

косвенным подтверждением полноты смешения расплавов.

Показано, что численные расчеты по математической модели в разработанной постановке задачи позволяют довольно точно определить толщину твердого слоя в каждый момент затвердевания слитка, что дает возможность установить оптимальный момент долива второго расплава. Показано, что движение потоков металла в жидкой сердцевине слитка при доливке достаточно интенсивно для обеспечения смешения двух расплавов.

Сравнение расчетных данных роста толщины твердой корки с результатами определения толщины слоев по закону квадратного корня показывает их удовлетворительное совпадение.

Двухэтапная модель затвердевания слитка с доливкой может быть использована для прогнозирования времени формирования слоев заданной толщины, что позволит создавать новые варианты композиционных высоколегированных сталей, с целью экономии дорогостоящих легирующих элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А. Лейбензон, Ф.В. Недопекин, В.М. Кондратенко и др. Затвердевание металлических композиций: производство и моделирование.- Донецк: ООО «Юго-восток, Лтд»,- 2005.- 231 с.
2. А.Н. Головачев, А.П. Стовпченко, В.Ю. Болотов, И.А. Павлюченков. Математическая модель сопряженной двухэтапной задачи гидродинамики и теплопереноса при формировании биметаллического слитка. Сообщение 1 // Математичне моделювання. - 2011. - №1(24). - С. 29-31.
3. А.Н. Головачев, И.В. Стовпченко, А.П. Стовпченко. Компьютерная методика прогнозирования хода затвердевания, состава и свойств внутреннего слоя литых композитных материалов // Компьютерное материаловедение и обеспечение качества. Одесса, 28 – 29 апреля, 2006 г. -Одесса, 2006.-С. 151-152.

пост. 21.12.2011

Напряженно-деформированное состояние составного цилиндра в нестационарном осесимметричном тепловом поле

НОВИКОВА О.С.

Запорожская государственная инженерная академия

Предлагается подход к решению осесимметричной задачи термоупругости, в котором решение нестационарной задачи теплопроводности и решение задачи теории упругости строятся в виде базисных функций, представленных через ультрасферические многочлены.

Пропонується підхід до вирішення осесимметричної задачі термопружності, в якому рішення нестационарної задачі теплопроводності і рішення задачі теорії пружності будуються у вигляді базисних функцій, представлених через ультрасферичні многочлени.

An approach to solving the axisymmetric problem of thermoelasticity in which the solution of nonstationary heat conduction problem and the solution of elasticity theory constructed in the form of basis functions represented by ultraspherical polynomials.

Введение. Наиболее распространенным подходом к решению задач о тепловой осесимметричной деформации цилиндра конечной длины является решение задачи теплопроводности путем интегральных преобразований Лапласа, что позволяет представить термоупругий потенциал перемещений через функции Бесселя [1]. В данной работе форма решений для температуры и соответствующих перемещений для случая осевой симметрии получена как частный случай пространственной задачи [2].

Представление решений для термоупругого потенциала перемещений. Температурное поле $T(x, y, z)$ приводит к возникновению перемещений в упругом теле, которые удовлетворяют уравнениям равновесия в перемещениях [1]

$$\nabla^2 u_\gamma + \frac{1}{(1-2\nu)} \frac{\partial e}{\partial \gamma} - 2 \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \alpha_T \frac{\partial T}{\partial \gamma} = 0, \quad (1)$$

$$e = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \gamma = x, y, z$$

где ν и α_T — коэффициенты Пуассона и линейного расширения, соответственно.

Частное решение системы (1) в виде градиента термоупругого потенциала перемещений φ [1]

$$U^T = \text{grad} \varphi \quad (2)$$

устанавливает связь между температурой и потенциалом в форме

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T T \quad (3)$$

Предположим, что существуют две последовательности функций φ_n и T_n , такие что

$$\nabla^2 \varphi_n = c_n T_n \quad (4)$$

Представление решений для температуры и потенциала в виде

$$T = \sum_{n=0}^N a_n T_n \quad \varphi = \sum_{n=0}^N b_n \varphi_n \quad (5)$$

позволяет определить потенциал φ из определений (3) и (5) непосредственно путем сравнения коэффициентов в (4).

В [2] получено, что функция

$$\Phi_n^{(\lambda)} = \frac{1}{n!} \rho^n (1-t^2)^{2\beta} P_{n-2, \beta}^{(\lambda)} \quad (6)$$

удовлетворяет требуемому соотношению (4), а именно

$$\nabla^2 \Phi_n^{(\lambda)} = \frac{2\lambda-1}{2(\lambda-1)} \Phi_{n-2}^{(\lambda-1)} \quad (7)$$

Здесь $P_n^{(\lambda)}(t)$ ультрасферические многочлены [3], т.е. многочлены степени n ортогональные на отрезке $[-1;1]$ с весовой функцией $(1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$, $n=0,1,\dots$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $t = t_\gamma = \frac{\gamma}{r}$, $\gamma = x, y, z$, $\lambda = \beta + \frac{1}{2}$, $\beta = 0,1,2,\dots$

При этом выполняются рекуррентные соотношения для производной

$$\frac{\partial \Phi_n^{(\lambda)}}{\partial \gamma} = \Phi_{n-1}^{(\lambda)}, \quad \gamma = x, y, z \quad t = \frac{\gamma}{r} \quad (8)$$

Ультрасферические полиномы при $\lambda = \frac{1}{2}$ являются многочленами Лежандра $P_n(t)$, а для значений

$\lambda = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ введем обозначения $V_n(t) = P_n^{(\frac{3}{2})}(t)$,

$G_n(t) = P_n^{(\frac{5}{2})}(t)$. Тогда из (6) получаем три функции

$$\eta_n = \Phi_n^{(\frac{1}{2})} = \frac{1}{n!} \rho^n P_n(t) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \psi_n &= \Phi_n^{(\frac{3}{2})} = \frac{1}{n!} \rho^n (1-t^2) V_{n-2}(t) = \\ &= \frac{1}{n!} r^2 \rho^{n-2} V_{n-2}(t) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\Phi_n = \frac{3}{n!} \rho^n (1-t^2)^2 G_{n-4}(t) = \frac{3}{n!} r^4 \rho^{n-4} G_{n-4}(t) \quad (11)$$

Здесь $t = \frac{z}{\rho}$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}$.

Согласно (7) функции (9)-(11) удовлетворяют условиям

$$\nabla^2 \eta_n = 0, \quad \nabla^2 \psi_n = 2\eta_{n-2}, \quad \nabla^2 \Phi_n = 4\psi_{n-2} \quad (12)$$

и для их производных справедливы формулы

$$\frac{\partial \eta_n}{\partial r} = -\frac{\psi_n}{r}, \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial r} = r\eta_{n-2}, \quad \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} = r\psi_{n-2}$$

Таким образом, получаем, что при представлении решения задачи теплопроводности в форме

$$T = \sum_{n=0}^N a_n \eta_n \quad \text{и} \quad T = \sum_{k=2}^K b_k \psi_k$$

потенциал температурных перемещений соответственно будет иметь вид

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\gamma}{2} \sum_{n=0}^N a_n \psi_{n+2} \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{\gamma}{4} \sum_{k=2}^K b_k \Phi_{k+2}, \\ \gamma &= \frac{1+v}{1-v} \alpha_T. \end{aligned} \quad (13)$$

Решение задачи теплопроводности. Предполагается, что физические характеристики тела в рассматриваемом интервале не зависят от температуры. Также считается, что тепловые процессы и деформирование тела происходит со скоростью, при которой деформации не вызывают изменения температуры тела. Т.е. рассматривается задача несвязанной термоупругости.

В вариационной постановке задача нестационарной теплопроводности сводится к поиску функции температуры $T(x, y, z, t)$ в некоторой области Ω для произвольного момента времени $t > t_0$, которая доставляет минимум функционалу [4]

$$\begin{aligned} c\rho T \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (grad T)^2 d\Omega - \\ J = \int_{\Omega} T \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_3} \left(\frac{1}{2} T^2 - TT_0 \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (14)$$

при заданном начальном условии

$$T(x, y, z, t_0) = F(x, y, z)$$

и соответствующих граничных условиях.

Здесь λ – коэффициент теплопроводности, c – удельная теплоемкость, ρ – плотность вещества тела, α – коэффициент теплоотдачи, \vec{n} – направление внутренней нормали к границе, T_0 – температура окружающей среды. При этом предполагается, что граничные условия для температуры выполнены.

Рассмотрим тело, состоящее из двух цилиндров Ω_1 и Ω_2 изготовленных из разных изотропных материалов.

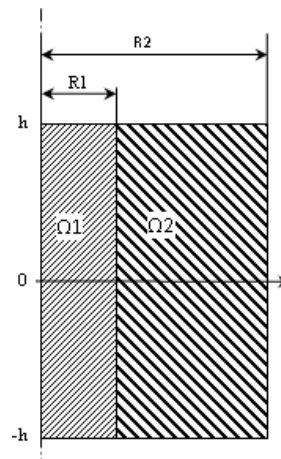


Рис.1. Составной цилиндр

Внутренний цилиндр Ω_1 ограничен поверхностями

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &: \{z = h, 0 \leq r \leq R_1\}, \\ \Gamma_2 &: \{z = -h, 0 \leq r \leq R_1\} \text{ и} \\ \Gamma_3 &: \{-h \leq z \leq h, r = R_1\},\end{aligned}$$

а внешний Ω_2 , поверхностями Γ_3 и

$$\begin{aligned}\Gamma_4 &: \{z = h, R_1 \leq r \leq R_2\}, \\ \Gamma_5 &: \{z = -h, R_2 \leq r \leq R_2\}, \\ \Gamma_6 &: \{-h \leq z \leq h, r = R_2\}\end{aligned}$$

Выполним в (14) стандартный переход к безразмерным величинам [5]

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{L}, \quad \bar{z} = \frac{z}{L},$$

где L – характерный размер тела, $\Theta = (T - T_0)/T_0$,

$$\bar{q} = \frac{qL}{\lambda T_0}, \quad \tau = t \frac{1}{L^2} \frac{\lambda}{c\rho}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha L}{\lambda}, \quad \beta_1 = \frac{c_2 \rho_2}{c_1 \rho_1}, \quad \beta_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

С учетом, того обстоятельства, что теплофизические свойства составных частей различны функционал (14) запишется в виде

$$\begin{aligned}J &= \int_{\Omega_1} \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} (\text{grad} \Theta)^2 d\Omega - \\ &- \int_{\Gamma_{21}} \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial n} d\Gamma + \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma_{31}} \Theta^2 d\Gamma + \\ &+ \beta_1 \int_{\Omega_2} \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} d\Omega + \frac{\beta_2}{2} \int_{\Omega_2} (\text{grad} \Theta)^2 d\Omega - \\ &- \beta_2 \int_{\Gamma_{22}} \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial n} d\Gamma + \frac{\alpha}{2} \beta_2 \int_{\Gamma_{32}} \Theta^2 d\Gamma\end{aligned}\quad (15)$$

Решение задачи теплопроводности представляется в виде отрезка ряда по известным базисным функциям, коэффициенты при которых являются неизвестными функциями времени [4]

$$\Theta = \sum_{k=0}^K a_k(\tau) \Theta_k,$$

где Θ_k – выбранные соответствующим образом базисные функции. В каждый момент времени коэффициенты $a_k(\tau)$ считаются варьируемыми параметрами. Из необходимого условия экстремума получается система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций времени. После приближенной замены производной по времени при помощи левой разности

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{1}{\Delta \tau} \left[\sum_{n=0}^K a_k(\tau_i) \Theta_k - \sum_{n=0}^K a_k(\tau_{i-1}) \Theta_k \right]$$

задача сводится к определению функций $a_k(\tau_i)$ для фиксированного значения времени τ_i из системы линейных алгебраических уравнений. Здесь $\Delta \tau$ – шаг по времени, $\tau_i = \tau_{i-1} + \Delta \tau$, i – номер временного слоя. Значение коэффициентов $a_k(\tau_{i-1})$, предполагаются известными из решения задачи для момента времени τ_{i-1} .

Считается, что имеет место идеальный тепловой контакт на границе Γ_3 . Если на части границы задана температура, то в этом случае граничные условия удовлетворяются в смысле наименьших квадратов.

Форма решения осесимметричной задачи теории упругости. Чтобы удовлетворить граничные условия для перемещений и напряжений решение задачи представляется в виде

$$u_r = u_r^T + u_r^e, \quad u_z = u_z^T + u_z^e,$$

где u_r^T, u_z^T – температурные перемещения определен-

ные согласно (2), а u_r^e, u_z^e – решение для перемещений соответствующей задачи теории упругости. В качестве последнего применяется решение Тимпе [6], в котором компоненты вектора перемещений определены как

$$\begin{aligned}u_r^e &= 4(1-\nu) \frac{\psi}{r} - \frac{\partial(\psi + \eta)}{\partial r} \\ u_z^e &= -\frac{\partial(\psi + \eta)}{\partial z};\end{aligned}$$

где функции η – гармоническая функция, а ψ должна удовлетворять условию

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0,$$

которое равносильно выполнению соотношения

$$\nabla^2 \psi = \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Этому условию удовлетворяет функция ψ_n , определенная соотношением (10). Для нее согласно (12) $\nabla^2 \psi_n = 2\eta_{n-2}$, а в [2] получено, что $\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_n}{\partial r} = \eta_{n-2}$.

Решение в каждой из областей ищется в разном виде. В области Ω_1 решение ищется в виде

$$\eta = \sum_{n=1}^N a_n \eta_n, \quad \psi = \sum_{n=2}^N b_n \psi_n,$$

где функции η_n и ψ_n определяются соотношениями (9), (10). Решение для области Ω_2 представляется в форме

$$\begin{aligned}\tilde{\eta} &= \tilde{a}_0 \ln r + \sum_{n=1}^N \tilde{a}_n \tilde{\eta}_n, \quad \tilde{\eta}_n = \frac{1}{n!} \rho^n Q_n(t) \\ \tilde{\psi} &= \sum_{n=2}^N \tilde{b}_n \tilde{\psi}_n, \quad \tilde{\psi}_n = \frac{1}{n!} \rho^n S_{n-2}(t)\end{aligned}\quad (16)$$

Здесь $Q_n(t) = \frac{1}{2} P_n(t) \ln \frac{1+t}{1-t} + W_{n-1}$ – функции

Лежандра второго рода [3].

Функции

$$S_n(t) = \frac{1}{2} (1-t^2) V_n(t) \ln \frac{1+t}{1-t} + s_n$$

получаются при помощи тех же рекуррентных формул, что и полиномы $V_n(t)$ [3]

$$nV_n = (2n+1)tV_{n-1} - (n+1)V_{n-2}$$

при граничных условиях

$$S_0(t) = \frac{(1-t^2)}{2} V_0(t) \ln \frac{1+t}{1-t} + t,$$

$$S_1(t) = \frac{(1-t^2)}{2} V_1(t) \ln \frac{1+t}{1-t} + 3t^2 - 2$$

Соответствующие граничные условия для перемещений, напряжений и условия сопряжения решений удовлетворяются в смысле наименьших квадратов. Условий сопряжения формулируются как требования непрерывности перемещений u_r и напряжений σ_{rr}, τ_{rz} на границе Γ_3

Описанный подход был применен при решении следующей задачи.

На внешней боковой поверхности Γ_6 задан тепловой поток

$$-\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = q,$$

а на торцах цилиндра, т. е. на $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4, \Gamma_5$, реализуются условия тепловой изоляции $\frac{\partial \Theta}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0$. Рассмотрены два случая механических граничных условий. В первом торцевые плоскости и боковая поверхность свободны от напряжений и граничные условия имеют вид $\sigma_{zz} = \tau_{zr} = 0$ на $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4, \Gamma_5$ и $\sigma_{rr} = \tau_{rz} = 0$ на Γ_6

Для случая заделки торцевых поверхностей $u_r = u_z = 0$ на $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4, \Gamma_5$ и $\sigma_{rr} = 0$ на Γ_6

решение задачи теплопроводности представляется в виде

$$\Theta = a_0(\tau) + \sum_{k=2}^K a_k(\tau) \psi_k \quad (17)$$

Тогда компоненты вектора температурных перемещений согласно (2) определяются как

$$u_r^T = \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} = r \psi_{n-2}, \quad u_z^T = \frac{\partial \Phi_n}{\partial z} = \Phi_{n-1} \quad (18)$$

Компоненты температурные напряжения определяются из соотношений [7]

$$\sigma_{ij} = 2G \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \delta_{ij} - \frac{\nu}{1-2\nu} \alpha_T T \delta_{ij} \right)$$

и в безразмерной форме $\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1+\nu_1}{E_1} \sigma_{ij}$ имеют вид

$$\sigma_{rr} = \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial r^2} - \nabla^2 \Phi_n = -3\psi_{n-2} - r^2 \eta_{n-4}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial r^2} - \nabla^2 \Phi_n = -3\psi_{n-2} - r^2 \eta_{n-4},$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial z^2} - \nabla^2 \Phi_n = \Phi_{n-2} - 4\psi_{n-2}$$

$$\sigma_{\theta\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} - \nabla^2 \Phi_n = -3\psi_{n-2},$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} = r \psi_{n-3}$$

Число слагаемых в (17) принято $K = 15$, что соответствует СЛАУ с 59 неизвестными. Решение проводилось при следующих значениях безразмерных параметров: шаг по времени $\Delta \tau = 0,025$; длина цилиндра

$L = 1$, радиусы цилиндров $R_1 = 0,2$, $R_2 = 0,25$; величины теплового потока на боковой поверхности $q = 1$.

Теплофизические и механические свойства материалов приведены в табл. 1

Таблица 1

Материал	Ал	С
	юминий	таль
C , кДж/(кг K)	1,08	0,691
λ , Вт/(м · K)	204	5
ρ , кг/м ³	270	7500
α , K ⁻¹ × 10 ⁻⁶	24	11,4
E , Мпа × 10 ⁵	0,69	2,0
ν	0,32	0,25

О степени влияния граничных условий и сочетания материалов цилиндра можно судить по распределению радиальных (Рис.2) и окружных (Рис. 3) напряжений на границе Γ_3 для момента времени $\tau = 2.45$.

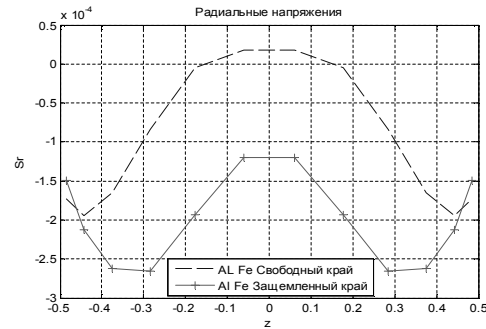


Рис. 2. Радиальные напряжения для сочетания материалов алюминий-сталь при различных граничных условиях

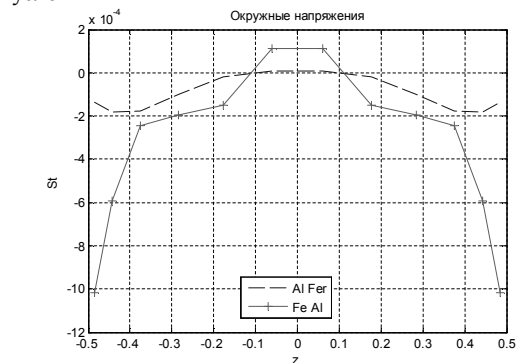


Рис. 3. Окружные напряжения для различных сочетаний материалов (алюминий-сталь; сталь-алюминий) в случае свободных торцов

Выводы

Предложена форма решения нестационарной осесимметричной задачи теплопроводности, позволяю-

щая непосредственно получить распределение температурных перемещений в упругом теле. Разработанный подход применен для нахождения полей напряжений и перемещений в цилиндре, изготовленном из материалов с разными теплофизическими и механическими свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коваленко А. Д. Термоупругость / А. Д. Коваленко. — К.: Издательское объединение «Вища школа», 1975. — 216 с.
2. Заяц В.И., Новикова О.С. Решение трехмерной нестационарной задачи теплопроводности в вариационной постановке. — Восточно-Европейский журнал передовых технологий //научный журнал. - Харьков: Технологический центр, 2011. - №1/8 (49). — С. 31–35. — ISSN: 1729-3774
3. Сеге Г. Ортогональные многочлены./ Г Сеге. — Гос. издательство физ.-мат. лит., 1962. — 500 с.
4. Колмогоров В.Л. Метод расчета напряженно-деформированного состояния в общей краевой задаче развитого течения. / В.Л. Колмогоров //Вестник ПГТУ. Механика. — 1995.—№2. — С.87- 98.
5. Беляев Н.М. Методы теории теплопроводности. Ч. 1. / Н.М. Беляев, А.А. Рядно —М.: Высш. школа, 1982. — 327с. (1)
6. Крутков Ю.А. Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости. Издательство академии наук СССР., Москва, Ленинград. 1949, 199с.
7. Мелан Э, Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М., Физматгиз, 1958, 166с.

пост. 25.12.2011

Математическая модель следящей системы контроля уровня щепы в варочном котле

КАМЕЛЬ Г.И.

Днепродзержинский государственный технический университет

Разработана математическая модель и структурная схема следящей системы контроля за уровнем щепы в варочном котле.

Rozrobлена математична модель і структурна схема слідячої системи контролю за рівнем тріски у варильному котлі.

The mathematical model and the structural scheme of the watching system of the chip's level control in the boiler were elaborated.

Введение. Система регулирования древесной щепы в верхней части варочного котла должна обеспечить: 1) постоянный уровень щепы; 2) стабильную скорость ее продвижения вниз; 3) необходимую длительность пребывания щепы в варочной зоне.

Все требования должна обеспечить гидротранспортная система непрерывной подачи щепы, которая включает в себя, ленточный конвейер, дозатор щепы, гидротранспорт низкого 0,15 МПа и высокого давления 1,2 МПа.

Анализ публикаций. В настоящее время при производстве товарной целлюлозы из древесного сырья требуется получать не только большое количество, но и качество готовой продукции. Для этого необходимо надежное регулирование поступления древесного сырья в варочный котел непрерывно в течение года. Уровень древесного сырья в верхней части варочного котла должен автоматически регулироваться с помощью дозатора щепы гидротранспортной системы. В ряде работ [1,2] имеются сведения о создании автоматизированных систем по управлению технологическими процессами в

установках непрерывной подачи щепы в варочный котел.

Цель исследований. Целью исследования является создание математической следящей системы по управлению уровнем щепы в верхней части варочного котла за счет регулирования частоты вращения ротора дозатора щепы.

Изложение основных результатов. Система автоматического регулирования транспортной системы непрерывной подачи древесной щепы является сложным устройством, динамика которых описывается совокупностью дифференциальных уравнений. Рассмотрим следящую систему, принципиальная схема которой приведена на рис.1. Задающим устройством является командная ось, вращаемая извне по произвольному закону $\varphi_1 = \varphi_1(t)$. Этот угол должен повторяться на управляемом объекте (УО), ось которого является исполнительной осью ИО. Мощность, которую может потреблять для своего вращения управляемый объект, значительно меньше и обеспечивается установкой двигателя Д. В этом, а также в дистанционности

