

Метод последовательного приближения для решения задачи коммивояжера

КОШЕВОЙ Н.Д., ЧУЙКО А.С.

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского
«Харьковский авиационный институт»

Разработан метод приближенного решения задачи коммивояжера – метод последовательного приближения. Создана программа, реализующая данный метод. С ее помощью были получены решения задачи коммивояжера и проведено сравнение разработанного метода с методом ветвей и границ. С помощью метода последовательного приближения были получены менее точные решения, однако получен значительный выигрыш во времени решения задачи по сравнению с методом ветвей и границ.

Розроблений метод наближеного рішення задачі комівояжера – метод послідовного наближення. Створена програма, яка реалізує цей метод. З її допомогою були отримані рішення задачі комівояжера і проведено порівняння розробленого методу з методом гілок та меж. В результаті чого, встановлено, що з допомогою методу послідовного наближення були отримані менш точні рішення, проте отриманий значний вииграш у часі рішення задачі в порівнянні з методом гілок та меж.

The method of the approximated decision of a problem of the travelling salesman - a method of consecutive approach was developed. The program realizing the given method was created. With its help decisions of a problem of the direct-sales representative have been received and comparison of the developed method with a method of branches and borders was lead. Therefore, it was established, that by means of a method of consecutive approach less exact decisions have been received, the significant gain in time of the decision of a problem in comparison with a method of branches and borders however was received.

Постановка проблемы. При решении задач планирования экспериментов, производственных процессов и маршрутизации возникает проблема снижения затрат на реализацию плана (маршрута). Многие из подобных задач можно свести к одной из самых известных задач комбинаторной оптимизации - задаче коммивояжера, которая заключается в следующем: существует множество из N городов, соединенных между собой сетью дорог различной длины, коммивояжер должен выехать из заданного города, побывать в каждом из остальных $N-1$ городов ровно один раз и вернуться в исходный город, пройдя при этом минимальное расстояние. Актуальной является разработка алгоритмов решения этой задачи с минимальными временными затратами.

Анализ последних исследований и публикаций. Для решения этой задачи известен метод полного перебора [1]. К достоинствам метода следует отнести простоту алгоритма и программной реализации, а также нахождение глобального экстремума. Однако данный алгоритм применим только для очень малого числа городов, т.к. общее количество перестановок равно $(N-1)!$. Также известен «жадный» алгоритм [2] решения задачи коммивояжера. Достоинствами данного метода являются простота алгоритмической и программной реализации и высокая скорость решения. Недостатком этого метода является то, что возможно получение неоптимального решения (в том числе и наихудшего). Кроме того, для решения задачи коммивояжера возможно применение метода ветвей и границ [3]. Достоинствами метода являются нахождение глобального экстремума, а также более высокая эффективность и скорость решения по сравнению с методом прямого перебора. Недостатками метода являются значительная сложность программной реализации, значительное время решения (при большом N) и необходимость в большом объеме памяти ЭВМ.

Цель статьи. Разработать эффективный метод решения задачи коммивояжера.

Основные результаты исследований. Для решения задачи коммивояжера был предложен метод последовательного приближения. Параметры задачи коммивояжера, соответствующие расстояниям между городами, записываются в матрицу расстояний D . При этом элемент этой матрицы, расположенный в i -ой строке и j -ой столбце соответствует расстоянию от города i до города j . Если i и j города не соединены, то расстояние между ними принимается бесконечно большим. Если в задаче N городов, то матрица D является матрицей размером $N*N$. Сущность метода, алгоритм которого представлен на рис. 1, заключается в следующем.

Шаг 1. Выполняется построение начального решения задачи коммивояжера: любой путь, при котором коммивояжер, выехав из исходного города, посещает остальные $N-1$ городов ровно один раз и возвращается в исходный город. Длина пути не имеет значения. Например:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots \rightarrow N \rightarrow 1$$

Шаг 2. Определение длины пути начального решения.

Шаг 3. Длина последовательности (m) приравнивается 1.

Шаг 4. Выбирается первый город текущего решения.

Шаг 5. Выполняется поиск оптимального места в текущей последовательности обхода городов для последовательности городов, начинающейся с i -ого города длиной m . Для этого формируются все возможные комбинации из текущей последовательности обхода городов и последовательности, начинающейся с i -ого города длиной m .

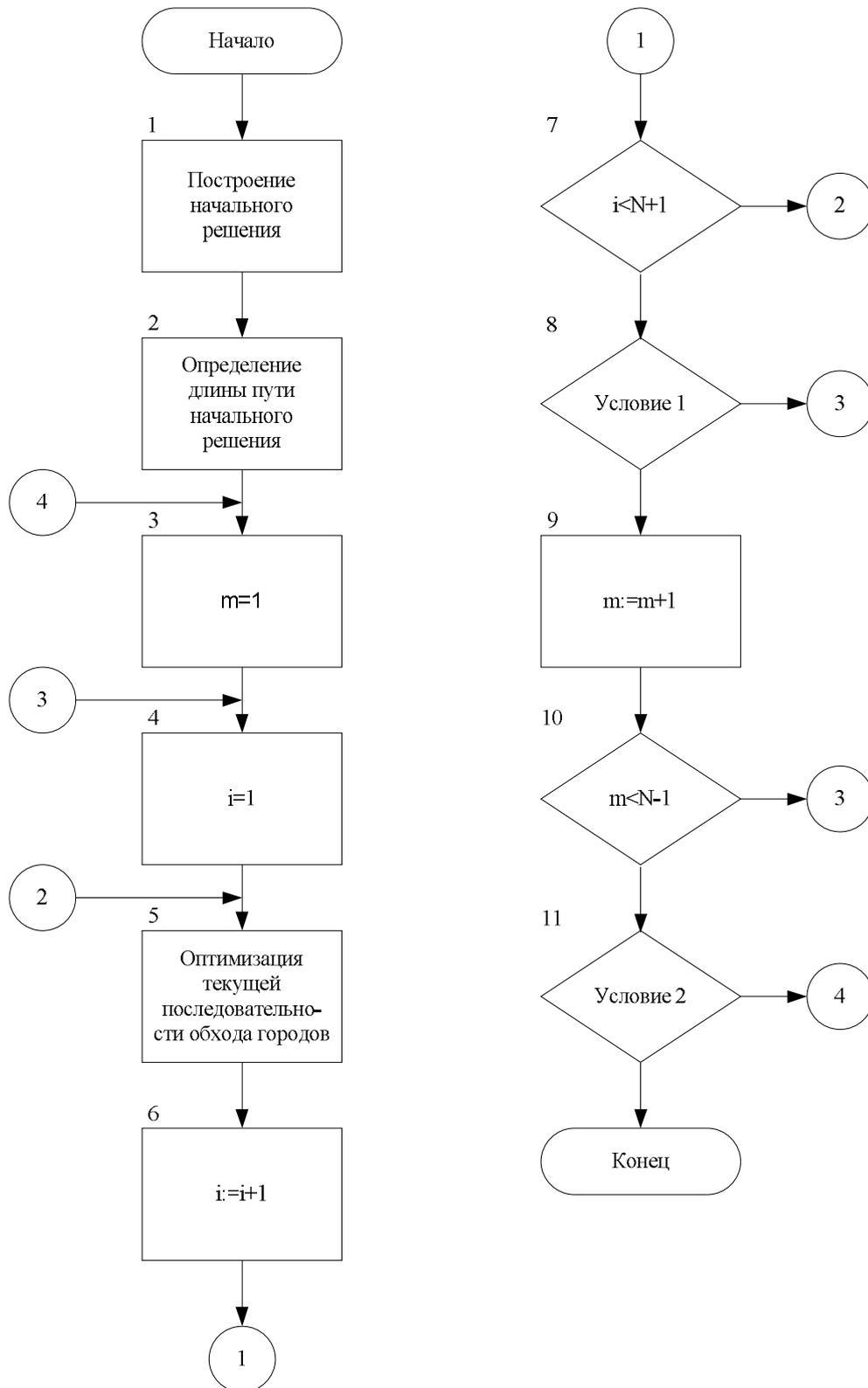


Рис. 1. Схема алгоритма метода последовательного приближения

Например:

для текущей последовательности обхода городов $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ и $i=2, m=1$ получаем следующие возможные комбинации:

$3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$

$3 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$

$3 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3$

$3 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3$

$4 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$.

Аналогично, для последовательности обхода городов $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ и $i=4, m=2$ получаем следующие возможные комбинации:

$3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$

$2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$

$3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 3$

$3 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 3$.

Из полученного множества комбинаций выбираем последовательность обхода городов соответствующую минимальной длине пути. Все дальнейшие действия будут проводиться с этой последовательностью.

Шаг 6. Переходим к обработке следующего города.

Шаг 7. Если номер текущего выбранного города меньше $N+1$, то выполняется шаг 5, в противном случае 8.

Шаг 8. Условие 1: если последовательность обхода городов до цикла (шаги 5-7) отличается от последовательности обхода городов после него, то переходим к шагу 4, в противном случае – к шагу 9.

Шаг 9. Увеличиваем длину последовательности m .

Шаг 10. Если m меньше $N-1$, то выполняется шаг 4, в противном случае – шаг 11.

Шаг 11. Условие 2: если последовательность обхода городов до цикла (шаги 5-10) отличается от последовательности обхода городов после него, то переходим к шагу 3, в противном случае текущая последовательность и является решением задачи коммивояжера.

Для проверки работоспособности и эффективности разработанного алгоритма была создана программа, реализующая данный метод. Проверка осуществлялась на матрицах дуг различной длины, полученных с помощью генератора случайных чисел. Также было проведено сравнение полученных результатов с результатами, полученными с помощью метода ветвей и границ, для чего была создана программа его реализующая. При проведении оптимизации этими методами фиксировалось время решения задачи. Полученные результаты приведены в табл.. Сравнение с методом полного перебора и «жадным» алгоритмом не проводилось, т.к. метод полного перебора невозможно реализовать для больших N , а «жадный» алгоритм дает непредсказуемые результаты (в том числе и наихудшие).

В 6-ом столбце табл. приведено относительное ухудшение решения методом последовательного приближения, по сравнению с методом ветвей и границ, которое вычислялось по следующей формуле:

$$\delta = \frac{R_{i \text{ ПП}} - R_{i \text{ ВГ}}}{R_{i \text{ ВГ}}} \cdot 100\%,$$

где $R_{i \text{ ПП}}$ – результат, полученный методом последовательного приближения,

$R_{i \text{ ВГ}}$ – результат, полученный методом ветвей и границ.

На рис.2 приведен график зависимости времени решения задачи от количества городов N для метода ветвей и границ и метода последовательного приближения.

Таким образом, метод последовательного приближения позволяет находить приближенное решение задачи коммивояжера. Как видно из таблицы, решения, полученные методом последовательного приближения, не значительно отличаются от решений полученных методом ветвей и границ. Однако, как видно из табл. и рис.2, скорость решения задачи методом последовательного приближения значительно выше, чем у метода ветвей и границ, особенно при больших значениях N .

Таблица. Сравнительный анализ метода последовательного приближения и метода ветвей и границ

Количество городов N	Результат, у.е.		Время решения, с		Относительная погрешность, %
	Метод последовательного приближения	Метод ветвей и границ	Метод последовательного приближения	Метод ветвей и границ	
1	2	3	4	5	6
9	24	24	меньше 1	меньше 1	0,0
13	27	27	меньше 1	меньше 1	0,0
15	48	39	меньше 1	меньше 1	23,0
18	21	20	меньше 1	меньше 1	5,0
20	47	40	меньше 1	меньше 1	17,5
25	117	109	меньше 1	6	7,3
31	127	119	меньше 1	6	6,7
43	92	92	меньше 1	10	0,0
50	94	94	меньше 1	14	0,0
77	313	313	1	39	0,0
84	323	323	1	51	0,0
143	459	433	4	190	6,0
152	472	449	5	248	5,1
273	1100	1043	38	925	5,5

1	2	3	4	5	6
283	1193	1143	45	1023	4,4
531	1321	1321	540	6090	0,0
542	1478	1421	585	6349	4,0
1045	3032	2952	7696	37988	2,7
1057	3093	3052	8117	39558	1,3

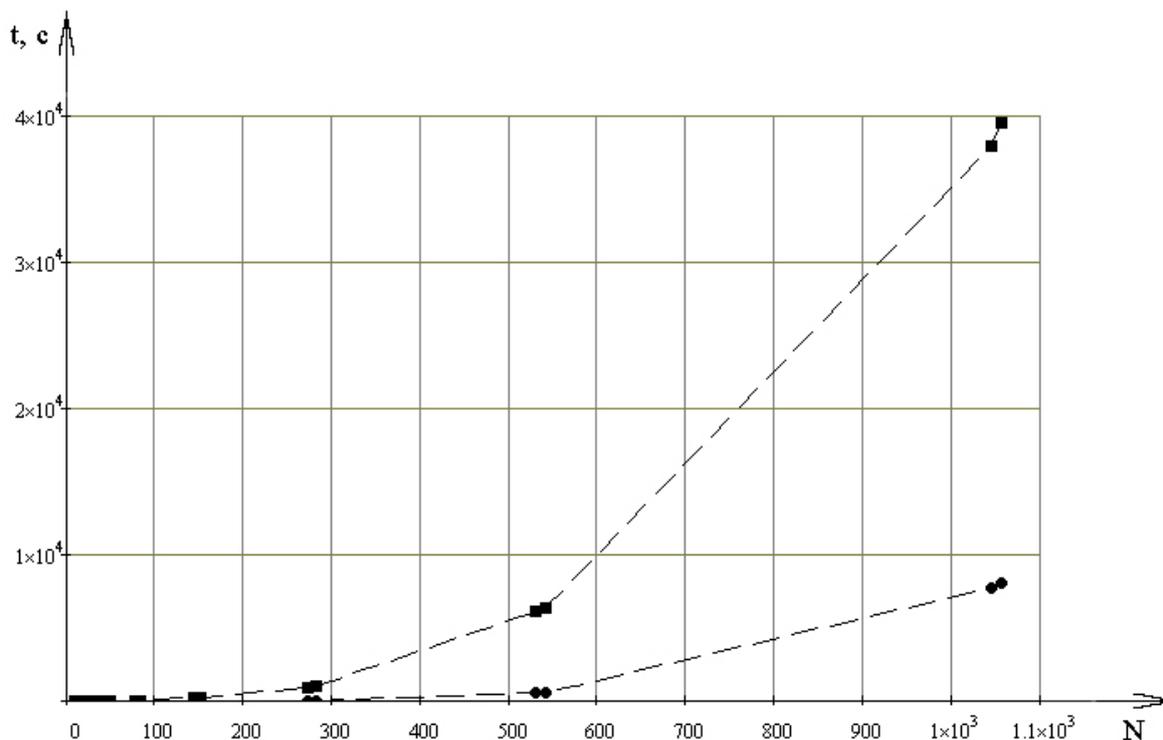


Рис. 2. Зависимости времени решения задачи от количества городов N :

●-●-● – метод последовательного приближения, ■-■-■ – метод ветвей и границ

Выводы

Разработан метод приближенного решения задачи коммивояжера – метод последовательного приближения. Создана программа, реализующая данный метод, а также метод ветвей и границ. С ее помощью были получены решения задачи коммивояжера методом последовательного приближения и методом ветвей и границ. На основании полученных результатов было проведено сравнение этих методов. В результате которого установлено, что с помощью метода последовательного приближения были получены менее точные решения, однако получен значительный выигрыш во времени решения задачи.

Дальнейшие исследования будут направлены на применение разработанного метода для решения задач оптимизации планов эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левитин А. В. Введение в разработку и анализ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 576 с.
2. Кормен Т. Х., Лейзерсон Ч. И., Ривест Р. Л., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ, 2-е издание: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 1296 с.
3. Филлипс Д., Гарсиа-Диас А. Методы анализа сетей: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 496 с.

пост. 07.02.12

