

## Бифуркации динамических режимов в гидросистеме, включающей центробежный насос

ГОЦУЛЕНКО В.В., ГОЦУЛЕНКО В.Н.

Институт предпринимательства “Стратегия”

В данной работе рассмотрена математическая модель автоколебаний (помпажа) в гидросистеме, включающей центробежный насос при впуске воздуха в подводящей магистрали. Экспериментально установлен характер деформации напорной характеристики насоса в зависимости от диаметра отверстия, через которое осуществляется выпуск воздуха. Также проведен бифуркационный анализ рассматриваемых автоколебаний при варьировании волнового сопротивления колебательного контура гидросистемы.

В даній роботі розглянута математична модель автоколивань (помпажу) у гідросистемі, що включає відцентровий насос при впуску повітря в підвідну магістраль. Експериментально встановлено характер деформації напірної характеристики насоса залежно від діаметра отвору, через який здійснюється впуск повітря. Також проведений біфуркаційний аналіз розглянутих автоколивань при варіюванні хвильового опору коливального контуру гідросистеми.

In this paper we consider the mathematical model of the oscillations (surge) in the hydraulic system comprising a centrifugal pump with the inlet air supply line. Experimentally established nature of the deformation characteristics of the pump pressure, depending on the diameter of the holes through which the inlet air. Also conducted bifurcation analysis of the considered oscillations in the variation of the wave resistance oscillatory circuit of the hydraulic system.

**Введение.** Известно, что подача воздуха или газа в подводящую магистраль лопастного насоса является причиной образования на напорной характеристике  $H(Q, \delta)$  восходящей ветви, где  $\delta$  – величина объемного расхода газовой фазы [1]. Стационарный режим насоса на восходящей ветви напорной характеристики является неустойчивым. Самовозбуждающиеся продольные автоколебания при выполнении условия  $\partial H / \partial Q > 0$  в гидро или пневмосистемах имеют характер помпажа [2 - 3].

Особенностью автоколебаний помпажа шнеко – центробежного насоса при таких условиях является возможность их возбуждения при устойчивой монотонно убывающей напорной характеристике насоса в целом [4 - 5]. Это обусловлено тем, что подача воздуха в подводящую магистраль порождает восходящую ветвь на напорной характеристике шнекового насоса, что является причиной его помпажа, т.к. между шнеком и центробежной ступенью образуется оседлая каверна и гидросистема имеет две степени свободы [4 - 5].

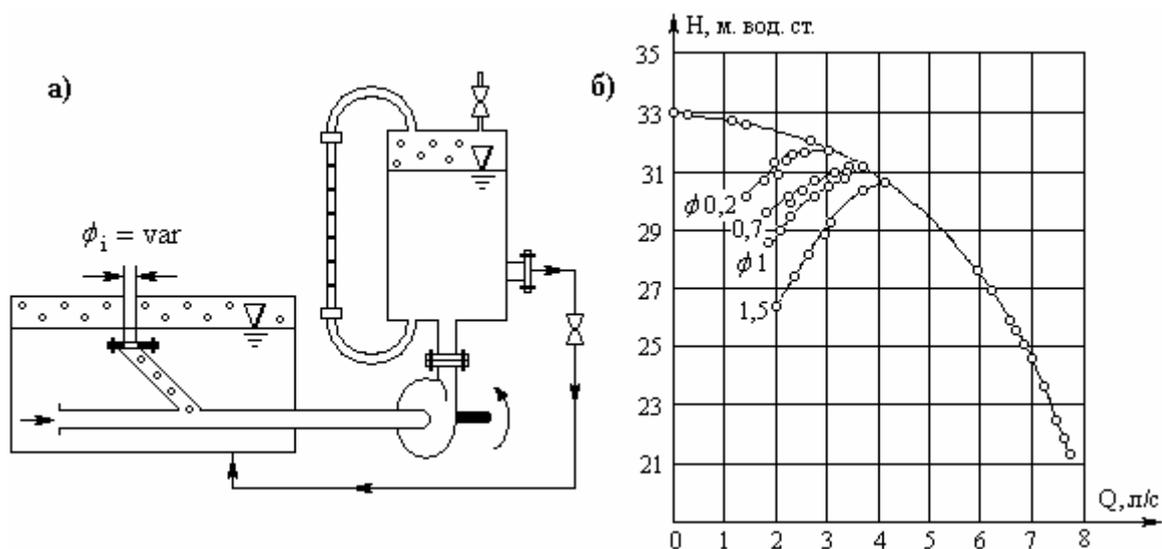


Рис. 1. Схема экспериментального стенда, неразветвленная напорная характеристика насоса 2К – 6 и ее деформации при разных диаметрах отверстий для впуска воздуха, когда давление на входе в насос  $P_{вх} = 0.9$  ата

В гидросистеме с центробежным насосом 2К – 6 при снижении уровня в емкости, из которой осуществляется перемещение воды, образуется провал уровня и возникает воронка, через которую осуществляется всасывание воздуха из атмосферы в подводящую магист-

раль насоса. При этом возбуждаются релаксационные автоколебания с дальнейшим срывом подачи насоса. Причиной данных автоколебаний являются восходящие ветви  $\partial H(Q, \phi_i) / \partial Q > 0$ , возникающие на монотонно убывающей характеристике  $H(Q)$ , которые опреде-

лены экспериментально для ряда значений диаметра  $\phi_i$  ( $i = \overline{1; n}$ ) отверстий на сменных заглушках, устанавливаемых на подводящей к насосу магистрали (рис. 1, а). Ветви характеристики  $H(Q, \phi_i)$  для различных значений диаметров  $\phi_i$  приведены на рис. 1, б.

В [6] было установлено, что изменению плотности потока жидкости образуется отрицательное сопротивление. При впуске воздуха также уменьшается плотность и образуется отрицательное сопротивление, которое приводит к появлению восходящих ветвей на напорной характеристике  $H(Q, \phi_i)$  при разных диаметрах  $\phi_i$  отверстий, через которые впускается воздух.

**Постановка задачи.** В данной работе определяются автоколебания помпажа при использовании, деформированной впуском воздуха через отверстие  $\phi = 1.5$  мм, напорной характеристики  $H(Q, \phi)$  насоса 2К-6.

Нестационарные движения жидкости в гидросистеме (рис. 1, а) описываются следующей нелинейной автономной динамической системой [7]:

$$\begin{cases} \frac{L_a}{\rho g} \frac{dQ}{dt} = H(Q, \phi_i) - R(Q) - P, \\ \rho g C_a \frac{dP}{dt} = Q - \varphi(P), \end{cases} \quad (1)$$

где  $P = (p_6 - p_e) / \rho g$ ,  $\varphi(P) = Q_{\text{вых}}$  – расход, выходящий из напорной емкости колебательного контура через магистраль с гидравлической характеристикой  $P = H_0 + kQ_{\text{вых}}^2$ . В дальнейшем, гидравлическими потерями  $R(Q)$  в колебательном контуре, ввиду их малости [7] будем пренебрегать. Экспериментально установленные деформации напорной характеристики  $H(Q, \phi)$  (рис. 1, б) аналитически достаточно точно аппроксимируются следующим семейством функций:

$$H(Q, \phi) = \eta - |Q - \xi|^\mu \Psi(Q, Q_0) + \varepsilon k_3 (Q - \xi)^\nu, \quad (2)$$

где  $\Psi(Q, Q_0) = k_1 \varepsilon (Q - Q_0)^{-\varepsilon} + \varepsilon k_2 (Q - Q_0)^\nu$ ;  $Q_0 = f(\phi)$ ;  $k_i > 0$  ( $i = \overline{1; 3}$ );  $\eta, \mu, \varepsilon, \nu > 0$ ;  $Q_0 < \xi$ . При этом, согласно определению функции  $\varphi(P)$ , также справедливо представление  $\varphi(P) = \xi \left[ (P - H_0) (H(\xi) - H_0) \right]^{-1/a}$ , где  $\xi$  – стационарное значение расхода,  $a = 1/2$ .

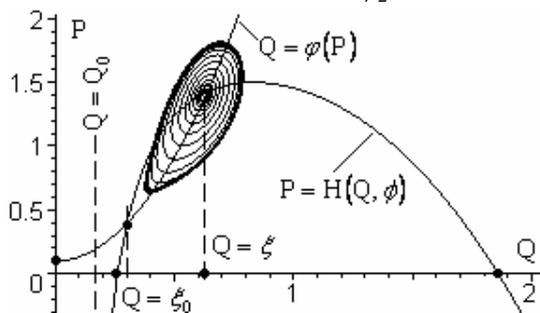


Рис. 2. Типичный вид характеристик и предельного цикла автоколебаний в гидросистеме (рис. 1, а)

Полагая  $\alpha = \rho g / L_a$ ,  $\beta = 1 / \rho g C_a$ , с учетом (2), окончательно систему (1) представим в виде

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = \alpha \left[ \eta - |Q - \xi|^\mu \Psi(Q, Q_0) + \varepsilon k_3 (Q - \xi)^\nu - P \right], \\ \frac{dP}{dt} = \beta \left[ Q - \xi \left[ (P - H_0) (H(\xi) - H_0) \right]^{-1/a} \right]. \end{cases} \quad (3)$$

Динамическая система (3) имеет два положения равновесия  $\xi_0$  и  $\xi$  ( $\xi_0 \leq \xi$ ). Стандартный анализ данных особых точек показывает [8], что  $O_1 = [\xi, H(\xi, \phi)]^T$  – является фокусом, характер устойчивости которого зависит от значений коэффициентов, входящих в состав (3), а  $O_2 = [\xi_0, H(\xi_0, \phi)]^T$  – особая седловая точка (рис. 2).

Дальнейший анализ системы (3) будем проводить с помощью численных методов. Для этого воспользуемся программой **Maple**, являющейся программным пакетом для автоматизации символьных, численных и графических вычислений [9]. Функция **phaseportrait** из библиотеки **DEtools** позволяет строить фазовые кривые динамических систем при заданных начальных условиях.

**Анализ локальных и глобальных бифуркаций.** При варьировании параметров рассматриваемой динамической системы ее фазовый портрет претерпевает ряд как локальных, так и глобальных бифуркаций, в частности связанных с рождением гомоклинической кривой. Рассмотрим данные бифуркации более подробно. Прежде всего, отметим, что система (3) имеет два положения равновесия:  $O_1$  – фокус и  $O_2$  – седловая особая точка. Будем рассматривать волновое сопротивление  $Z$  как бифуркационный параметр. При достаточно большом значении  $Z$  система (3) имеет две особые траектории (рис. 3, а): сепаратрису  $K_1$  седла  $O_2$ , которая является его устойчивым инвариантным многообразием, и гетероклиническую кривую  $K_2$ , асимптотически приближающуюся при  $t \rightarrow +\infty$  к фокусу  $O_1$ , а при  $t \rightarrow -\infty$  – к седлу  $O_2$ . В этом случае система (1) имеет единственный аттрактор – устойчивый фокус  $O_1$ .

С уменьшением величины  $Z$ , при некотором первом бифуркационном его значении  $Z = Z_1$  возникает гомоклиническая кривая  $K_3$ , являющаяся петлей сепаратрисы седла  $O_2$ . При этом фокус  $O_1$  остается аттрактором с областью притяжения ограниченной гомоклинической кривой (рис. 3, б). В точке бифуркации  $Z = Z_1$  фазовый портрет является негрубым (структурно неустойчивым) и при дальнейшем уменьшении  $Z < Z_1$ , гомоклиническая кривая разрушается (рис. 3, в) и из нее рождается неустойчивый предельный цикл  $\Gamma_1$ . До сих пор бифуркации были глобальными, связанными с качественной топологической перестройкой всего фазового портрета системы (3). Однако при дальнейшем снижении  $Z$  возникают также следующие локальные бифуркации. При некотором значении  $Z = Z_2$  фокус  $O_1$  становится неустойчивым и от него ответвляется устойчивый предельный цикл  $\Gamma_2$  (рис. 3, г). Эта бифуркация является локальной, и представляет собой суперкритическую бифуркацию Андронова – Хопфа [10]. Размеры

рождаемого предельного цикла  $\Gamma_2$  при этом определяются по порядку как корень квадратный из надкритичности, т.е. имеет место асимптотика:

$$\text{Amplitude}(\Gamma_2) = \text{Const}|Z-Z_2|^{\frac{1}{2}}(1+o(1)) \text{ при } Z \rightarrow Z_2.$$

При дальнейшем уменьшении  $Z$  циклы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  притягиваются друг к другу, и при некотором значении  $Z=Z_3$  происходит бифуркация слияния устойчивого  $\Gamma_2$  и неустойчивого  $\Gamma_1$  циклов. В точке бифуркации (т.е. при  $Z=Z_3$ ) возникает двойной (полуустойчивый) предельный цикл  $\Gamma_3$  [11] (рис. 3, д). При  $Z < Z_3$  цикл  $\Gamma_3$  разрушается, фокус  $O_1$  становится репеллером и система (3) аттракторов не имеет (рис. 3, е).

**Возможность физической реализации движений динамической системы (3).** Хорошо известно [11], что математическая модель в виде динамической системы с одной степенью свободы адекватно описывает соответствующую физическую картину лишь при условии ее структурной устойчивости. Поэтому в рассматриваемом случае системы (3) не все вышеописанные динамические режимы физически реализуемы.

При бифуркационных значениях параметров динамической системы, она является негрубой (структурно неустойчивой). В связи с этим, лишь фазовые портреты, приведенные на рис. 3, а, в, г, е и только они описывают возможные режимы функционирования исходной гидросистемы (рис. 1). Т.к. лишь в этом случае динамическая система (3) является адекватной математической моделью рассматриваемой гидросистемы.

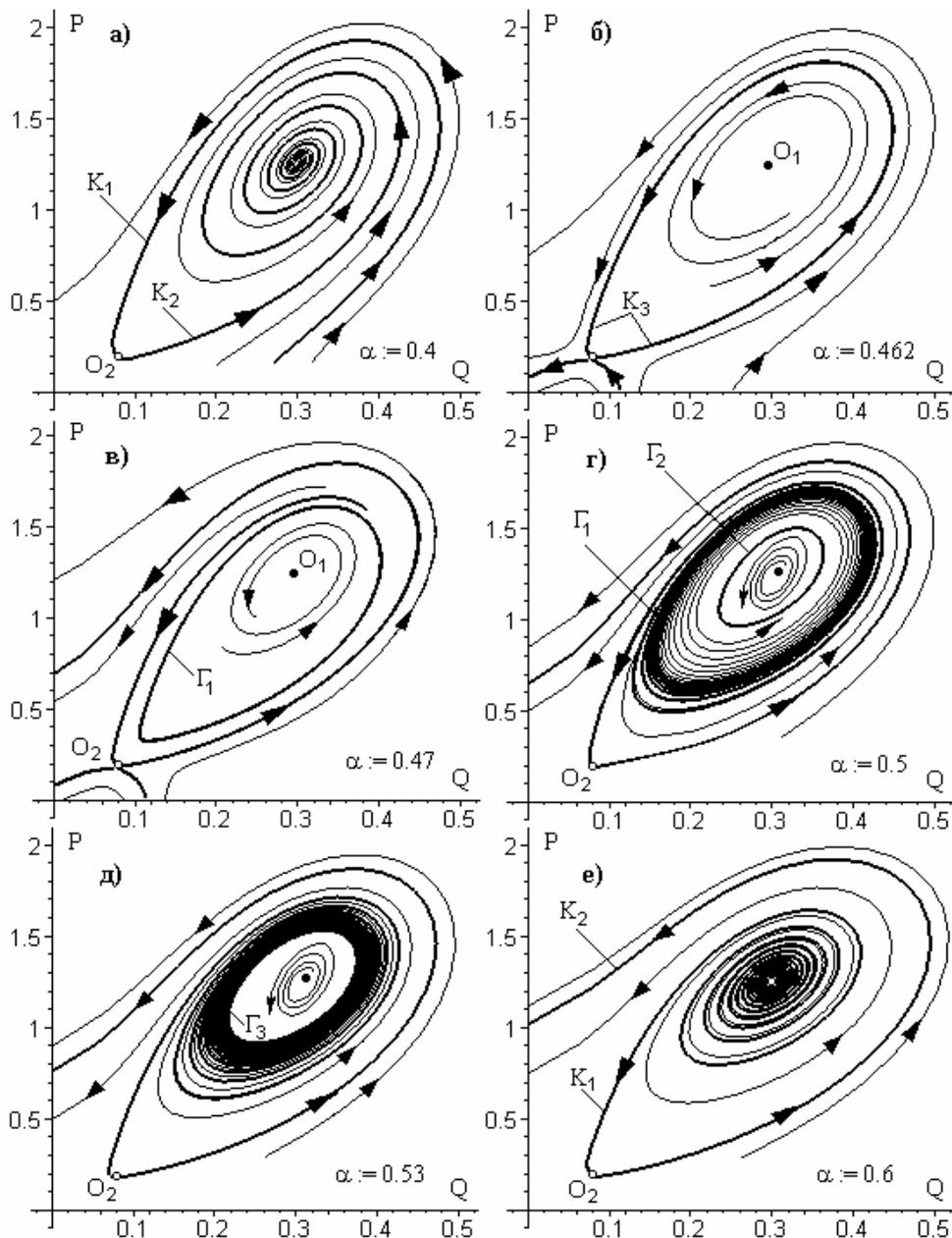


Рис.3. Фазовые портреты системы (3) при варьировании  $Z = \sqrt{L_a/C_a} \equiv \rho g \sqrt{\beta/\alpha}$

Особо отметим случай (рис. 3, г), который неоднократно экспериментально наблюдался в рассматриваемой экспериментальной установке (рис. 1). При малых, постоянно присутствующих в системе, случайных возмущениях самовозбуждаются автоколебания, описываемые устойчивым предельным циклом  $\Gamma_2$ . Однако, при значительных возмущениях, “выбрасывающих” фазовую точку вне неустойчивого предельного цикла  $\Gamma_1$ , возникают нарастающие колебания, приводящие в дальнейшем к срыву работы гидросистемы (рис. 1).

Ветви напорной характеристики (рис.1, б) аналогичны восходящим кавитационным разветвлениям  $H(Q, \Delta h)$  характеристики  $H(Q)$ , где  $\Delta h$  – величина кавитационного запаса этого же насоса 2К – 6 [12], образующиеся перед срывом подачи. В [13] теоретически определены автоколебания в области восходящих разветвлений  $H(Q, \Delta h)$ , которые при определенных условиях были устойчивыми. При снижении расхода насоса или волнового сопротивления  $Z$  колебательного контура гидросистемы [13] амплитуда автоколебаний возрастала, а их характер становился неустойчивым.

### Выводы

При всасывании воздуха в подводящую к насосу магистраль поток становится двухфазным и уменьшается его плотность, что является причиной образования нисходящей ветви (“отрицательного” сопротивления) на зависимости гидравлических потерь в насосе. Это приводит к образованию восходящих ветвей  $\partial H(Q, \phi_i) / \partial Q > 0$  на напорной характеристике  $H(Q, \phi_i)$  насоса при различных диаметрах  $\phi_i$  отверстий, через которые впускается воздух (рис. 1, а).

При изменении волнового сопротивления  $Z$  колебательного контура гидросистемы проведен бифуркационный анализ фазовых портретов соответствующей динамической системы. Это позволило в целом установить принципиально возможные типы движений в рассматриваемой задаче.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бычкова Л. С. Напорные характеристики шнековых насосов, перекачивающих газожидкостные смеси / Л. С. Бычкова, Е. Н. Лысов, Б. И. Петров и др. – В кн. Кавитационные автоколебания в насосных сис-

2. темах. – К.: Наукова думка, 1976. – Ч.1.– С.95 – 100.
2. Казакевич В. В. Автоколебания (помпаж) в компрессорах: моногр. / Казакевич В. В. – М.: Машиностроение, 1974. – 264 с.
3. Шерстюк А. Н. Насосы, вентиляторы, компрессоры / Шерстюк А. Н. – М.: Высшая школа, 1972.– 342 с.
4. Водяницкий В. П. Возникновение автоколебаний в гидравлической системе при подаче свободного газа на вход в насос / Водяницкий В. П. // В кн. Кавитационные автоколебания в насосных системах. – К.: Наукова думка, 1976. – Ч. 1. – С. 86 –95.
5. Гоцуленко В. В. Об особенностях помпажа шнеко-центробежного насоса / В. В. Гоцуленко // Системные технологии. – 2002. –№ 3(20). – С. 3 – 7.
6. Басок Б. И. Автоколебания жидкости в горизонтальном трубопроводе при ее нагреве / Б. И. Басок, В. В. Гоцуленко, В. Н. Гоцуленко // Промышленная теплотехника. – 2011. – Т.33, № 3. – С. 5 – 11.
7. Гоцуленко В.В. Особенности помпажа центробежного насоса при кавитации / В. В. Гоцуленко, В. Н. Гоцуленко // Горная энергомеханика и автоматика: междунар. науч.-техн. конф., 19 – 21 ноября 2003 г. : тезисы докл. – Д., 2003. – Т. 2. – С. 60 – 67.
8. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Арнольд В.И. – М.: Наука, 1984.–268с.
9. Прохоров Г. В. Пакет символьных вычислений Maple V / Г. В. Прохоров, М. А. Леденев, В. В. Колбеев. – М.: Петит, 1997. – 198 с.
10. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах: механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах / Анищенко В. С.– М.: Наука, 1990. –312 с.
11. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. / Неймарк Ю.И. – М. : Наука, 1972. – 472 с.
12. Гоцуленко В. Н. Экспериментальное исследование автоколебаний в системе, включающей лопастной насос с монотонно убывающей напорной характеристикой / В.Н. Гоцуленко, Н. Н. Гоцуленко // Энергомашиностроение. – 1978. – № 5. – С. 44 – 45.
13. Гоцуленко В. В. Особенность автоколебаний (помпажа) лопастных насосов /В. В. Гоцуленко, В.Н. Гоцуленко // Инженерно – физический журнал. – 2012. – Т. 85, № 1. – С. 117 – 122.