

постійно пересувається (в нашому випадку обертається навколо осі), разом з перерізом набігання канату повертається і зона можливого ковзання одного шару по іншому.

Можливість втрати форми треба враховувати при проектуванні підйомної машини з бобінним органом намотки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Панченко Е.В. Разработка математической модели для определения радиальных нагрузок при многослойной намотке резино тросового каната шахтной подъемной установки // Математичне моделювання, 2006. - №1,2 (15). – С. 40-44.
2. Лубинець О.М., Бельмас І.В. Дослідження умов ковзання окремих шарів в багатошаровому тілі намотки // Математичне моделювання, 2011. - №2 (25).–С.32-34.

пост. 28.04.12

Математическое моделирование процесса плавления кусковых материалов на границе шлак-металл

АНДРИЕВСКИЙ Г.А., ПАВЛЮЧЕНКОВ И.А., ПИПТЮК В.П.* , БАБЕНКО М.В.,
ВЛАСЕНКО И.В.

Днепродзержинский государственный технический университет,
Институт чёрной металлургии НАНУ*

Разработан алгоритм расчета двумерной задачи плавления легкоплавких и тугоплавких материалов сферической формы на основе разностного метода Дюзимбера.

Розроблено алгоритм розрахунку двомірної задачі плавлення легкоплавких та тугоплавких матеріалів сферичної форми на основі різницевого методу Дюзімбера.

The algorithm of calculation of twomeasure task of melting of fusible and refractory materials of spherical form is developed on the basis of difference method of Dyuzimber.

Ввод кусковых материалов (добавок) различного химического и гранулометрического состава в жидкую сталь в сталеразливочный ковш на выпуске плавки или при обработке на установке ковш-печь является эффективной ресурсосберегающей технологией внепечного раскисления, рафинирования, микролегирования и доводки стали по химическому составу. Применяемые в настоящее время режимы ввода кусковых добавок в расплав не всегда сопровождаются их прогнозируемым плавлением в глубине расплава и равномерным распределением в объеме ванны. В ряде случаев ввод кусковых добавок сопровождается выносом последних в шлаковый покров на поверхности металла, что может приводить к неэффективному использованию дорогостоящих материалов и неоднородности химического состава металла. Процессы кинетики плавления добавок в указанных условиях на сегодняшний день не достаточно изучены. Поэтому задачи исследования тепло-, массообменных процессов при плавлении и усвоении добавок в условиях их протекания на границе шлак-металл в сталеразливочном ковше при внепечной обработке металла являются актуальными для современной металлургической практики.

В работе рассматривается случай, когда добавка частично погружена в расплав стали, а частично находится в шлаке (рис.1). Ранее авторами работы разработан алгоритм расчета двумерной задачи плавления тугоплавких материалов цилиндрической формы на

основе разностного метода Дюзимбера [1]. В предлагаемой работе разработан алгоритм расчета двумерной задачи плавления легкоплавких и тугоплавких материалов сферической формы также на основе аналогичного метода.

Плавление легкоплавкой сферы

Рассмотрим процесс плавления кусковой добавки сферической формы из легкоплавкого материала, расположенного на границе шлак-металл. Принимаем, что температуры жидкого металла $t_{жс}$ и жидкого шлака $t_{ш}$ выше температуры плавления сферы $t_{пл}$. На верхней поверхности сферы, находящейся в расплаве шлака ($0 < \vartheta < \vartheta_0$), происходит конвективный теплообмен с жидким шлаком с заданным коэффициентом теплоотдачи $\alpha_{ш}$. На остальной поверхности сферы ($\vartheta_0 < \vartheta < \pi$) происходит конвективный теплообмен с жидким металлом с заданным коэффициентом теплоотдачи $\alpha_{жс}$. Между намерзшими оболочками металла, шлака и поверхностью сферы существует идеальный тепловой контакт, т.е. заданы граничные условия IV рода.

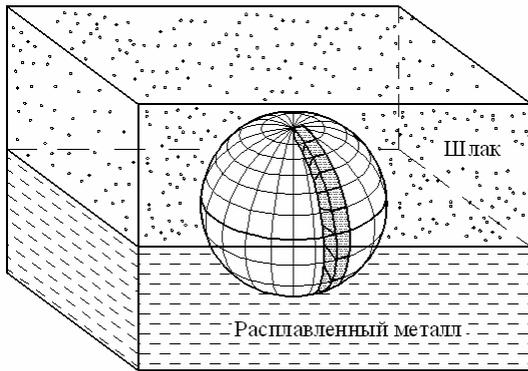


Рис. 1. Схема к расчету плавления куска сферической формы на границе шлак-металл.

Математическая модель

Распределение температур в сфере описывается двумерным уравнением теплопроводности:

$$C_{эф}(T)\rho(T)\frac{\partial T(r, \vartheta, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\lambda(T)r \frac{\partial T}{\partial r}] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} [\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial \vartheta}] \quad (1)$$

$$0 < r < R_0, \quad 0 < \vartheta < \pi$$

где $C_{эф}(T)$ - эффективная теплоемкость, $\rho(T)$ - плотность и $\lambda(T)$ - теплопроводность определяются в виде:

$$c_{эф}(t) = \begin{cases} c_{жс}(t), & t \geq t_L^T \\ c_{мс}(t) + Q_{мс} \frac{d\psi(t)}{dt}, & t_S^T < t < t_L^T \\ c_{мс}(t), & t \leq t_S^T \end{cases} \quad (2)$$

$$\bar{\rho}(t) = \begin{cases} \rho_{жс}(t), & t \geq t_L^T \\ (\rho_{мс}(t) + \rho_{жс}(t))/2, & t_S^T < t < t_L^T \\ \rho_{мс}(t), & t \leq t_S^T \end{cases} \quad (3)$$

$$\bar{\lambda}(t) = \begin{cases} \lambda_{жс}(t), & t \geq t_L^T \\ (\lambda_{жс}(t) + \lambda_{мс}(t))/2, & t_S^T < t < t_L^T \\ \lambda_{мс}(t), & t \leq t_S^T \end{cases} \quad (4)$$

Распределение температур в затвердевшей оболочке металла имеет вид:

$$C_M \rho_M \frac{\partial T_M(r, \vartheta, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\lambda_M}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \frac{\partial T_M}{\partial r}] + \frac{\lambda_M}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} [\frac{1}{r} \sin \vartheta \frac{\partial T_M}{\partial \vartheta}] \quad (5)$$

$$r > R_0, \quad \vartheta_0 < \vartheta < \pi$$

Пусть точка P_M принадлежит границе плавления (намерзания) затвердевшей оболочки металла. При этом условие движения границы плавления (намерзания) запишем в виде:

$$\alpha_M(t_M(r, \vartheta, \tau) - t_{n,l}^M) - \lambda \frac{\partial t_M(P_M)}{\partial n} = -\rho_M Q_M W(P_M); \quad (6)$$

$$t_M(P_M) = t_{n,l}^M$$

Распределение температур в затвердевшей оболочке шлака имеет вид:

$$C_{ш} \rho_{ш} \frac{\partial T_{ш}(r, \vartheta, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\lambda_{ш}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \frac{\partial T_{ш}}{\partial r}] + \frac{\lambda_{ш}}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} [\frac{1}{r} \sin \vartheta \frac{\partial T_{ш}}{\partial \vartheta}] \quad (7)$$

$$r > R_0, \quad 0 < \vartheta < \vartheta_0$$

Пусть точка $P_{ш}$ принадлежит границе плавления (намерзания) затвердевшей оболочки шлака. При этом условие движения границы плавления (намерзания) запишем в виде:

$$\alpha_{ш}(t_{ш}(r, \vartheta, \tau) - t_{n,l}^{ш}) - \lambda \frac{\partial t_{ш}(P_{ш})}{\partial n} = -\rho_{ш} Q_{ш} W(P_{ш}); \quad (8)$$

$$t_{ш}(P_{ш}) = t_{n,l}^{ш}$$

В качестве начального условия выбирается распределение температур в сфере в момент всплытия ее на поверхность металл-шлак.

Уравнения баланса тепла

При выводе уравнений баланса тепла используется метод контрольного объема. Для решения задачи формируем координатную сетку. Для этого разобьем половину сферы на контрольные объемы с координатами i, j . Значения температур будем определять в центре контрольных объемов. Задаем M_0 - заданное количество узлов по радиусу сферы, N_0 - заданное количество секторов по углу ϑ сферы. В предлагаемом алгоритме расчета используется явная разностная схема. Вводятся матрицы температур $t_{i,j}^n$ для (n) и $t_{i,j}^{n+1}$ для $(n+1)$ временных слоев, а также матрицы теплофизических параметров плотности $\rho_{i,j}^n$, теплопроводности $\lambda_{i,j}^n$ и теплоемкости $c_{i,j}^n$, куда заносятся на каждом временном слое соответствующие значения параметров материала сферы, затвердевшего металла и затвердевшего шлака. Шаг по радиусу (ординате i) определяется в виде $\Delta r = R_0 / (M_0 - 1/2)$, шаг по углу ϑ (по ординате j) определяется в виде $\Delta \vartheta = \pi / N_0$.

Вывод уравнений баланса тепла для внутренних контрольных объемов.

Вершины сферического сектора указанного на рис.2 имеют координаты:
 $A(R, \varphi, \theta), B(R, \varphi, \theta+d\theta), C(R+dR, \varphi, \theta+d\theta), D(R+dR, \varphi, \theta), A_1(R, \varphi+d\varphi, \theta), B_1(R, \varphi+d\varphi, \theta+d\theta), C_1(R+dR, \varphi+d\varphi, \theta+d\theta), D_1(R+dR, \varphi+d\varphi, \theta)$

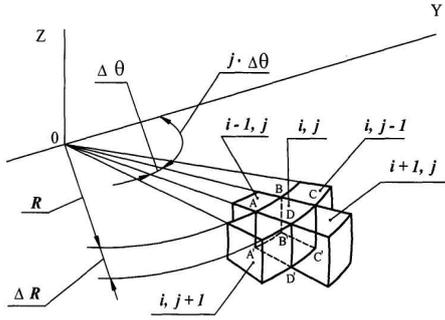


Рис. 2. Схема внутренних контрольных объемов сферы $1 < i < M_0$, $1 < j < N_0$

Для вывода уравнений баланса тепла необходимо вычислить значения площадей граней участвующих в теплообмене и объем сферического сектора (контрольного объема) с координатами i, j .

Площадь грани ABA_1B_1

$$\begin{aligned} S_{ABA_1B_1} &= A \cdot A_1 \cdot AB = \\ &= \left[\left(R - \frac{\Delta r}{2} \right) \cdot \sin \vartheta \cdot \Delta \varphi \right] \cdot \left(R_0 - \frac{\Delta r}{2} \right) \cdot \Delta \vartheta = \\ &= \left[\left(i \cdot \Delta r - \frac{\Delta r}{2} \right) \cdot \sin \vartheta \cdot \Delta \varphi \right] \cdot \left(i \cdot \Delta r - \frac{\Delta r}{2} \right) \cdot \Delta \vartheta = \\ &= \left[\Delta r \left(i - \frac{1}{2} \right) \right]^2 \cdot \sin \vartheta \cdot \Delta \vartheta \cdot \Delta \varphi \end{aligned}$$

Площадь грани DC_1CD_1

$$\begin{aligned} S_{DCC_1D_1} &= DC \cdot DD_1 = \\ &= \left[\left(R + \frac{\Delta r}{2} \right) \cdot \sin \vartheta \cdot \Delta \varphi \right] \cdot \left(R + \frac{\Delta r}{2} \right) \cdot \Delta \vartheta = \\ &= \left[\left(i \cdot \Delta r + \frac{\Delta r}{2} \right) \cdot \sin \vartheta \cdot \Delta \varphi \right] \cdot \left(i \cdot \Delta r + \frac{\Delta r}{2} \right) \cdot \Delta \vartheta = \\ &= \left[\Delta r \left(i + \frac{1}{2} \right) \right]^2 \cdot \sin \vartheta \cdot \Delta \vartheta \cdot \Delta \varphi \end{aligned}$$

Площадь грани AA_1DD_1

$$\begin{aligned} S_{AA_1DD_1} &= AA_1 \cdot D_1D = \left[\left(R - \frac{\Delta r}{2} \right) \cdot \sin \vartheta \cdot \Delta \varphi \right] \cdot \Delta r = \\ &= \left[\left(i \cdot \Delta r - \frac{\Delta r}{2} \right) \cdot \sin \vartheta \cdot \Delta \varphi \right] \cdot \Delta r = \\ &= \left(i - \frac{1}{2} \right) \cdot \Delta r^2 \cdot \sin \vartheta \cdot \Delta \varphi \end{aligned}$$

Площадь грани BB_1CC_1

$$\begin{aligned} S_{BB_1CC_1} &= BB_1 \cdot BC = \left(R - \frac{\Delta r}{2} \right) \cdot \sin(\vartheta \cdot \Delta \vartheta) \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta r = \\ &= \left[\left(i \cdot \Delta r - \frac{\Delta r}{2} \right) \cdot \sin(\vartheta \cdot \Delta \vartheta) \cdot \Delta \varphi \right] \cdot \Delta r = \\ &= \left(i - \frac{1}{2} \right) \cdot \Delta r^2 \cdot \sin(\vartheta \cdot \Delta \vartheta) \cdot \Delta \varphi \end{aligned}$$

Объем сферического сектора

$$\Delta V = S_{ABA_1B_1} \cdot \Delta r = \left[\Delta r \left(i - \frac{1}{2} \right) \right]^2 \cdot \Delta r \cdot \sin \vartheta \cdot \Delta \vartheta \cdot \Delta \varphi$$

Уравнение баланса тепла для внутренних контрольных объемов

$$\begin{aligned} \Delta V \cdot \rho_{i,j} \cdot c_{i,j} \frac{t_{i,j}^{n+1} - t_{i,j}^n}{\Delta \tau} &= S_{ABA_1B_1} \cdot \frac{2\lambda_{i,j} \cdot \lambda_{i-1,j} \cdot t_{i-1,j}^n - t_{i,j}^n}{\lambda_{i,j} + \lambda_{i-1,j}} \cdot \frac{1}{\Delta r} - \\ &- S_{DCC_1D_1} \cdot \frac{2\lambda_{i,j} \cdot \lambda_{i+1,j} \cdot t_{i+1,j}^n - t_{i,j}^n}{\lambda_{i,j} + \lambda_{i+1,j}} \cdot \frac{1}{\Delta r} + S_{AA_1DD_1} \cdot \frac{2\lambda_{i,j-1} \cdot \lambda_{i,j} \cdot t_{i,j-1}^n - t_{i,j}^n}{\lambda_{i,j} + \lambda_{i,j-1}} \cdot \frac{1}{\Delta \vartheta} - \\ &- S_{BB_1CC_1} \cdot \frac{2\lambda_{i,j} \cdot \lambda_{i,j+1} \cdot t_{i,j+1}^n - t_{i,j}^n}{\lambda_{i,j} + \lambda_{i,j+1}} \cdot \frac{1}{i \cdot \Delta r \cdot \Delta \vartheta} \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогичные уравнения выводятся для остальных контрольных объемов расчетной области.

Намерзание и последующее плавление металлической и шлаковой оболочек.

Согласно метода Дюзимбера при намерзании и последующем плавлении оболочки металла, шлака температура поверхностного слоя принимает значение соответствующей температуры намерзания (плавления).

Расчетные формулы для избыточных температур $t_u(j)$ для $1 \leq j \leq N_0$ при намерзании и плавлении металлического расплава

$$\begin{aligned} t_u[j] &= t_{nl}^M + \frac{2 \cdot \Delta \tau}{\rho_{M[j],j} \cdot C_{M[j],j}} \cdot \\ & \cdot \left[\frac{\lambda_{M[j]-1,j} \cdot \lambda_{M[j],j} \cdot t_{M[j],j}^n - t_{nl}^M}{\lambda_{M[j]-1,j} + \lambda_{M[j],j}} \cdot \frac{1}{\Delta r^2} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{M[j]} \right)^2 \cdot \right. \\ & \alpha_M \frac{t_{nl}^M - t_{жс}}{\Delta r} + \frac{1}{M[j]} \cdot \frac{\lambda_{M[j],j} \cdot \lambda_{M[j],j-1}}{\lambda_{M[j],j} + \lambda_{M[j],j-1}} \cdot \\ & \left. \frac{t_{M[j],j-1}^n - t_{nl}^M}{[M[j] \cdot \Delta r \cdot \Delta \vartheta]^2} - \frac{1}{M[j]} \cdot \frac{\lambda_{M[j],j} \cdot \lambda_{M[j],j+1}}{\lambda_{M[j],j} + \lambda_{M[j],j+1}} \cdot \right. \\ & \left. \frac{t_{nl}^M - t_{M[j],j+1}^n}{[M[j] \cdot \Delta r \cdot \Delta \vartheta]^2} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Если значение избыточной температуры $t_u(j)$ меньше температуры плавления металла t_{nl}^M , то в соседнем поверхностном контрольном объеме с координатами $M[j], j+1$ происходит процесс намерзания металла. При этом, на каждом расчетном временном слое разность между значением избыточной температурой и температурой плавления металла t_{nl}^M суммируется в счетчиках. Для этих целей введен массив $cd[j]$, в начале расчета его элементы равны 0. Если через k_j шагов по времени значение $cd[j]$ станет больше отношения теплоты фазового перехода в металле к его теплоемкости, то температура металлического расплава в соседнем поверхностном контрольном объеме $t_{M[j],j+1}^n$ заменяется на температуру плавления металла t_{nl}^M .

Если значение избыточной температуры $t_u(j)$ больше температуры плавления металла t_{nl}^M , то данный поверхностный контрольный объем с координатами $M[j], j$ расплавляется. При этом, на каждом расчетном временном слое разность между значением избыточной температуры и температуры плавления металла t_{nl}^M суммируется в счетчиках. По истечении k_2 шагов по времени времени значение $cd[j]$ станет больше отношения теплоты фазового перехода в металле к его теплоемкости, то температура $t_{M[j],j+1}^n$ в данном контрольном объеме заменяется на температуру металлического расплава $t_{жс}$. Аналогично производится расчет процесса намерзания и последующего плавления шлаковой оболочки.

Расчет по данному алгоритму заканчивается при условии, что все намерзшие контрольные объемы, омываемые металлом, расплавились в любом из секторов.

Плавление тугоплавкой сферы

Для решения данной задачи формируется такая же координатная сетка и используются уравнения баланса тепла такие же как и в задаче плавления легкоплавкой сферы. В данном случае после плавления металлической или шлаковой оболочек вводятся уравнения баланса тепла для учета подогрева поверхности тела до температуры плавления и плавления самого тела.

Уравнения баланса тепла для расчета подогрева до температуры плавления сферы внутренних (по углу ϑ) поверхностных контрольных объемов ($i=M_0, 1 < j < N_0$) находящихся в металлическом расплаве (рис.3)

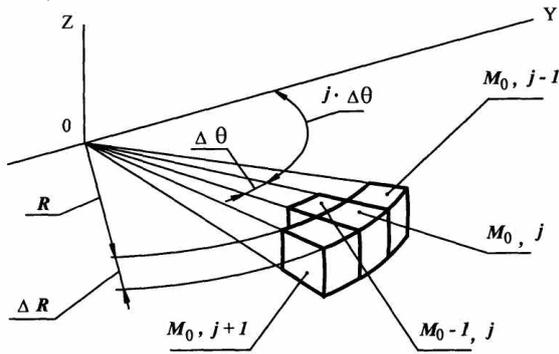


Рис. 3. Схема внутренних поверхностных контрольных объемов сферы ($i=M_0, 1 < j < N_0$), находящихся в металлическом расплаве

$$\begin{aligned} \Delta v \cdot \rho \cdot c \frac{t_{M[j],j}^{n+1} - t_{M[j],j}^n}{\Delta \tau} &= S_{ABB_1A_1} \cdot \\ \lambda \frac{t_{M[j]-1,j}^n - t_{M[j],j}^n}{\Delta r} - S_{DCC_1D_1} \cdot \alpha_m (t_{M[j],j}^n - t_{жс}^M) + & \\ S_{ADA_1D_1} \cdot \lambda \frac{t_{M[j],j-1}^n - t_{M[j],j}^n}{M[j] \cdot \Delta r \cdot \Delta \vartheta} - & \\ S_{BCB_1C_1} \cdot \lambda \frac{t_{M[j],j}^n - t_{M[j],j+1}^n}{M[j] \cdot \Delta r \cdot \Delta \vartheta} & \end{aligned} \quad (11)$$

Расчетные формулы для избыточных температур $t_u(j)$ для $1 \leq j \leq N_0$ при плавлении сферы при $j=1$

$$\begin{aligned} t_u[1] &= t_{nl} + \frac{2 \cdot \Delta \tau}{\rho_{M[1],1} \cdot C_{M[1],1}} \cdot \\ & \left[\frac{\lambda_{M[1]-1,1} \cdot \lambda_{M[1],1} \cdot t_{M[1],1}^n - t_{nl}}{\lambda_{M[1]-1,1} + \lambda_{M[1],1}} \cdot \frac{1}{\Delta r^2} - \left(1 + \frac{1}{M[1]}\right)^2 \right] \cdot \\ & \alpha \frac{t_{nl} - t_p}{\Delta r} + \frac{\sin(2 \cdot \Delta \vartheta)}{\sin \Delta \vartheta} \cdot \frac{\lambda_{M[1],1} \cdot \lambda_{M[1],2}}{\lambda_{M[1],1} + \lambda_{M[1],2}} \cdot \\ & \frac{t_{M[1],2}^n - t_{nl}}{[M[1] \cdot \Delta r \cdot \Delta \vartheta]^2} \end{aligned} \quad (12)$$

при $1 < j < N_0$

$$\begin{aligned} t_u[j] &= t_{nl} + \frac{2 \cdot \Delta \tau}{\rho_{M[j],j} \cdot C_{M[j],j}} \cdot \\ & \left[\frac{\lambda_{M[j]-1,j} \cdot \lambda_{M[j],j} \cdot t_{M[j],j}^n - t_{nl}}{\lambda_{M[j]-1,j} + \lambda_{M[j],j}} \cdot \frac{1}{\Delta r^2} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{M[j]}\right)^2 \right] \cdot \\ & \alpha_m \frac{t_{nl} - t_p}{\Delta r} + \frac{1}{M[j]} \cdot \frac{\lambda_{M[j],j} \cdot \lambda_{M[j],j-1}}{\lambda_{M[j],j} + \lambda_{M[j],j-1}} \cdot \\ & \frac{t_{M[j],j-1}^n - t_{nl}}{[M[j] \cdot \Delta r \cdot \Delta \vartheta]^2} - \frac{1}{M[j]} \cdot \frac{\lambda_{M[j],j} \cdot \lambda_{M[j],j+1}}{\lambda_{M[j],j} + \lambda_{M[j],j+1}} \cdot \\ & \frac{t_{nl} - t_{M[j],j+1}^n}{[M[j] \cdot \Delta r \cdot \Delta \vartheta]^2} \end{aligned} \quad (13)$$

при $j=N_0$

$$\begin{aligned} t_u[N_0] &= t_{nl} + \frac{2 \cdot \Delta \tau}{\rho_{M[N_0],N_0} \cdot C_{M[N_0],N_0}} \cdot \\ & \left[\frac{\lambda_{M[N_0]-1,N_0} \cdot \lambda_{M[N_0],N_0} \cdot t_{M[N_0],N_0}^n - t_{nl}}{\lambda_{M[N_0]-1,N_0} + \lambda_{M[N_0],N_0}} \cdot \frac{1}{\Delta r^2} - \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{M[N_0]}\right)^2 \right] \cdot \alpha \frac{t_{nl} - t_p}{\Delta r} + \\ & \frac{1}{M[N_0]} \cdot \frac{\lambda_{M[N_0],N_0-1} \cdot \lambda_{M[N_0],N_0} \cdot t_{M[N_0],N_0-1}^n - t_{nl}}{\lambda_{M[N_0],N_0-1} + \lambda_{M[N_0],N_0}} \cdot \frac{1}{[M[N_0] \cdot \Delta r \cdot \Delta \vartheta]^2} \end{aligned} \quad (14)$$

Расчет по данному алгоритму заканчивается при условии, что все контрольные объемы сферы, омываемые металлом, расплавились.

Проведены расчеты кинетики плавления легкоплавких гранул из FeSi-65, диаметром 10, 25 и 50мм. и скоростей обтекания 0.1, 0.5 и 1м/с. Результаты расчета представлены в таблице 1.

Таблица 1. Продолжительность плавления гранул ферросилиция

D0	V0	Время плавления, с
10	0.1	10.2
25	0.1	37.8
50	0.1	130,3
10	0.5	8.5
25	0.5	38
50	0.5	130,3
10	1	7.6
25	1	38.7
50	1	128,2

В таблице 2 представлены результаты расчетов продолжительности плавления (с) кусковых тугоплавких добавок на границе «шлак-металл». Скорость обтекания 0.1м/с.

Преобладающими факторами, определяющими продолжительность плавления добавки, являются вид

(свойства) и размер куска. Наличие результатов исследования плавления добавок на границе «шлак-металл» позволит теоретически прогнозировать эффективность их использования и сформировать мероприятия по ресурсосбережению при внепечной обработке стали.

Таблица 2. Продолжительность плавления кусковых добавок

Диаметр сферического куска, мм	Вид добавки		
	Ферро титан ФТи30	Ферро ванадий ФВ50	Ферро хром низкоуглеродистый FeCr70
5	3,0	4,0	25,0
25	32,0	43,0	276,0
50	84,0	95,0	685,0

Литература

1. Бабенко М.В., Павлюченков И.А. Алгоритм расчета (на основе метода Дюзимбера) двухмерной задачи плавления цилиндра в расплаве. Металургійна теплотехніка: Збірник наукових праць Національної металургійної академії України. - Дніпропетровськ: «ПП Грек О.С.», 2006. с.3-7.

пост. 25.05.12