 \times a_1$, $a_1=0,18$ м.

Розміри виливниці - $a \times a$, $a=0,27$ м.

Крок за довжиною та шириною - $\Delta x=0,03$ м.

Температура солідус - $t_s=1490$ °С.

Температура ліквідус - $t_L=1530$ °С.

Температура середовища - $t_c=20$ °С.

Коефіцієнт тепловіддачі конвекцією обчислюється за формулою: $\alpha_{i,j}= 10-0,06 \cdot t_{i,j}$.

Коефіцієнт теплопровідності виливниці - $\lambda_{вил}=25$ Вт/(м·°С).

Коефіцієнт питомої теплоємності виливниці - $c_{вил}=1000$ Дж/(кг·°С).

Щільність матеріалу виливниці - $\rho_{вил}=6900$ кг/м³.

Коефіцієнт теплопровідності твердої сталі - $\lambda_T=30$ Вт/(м·°С).

Коефіцієнт питомої теплоємності твердої сталі - $c_T=710$ Дж/(кг·°С).

Щільність твердої сталі - $\rho_T=7800$ кг/м³.

Коефіцієнт теплопровідності рідкої сталі - $\lambda_p=17$ Вт/(м·°С).

Коефіцієнт питомої теплоємності рідкої сталі - $c_p=820$ Дж/(кг·°С).

Щільність рідкої сталі - $\rho_p= 7000$ кг/м³.

Теплота фазового переходу - $L=260000$ Дж/кг.

Таблиця 2.3 – Початкові температури виливниці і заливаємого розплава (зливка)

Варіант	Температура виливниці, °С	Температура розплава, °С	Варіант	Температура виливниці, °С	Температура розплава, °С
1	100	1500	16	440	1530
2	150	1500	17	490	1530
3	200	1500	18	140	1535
4	250	1505	19	180	1535
5	300	1505	20	220	1535
6	350	1505	21	230	1540
7	400	1510	22	270	1540
8	450	1510	23	310	1540
9	500	1515	24	360	1545
10	110	1515	25	380	1545
11	210	1515	26	420	1550
12	240	1520	27	460	1550
13	260	1520	28	470	1555
14	340	1525	29	490	1555
15	410	1525	30	510	1555

2.4 Математичне моделювання процесу плавлення тіла правильної геометричної форми (метод Дюзінбєра)

Якість металу, зниження енергетичних та сировинних витрат металургійного виробництва визначаються ефективністю проведення ряду технологічних операцій виплавки та позапічної обробки чавуну і сталі. Невід'ємною головною частиною технологічних операцій є плавлення твердих матеріалів у рідкому розплаві печі або ковша, тому дослідження кінетичних закономірностей при плавленні твердих матеріалів є актуальним завданням для практики. Математична модель, яка описує температурне поле та кінетику плавлення тіла, відноситься до класу задач теплопровідності з рухомими межами. Для рішення цього класу задач використовується найбільш універсальний та широко розповсюджений метод сіток.

У даному пункті наведений алгоритм математичного моделювання процесу плавлення тіл правильної геометричної форми. До таких тіл відносяться: пластина нескінченної довжини шириною $2 \cdot z_0$, циліндр нескінченної довжини з радіусом z_0 та куля з радіусом z_0 . Значення z_0 прийнято називати характерним розміром тіла правильної геометричної форми.

При моделюванні процесу плавлення тіл правильної геометричної форми зробимо деякі припущення [6-8]:

- у процесі плавлення зменшуються розміри тіла, але форма остається незмінною;
- частина тіла, яка розплавилася, миттєво отримує достатню для її повного стікання рухомість;
- тіло, що плавиться, характеризується визначеною температурою плавлення, тобто плавлення відбувається не в інтервалі температур, а при постійній температурі.

Вводимо наступні позначки:

α - коефіцієнт тепловіддачі навколишнього середовища до тіла, що плавиться, Вт/(м²·°C); $t_{сер}$ - температура навколишнього середовища, °C; $t_{пл}$ - температура плавлення тіла °C; t_0 - початкова температура тіла, °C; L - питома прихована теплота плавлення тіла, Дж/кг (кількість теплоти, яка необхідна для розплавлення 1 кг речовини); ρ - щільність тіла, кг/м³; c - питома теплоємність тіла, Дж/(кг·°C); λ - теплопровідність тіла, Вт/(м·°C); F - поверхня тіла, м²; Δz - глибина плавлення за час $d\tau$, м; z - товщина твердого залишку, м; $\frac{dz}{d\tau}$ - швидкість плавлення тіла, м/с.

2.4.1 Плавлення тіла, попередньо прогрітого по всій масі до температури плавлення

Так як тіло прогріто, то кількість теплоти $q = \alpha \cdot (t_{\text{сер}} - t_{\text{пл}})$, яка підведена до поверхні тіла F , витрачається тільки на його розплавлення. Припустимо, що за час $d\tau$ розплавилася частина тіла розміром dz . Для того, щоб розплавити тіло масою $m = F \cdot dz \cdot \rho$, потрібно затратити кількість теплоти, яка визначиться у вигляді $L \cdot \rho \cdot F \cdot (-dz)$. Знак “-“ вказує, що тіло зменшується у розмірі. Прирівнюючи кількість теплоти, яка підведена та витрачена на розплавлення, отримуємо рівняння [5]:

$$\alpha \cdot (t_{\text{сер}} - t_{\text{пл}}) \cdot F \cdot d\tau = F \cdot L \cdot \rho \cdot (-dz) \quad (2.14)$$

Із рівняння (2.14) отримуємо швидкість розплавлення:

$$\frac{dz}{d\tau} = - \frac{\alpha \cdot (t_{\text{сер}} - t_{\text{пл}})}{L \cdot \rho} \quad (2.15)$$

Знак “-“ вказує, що товщина твердого залишку тіла z зменшується.

Після інтегрування рівняння (2) отримуємо:

$$z = - \frac{\alpha \cdot (t_{\text{сер}} - t_{\text{пл}})}{L \cdot \rho} \cdot \tau + c \quad (2.16)$$

Так як при $\tau = 0$ $z = z_0$, то отримуємо кінцевий вираз:

$$z = z_0 - \frac{\alpha \cdot (t_{\text{сер}} - t_{\text{пл}})}{L \cdot \rho} \cdot \tau \quad (2.17)$$

З формули (2.17) легко визначити повний час $\tau_{\text{п}}$ розплавлення тіла:
при $z = 0$

$$\tau_{\text{п}} = \frac{z_0 \cdot L \cdot \rho}{\alpha \cdot (t_{\text{сер}} - t_{\text{пл}})} \quad (2.18)$$

2.4.2 Плавлення тіла, попередньо непрогрітого по всій масі до температури плавлення

Із рисунка 10 виходить, що у розглядаємому випадку в процесі розплавлення тіла (пластини, циліндра або кулі) необхідно враховувати прогрівання тіла (по його ширині або радіусу). У літературі такі задачі називають задачами

теплопровідності стефанівського типу. Вони зустрічаються у чорній металургії та зварювальному виробництві. Наприклад, при зварюванні різних матеріалів відбувається прогрівання електроду по довжині та його розплавлення. При виплавці чавуну відбуваються процеси прогрівання гарячими газами коксу і агломерату та їхнього оплавлення. При виплавці сталі

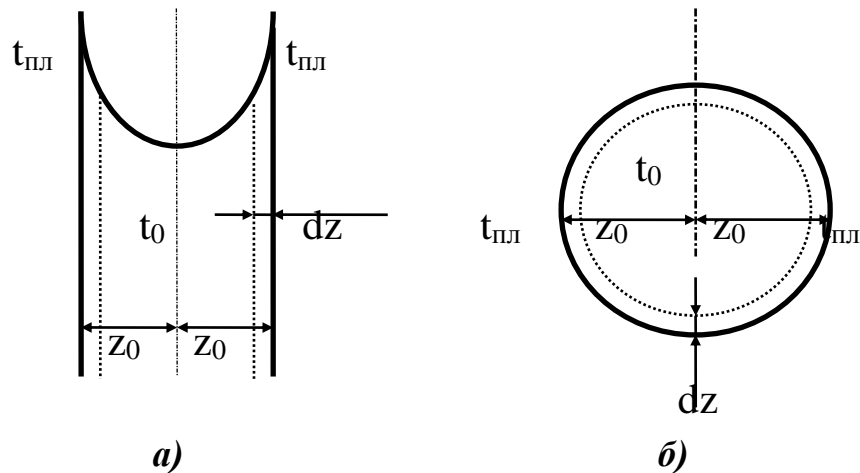


Рисунок 10 – Розподіл температури по ширині пластини або по радіусу циліндра (а) і по радіусу кулі (б)

у кисневому конвертері відбувається попереднє підігрівання газоподібними продуктами горіння палива брукхту з його частковим розплавленням.

При опису математичної моделі даного процесу припускаємо, що теплофізичні параметри тіла (щільність, теплоємність, теплопровідність) постійні. На поверхні тіла підтримується температура плавлення $t_{пл} < t_{сер}$. У початковий момент часу $\tau = 0$ тіло має однакову температуру по всій ширині або радіусу.

Математична модель, яка описує процес розплавлення тіла правильної геометричної форми, має вигляд:

Рівняння теплопровідності

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = \lambda \cdot \left(\frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\nu}{x} \cdot \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} \right), \quad (2.19)$$

$$0 < x < z(\tau), \quad \tau > 0,$$

де $\nu = 0$ для пластини, $\nu = 1$ для циліндра та $\nu = 2$ для кулі.

Межові умови

$$\frac{\partial t(0, \tau)}{\partial x} = 0, \quad \tau > 0; \quad (2.20)$$

у період розплавлення

$$t(z, \tau) = t_{пл}; \quad (2.21)$$

у період прогрівання

$$-\lambda \cdot \frac{\partial a}{\partial x} = \alpha \cdot (t_{сер} - t), \quad x = z(\tau); \quad (2.22)$$

$$-\rho \cdot L \cdot \frac{dz(\tau)}{d\tau} = \alpha \cdot (t_{сер} - t_{пл}) - \lambda \cdot \frac{\partial a(x, \tau)}{\partial x}, \quad x = z(\tau). \quad (2.23)$$

Початкові умови

$$t(x, 0) = t_0, \quad z(0) = z_0 \quad (2.24)$$

Для вирішення цієї задачі існує значна кількість приблизних аналітичних та різницевих методів. У цій роботі використана різницева схема розрахунку, яка заснована на методі Дюзінбера [6...8].

2.4.3 Алгоритм розрахунку

Характерний розмір тіла z_0 розбиваємо на m частин розміром Δx таким чином, що $z_0 = \Delta x \cdot m$ (рис.2.11). Чим більше значення m , тим точніше отримуються результати, але час розрахунку на ЕОМ збільшується. Для представлення рівнянь (2.19)...(2.24) у різницевому вигляді використовуємо явну схему розрахунку [9, 10]. Рівняння (2.19)...(2.24) у різницевій формі мають вигляд:

$$\frac{t_1^{n+1} - t_1^n}{\Delta \tau} = \frac{a}{\Delta x^2} \cdot (t_2^n - t_1^n), \quad (2.25)$$

$$\frac{t_i^{n+1} - t_i^n}{\Delta \tau} = a \cdot \left(\frac{t_{i-1}^n - 2 \cdot t_i^n + t_{i+1}^n}{\Delta x^2} + \frac{\nu}{(i-1) \cdot \Delta x} \cdot \frac{t_{i+1}^n - t_{i-1}^n}{\Delta x} \right), \quad i = 2, 3, \dots, m-1; \quad (2.26)$$

де $a = \frac{\lambda}{c \cdot \rho}$ - коефіцієнт температуропровідності, m^2/c .

У період розплавлення

$$t_m^{n+1} = t_{пл}; \quad (2.27)$$

у період нагрівання

$$\rho \cdot c \cdot \frac{t_m^{n+1} - t_m^n}{\Delta \tau} = \frac{\alpha}{\Delta x} \cdot (t_{сер} - t_m^n) - \lambda \cdot \frac{t_m^n - t_{m-1}^n}{\Delta x^2}; \quad (2.28)$$

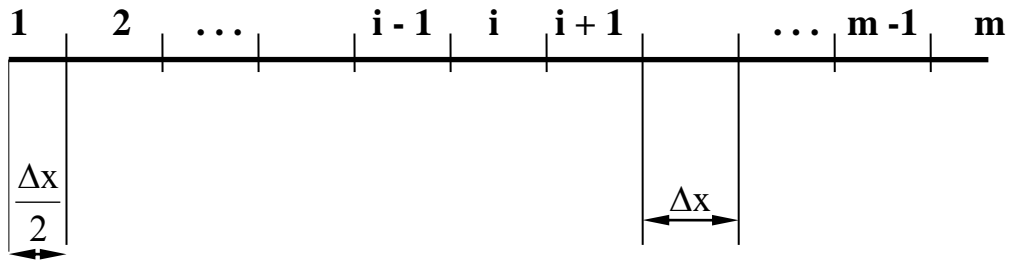


Рисунок 11 – Схема розбиття тіла правильної геометричної форми на розрахункові елементи

$$-\rho \cdot L \cdot \frac{z^{n+1} - z^n}{\Delta\tau} = \alpha \cdot (t_{\text{сеп}} - t_{\text{пл}}) - \lambda \cdot \frac{t_{\text{пл}} - t_{m-1}^n}{\Delta x}; \quad (2.29)$$

$$t_i^0 = t_0, i = 1, 2, \dots, m \quad (2.30)$$

Із рівнянь (2.25)...(2.30) можна визначити температури у точках $1 \leq i \leq m$ за наступними формулами:

$$t_1^{n+1} = t_1^n + \frac{a \cdot \Delta\tau}{\Delta x^2} \cdot (t_2^n - t_1^n); \quad (2.31)$$

$$t_i^{n+1} = t_i^n + \frac{a \cdot \Delta\tau}{\Delta x^2} \cdot \left[(t_{i-1}^n - 2 \cdot t_i^n + t_{i+1}^n) + \frac{v}{i-1} \cdot (t_{i+1}^n - t_{i-1}^n) \right], i = 2, 3, \dots, m-1; \quad (2.32)$$

у період нагрівання

$$t_m^{n+1} = t_m^n + \frac{\alpha \cdot \Delta\tau}{\rho \cdot c \cdot \Delta x} \cdot (t_{\text{сеп}} - t_m^n) - \frac{\lambda \cdot \Delta\tau}{\rho \cdot c \cdot \Delta x^2} \cdot (t_m^n - t_{m-1}^n) \quad (2.33)$$

Послідовність розрахунку по даній схемі наступна:

1. В усі розрахункові вузли $1 \leq i \leq m$ подаємо початкову температуру t_0 , тобто $t_i^0 = t_0$.
2. Змінній z надаємо значення z_0 .
3. Визначаємо крок за координатою $\Delta x = \frac{z_0}{m}$.
4. Визначаємо крок за часом $\Delta\tau = \frac{0,1 \cdot \Delta x^2}{a}$.
5. Визначаємо температуру t_1^{n+1} за формулою (2.31).
6. Визначаємо температуру t_m^{n+1} у поверхньому вузлі тіла за формулою (2.33).

7. Якщо получимо, що $t_m^{n+1} > t_{пл}$, то температуру t_m^n у вузлі m змінюємо на температуру плавлення тіла $t_{пл}$.
 8. Визначаємо температуру t_i^{n+1} в усіх внутрішніх ($2 \leq i \leq m-1$) вузлах за формулою (2.32).
 9. Поле температур t_i^{n+1} на наступному часовому шарі, що визначено за формулами (2.31)...(2.33), заносимо у поле температур t_i^n на попередньому шарі, тобто $t_i^{n+1} \rightarrow t_i^n$.
 10. Визначаємо поточний час процесу - сумуємо кроки за часом $V = V + \Delta\tau$;
 11. Якщо $t_m^{n+1} > t_{пл}$, то накопичуємо різницю $t_m^{n+1} - t_{пл}$ в окремій змінній $S = S + (t_m^{n+1} - t_{пл})$. Переходимо до п.12. Якщо $t_m^{n+1} \leq t_{пл}$, переходимо до п.5;
 12. Перевіряємо нерівність $S \geq \frac{L}{c}$. Якщо виповнюється, то :
 - а) значення m зменшується на одиницю (розплавився поверхневий шар розміром Δx);
 - б) значення межі z зменшується на величину Δx ;
 - в) друкуємо поле температур t_i^n ($1 \leq i \leq m$) та час процесу V ;
 - г) переходимо до п.13.
- Якщо $S < \frac{L}{c}$, то переходимо до п.5;
13. Перевіряємо умову $M > 0$. Якщо вона виконується, то переходимо до п.5, якщо ні, то робимо зупинку рахунку.

2.4 Порядок оформлення завдань

При виконанні кожного практичного завдання його необхідно оформляти у наступній послідовності.

Завдання повинно бути набрано і роздруковано у середовищі текстового редактору Microsoft Word та містити у собі:

1. Умову завдання.
2. Сформульовану фізичну постановку задачі для свого варіанту (початкові дані за кожним варіантом кожного завдання наведені відповідних таблицях).
3. Опис математичної постановки завдання.
4. Схему розбиття розрахункової області на елементарні об'єми.
5. Листінг програми на алгоритмічній мові Turbo Pascal.
6. Результати розрахунків.
7. Зробити аналіз динаміки процесу.
8. Побудувати блок-схеми процесу.

ЛИТЕРАТУРА, ЩО РЕКОМЕНДУЄТЬСЯ

1. Теория подобия и размерностей. Моделирование / П.М.Алабужев, В.Б.Геронимус, Л.М.Минкевич, Б.А.Шеховцов.- М.: Высшая школа, 1968.- 208 с.
2. Крейт Ф., Блэк У. Основы теплопередачи.- М: Мир, 1983.- 512 с.
3. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. - М.: Энергия, 1979.- 344 с.
4. Самарский А.А. Введение в теорию разносных систем.- М.:Наука, 1971.- 552 с.
5. Гольдфарб Э.М. Теплотехника металлургических процессов.-М.: Металлургия, 1967.- 439 с.
6. Радл Р.У. Затвердевание отливок.- М.: Машгиз, 1960.- 391 с.
7. Теплообмен и тепловые режимы в промышленных печах / В.И.Тимошпольский, И.А.Трусова, А.Б.Стеблов, И.А.Павлюченков // Под общ. ред. В.И.Тимошпольского.- Минск: Вышэйшая школа, 1992.- 217 с.
8. Павлюченков И.А. Численное моделирование (на основе метода Дюзинбера) процессов плавления тел в расплаве / Математичне моделювання.- № 2, 1997.- С.37-43.
9. Огурцов А.П., Мамаев Л.М., Каримов И.К. Математические методы и модели в расчётах на ЭВМ.- К.: ИСМО, 1997.- 192 с.
10. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учебное пособия для вузов.- М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989.- 432 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні вказівки до практичних робіт з дисципліни «Моделювання технологічних та фізичних процесів» (розділи – «Фізичне моделювання» і «Математичне моделювання») освітньо-наукової програми вищої освіти (підготовка докторів філософії) зі спеціальності 136 «Металургія».

Укладач: Пантейков Сергій Петрович

Підписано до друку _____ 2017 р.
Формат 60x84 ¹/₁₆. Обсяг _____ др. арк.
Тираж _____ прим. Замовлення № _____
51918, м. Кам'янське,
вул. Дніпробудівська, 2