

## Автоколивання в моделі РРД з дискретними параметрами при змінній величині $\tau\{p_c\}$ феноменологічного запізнення згорання

ГОЦУЛЕНКО В.В., ГОЦУЛЕНКО В.Н.

Інститут підприємництва "Стратегія"  
Дніпродзержинський державний технічний університет

Для системи рівнянь зі змінним запізненням, що описує нестійкість горіння в РРД знайдені її періодичні розв'язки, особливості яких можуть бути використані для зниження амплітуд коливань вібраційного горіння.

Для системы уравнений с переменным запаздыванием описывающей неустойчивость горения в ЖРД найдены ее периодические решения, особенности которых могут быть использованы для снижения амплитуд колебаний вибрационного горения.

For systems of the equations with the delay of describing instability of burning in jet engine are found her periodic decisions which features can be used for decrease in amplitudes of fluctuations of vibrating burning.

**Вступ.** Основою теорії нестійкості горіння в РРД (рідинно реактивних двигунах) [1] є феноменологічне запізнення  $\tau\{p_c(t)\} = \tau_i + \tau$  згорання палива. Згідно з визначенням в цій же монографії складова  $\tau_i$  є нечутливою до зміни фізичних параметрів, так що  $\tau_i = \bar{\tau}_i$  залишається незмінною для кожного моменту плин часу. Навпаки, складова  $\tau$  величини запізнення  $\tau\{p_c\}$  є суттєво залежною від параметрів, що характеризують швидкість хімічних реакцій, яка зростає при збільшенні тиску  $p_c$  в камері згорання.

В монографіях [2–3] стверджується залежність від величини  $p_c$  також і складової  $\tau_i$ , оскільки із-за її зміни залежить розпил та розмір капель рідинного палива, що визначає інтервал часу їх випаровування.

Слід відзначити, що механізм запізнюючого горіння Л. Крокко в РРД був визнаний як основний, що спричиняє вібраційне горіння та дозволив побудувати лінійну теорію його збудження [1]. Інші механізми вібраційного горіння залишались невідомими [4], причому серед них є наявність і таких, які обумовлюють діаметрально протилежну зміну амплітуди автоколивань даного нестационарного режиму вібраційного горіння при його керуванні [5]. Особливість появи різного, а іноді протилежного ефекту при одних і тих же заходах, направлених для зменшення амплітуди коливань в вертикальних камерах горіння повітрянагрівачів доменних печей спостерігалися при експериментальних їх випробуваннях [6], стверджує наявність дії декількох механізмів їх збудження.

Періодичні розв'язки повної [7] та виродженої [4] нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь були отримані лише зі сталим запізнюючим аргументом  $\bar{\tau}$ , який є незалежним від підготовчих процесів перед згоранням палива, яке здійснюється потім миттєво.

**Постановка задачі.** Виходячи з того, що феноменологічне запізнення  $\tau\{p_c\}$  згорання та його складові [2–3] є монотонно спадаючими залежностями при зростанні тиску  $p_c$  в камері згорання перед входом газів в реактивне сопло, задачею даного дослідження є виявлення зміни періодичних розв'язків при заміні в системі рівнянь [4,7] динаміки РРД постійної величини  $\tau = \bar{\tau}_i$  [1] змінною його величиною  $\tau\{p_c(t)\}$ .

**Система рівнянь нестационарного руху в камері згорання РРД.** Повна система рівнянь [4,7] зі змінним запізненням згорання  $\tau\{p_c(t)\}$  є такою:

$$\begin{cases} L_{a,kc} \frac{dG}{dt} = H(G) - p_c, \\ C_{a,kc} \frac{dp_c}{dt} = G(t - \tau(p_c)) - \varphi(p_c), \end{cases} \quad (1)$$

де  $H(G)$  – напірна характеристика камери згорання, а  $\varphi(p_c)$  є залежністю зворотною до функції  $p_c = h_c(G)$  – характеристичі реактивного сопла. При  $L_{a,kc} \rightarrow 0$  система рівнянь (1) перетворюється в вироджену [4].

**Алгоритм побудови періодичних розв'язків системи зі змінним феноменологічним запізненням.** Розглядається наступна система рівнянь

$$\begin{cases} L_a \frac{dx}{dt} = H(x) - y, \\ C_a \frac{dy}{dt} = x(t - \tau) - \varphi(y), \\ \tau = \psi(y), \end{cases} \quad (2)$$

де  $H(x) = H_0 + \theta_0 x(x - \theta_1)(x - \theta_2)$ ,  $x = \varphi(y)$  – функція зворотна до  $y = h_c(x) = kx^2$ ,  $L_a$  і  $C_a$  – акустичні параметри камери згорання. Задавшись значенням стаціонарної витрати  $\xi$ , з умов рівності похідних  $\frac{dx}{dt} = 0$  і

$\frac{dy}{dt} = 0$  на стаціонарному режимі одержуємо систему алгебраїчних рівнянь:  $H(x) - y = 0$ ,  $x - \varphi(y) = 0$ ,  $x = \xi$ , звідки одержуємо, що  $k = H(\xi)/\xi^2$ . Тепер, задавшись

$h = \frac{y_{max} - y_{min}}{x_{max} - x_{min}}$  і з огляду на те, що в загальному випадку розрахункова  $\{(x, y)\}$  область сильно витягнута уздовж однієї з координатних осей, тобто  $\max\{h, 1/h\} \gg 1$ ,

одержуємо, що з точки зору чисельного рахунку система (2) являється жорсткою [8-9]. Для усунення цього недоліку виконаємо попередньо наступну заміну змінних:  $t' = m_x t$ ,  $x'(t') = m_x x(t)$ ,  $y'(t') = m_y y(t)$ , де  $m_x$ ,  $m_y$  – константи. Далі, виходячи з того, що

$$x(t-\tau) = \frac{x'(t-\tau)'}{m_x} = \frac{x'(m_t(t-\tau))}{m_x} = \frac{x'(t'-\tau')}{m_x},$$

$$y(t-\tau) = \frac{y'(t-\tau)'}{m_y} = \frac{y'(m_t(t-\tau))}{m_y} = \frac{y'(t'-\tau')}{m_y},$$

де покладено  $\tau' = m_t \tau$ , приходимо до наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} \left(\frac{m_y m_t}{m_x} L_a\right) \frac{dx'}{dt'} = m_y H\left(\frac{x'}{m_x}\right) - y', \\ \left(\frac{m_x m_t}{m_y} C_a\right) \frac{dy'}{dt'} = x'(t'-\tau') - m_x \varphi\left(\frac{y'}{m_y}\right), \tau' = m_t \psi\left(\frac{y'}{m_y}\right), \end{cases}$$

або покладаючи  $L'_a = \frac{m_y m_t}{m_x} L_a$ ,  $C'_a = \frac{m_x m_t}{m_y} C_a$ ,

$$H'(x') = m_y H\left(\frac{x'}{m_x}\right), \varphi'(y') = m_x \varphi\left(\frac{y'}{m_y}\right), \psi'(y') = m_t \psi\left(\frac{y'}{m_y}\right),$$

остаточно одержуємо:

$$\begin{cases} L'_a \frac{dx'}{dt'} = H'(x') - y', \\ C'_a \frac{dy'}{dt'} = x'(t'-\tau') - \varphi'(y'), \\ \tau' = \psi'(y'). \end{cases} \quad (3)$$

Тепер будемо припускати, що розглянута система (3) вже приведена до системи координат, у яких розрахункова область задовольняє умові  $\max\{h, 1/h\} \approx 1$ . Введемо також позначення  $G(x, y) = H(x) - y$ ,  $F(x, y) = x - \varphi(y)$ , і розглянемо наступний чисельний алгоритм:  $n = \overline{0; N(\varepsilon)}$ ,  $[t_0 \ x_0 \ y_0]$  – вектор початкових даних,

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \Delta t_n G(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + \Delta t_n F(x_n, y_n, x_k(n), y_k(n)), \\ t_{n+1} = t_n + \Delta t_n, \\ \Delta t_n = \varepsilon / \sqrt{G^2(x_n, y_n) + F^2(x_n, y_n, x_k(n), y_k(n))}, \end{cases}$$

де  $k(n) = \max\{m \geq 0 : t_{m+1} > t_n - \tau(y_n) \geq t_m\}$ ,  $\varepsilon > 0$  – параметр збіжності алгоритму.

Задавшись довільним відрізком  $t_0 \leq t \leq T$  і вибравши  $N(\varepsilon)$  з умови  $t_{N(\varepsilon)} \geq T$ , позначимо через  $\ell_{N(\varepsilon)}(t)$  ламану з вузлами в точках  $r_n = (x_n, y_n)$ ,  $n = \overline{0, 1, \dots, N(\varepsilon)}$ . Тоді як показано в роботах [10] довжина кожного ребра ламаної  $\ell_{N(\varepsilon)}(t)$  дорівнює  $\varepsilon$  та виконується співвідношення  $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{t_0 \leq t \leq T} |\ell_{N(\varepsilon)}(t) - (x(t), y(t))| = 0$ .

Таким чином, розглянутий чисельний метод є рівномірно збіжним на будь-якому кінцевому відрізку часу.

**Результати досліджень.** Автоколивання вібраційного горіння в РРД, які згідно з акустичними параметрами є гармонійними, або близькими до них і збуджуються при постійному запізненні  $\tau = const$  (рис. 1, а) переходять в релаксаційні (рис. 1, б), якщо запізнення стає змінним  $\tau = \tau\{p_c(t)\}$ , тобто є неявною залежністю від часу  $t$ . Це здійснюється із – за деформації граничного циклу дією квазіпружкою силою, яка змінюється в зв'язку з залежністю  $\tau = \tau\{p_c\}$ , де  $p_c$  – величина тиску в камері згорання, перед входом в реактивне сопло. Характер залежності  $\tau = \tau\{p_c\}$  приведений в монографії [1]. При цьому, якщо характеристика  $F(G)$  камери згорання є сідлоподібною залежністю (рис. 1), то при заміні постійного запізнення  $\tau$  на змінне  $\tau = \tau\{p_c(t)\}$ , амплітуда коливань зростає, частота їх при цьому зменшується, а область нестійкості стаціонарного режиму роботи розширюється в сторону великих витрат.

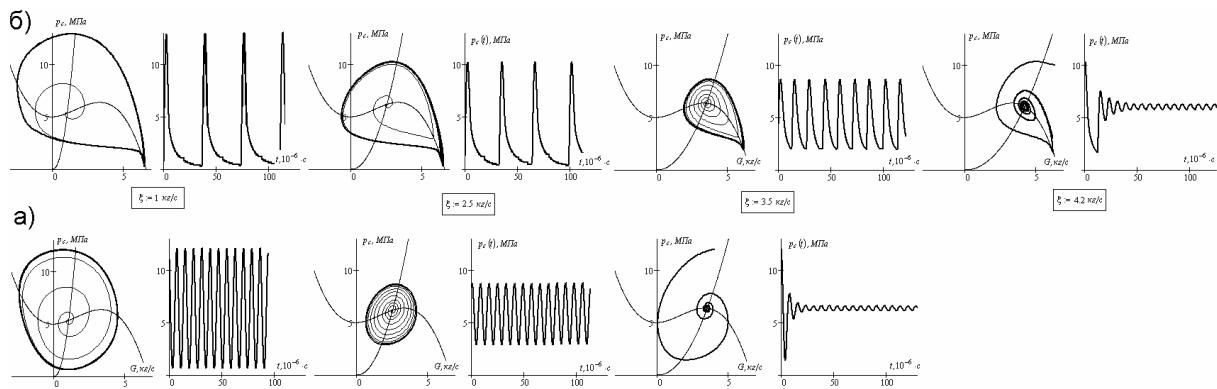


Рис. 1. Автоколивання вібраційного горіння при сідлоподібній характеристиці  $F(G)$  камери згорання при:

а)  $\tau = const$ ; б)  $\tau\{p_c(t)\} = b \frac{\exp(-ap_c)}{\sqrt{p_c}}$

При спадаючій залежності  $F(G)$  спостерігається такий же характер поведінки автоколивань (рис. 2) з більш

інтенсивним зменшенням їх амплітуди, та розширенням області стійкої роботи РРД при великих витратах.

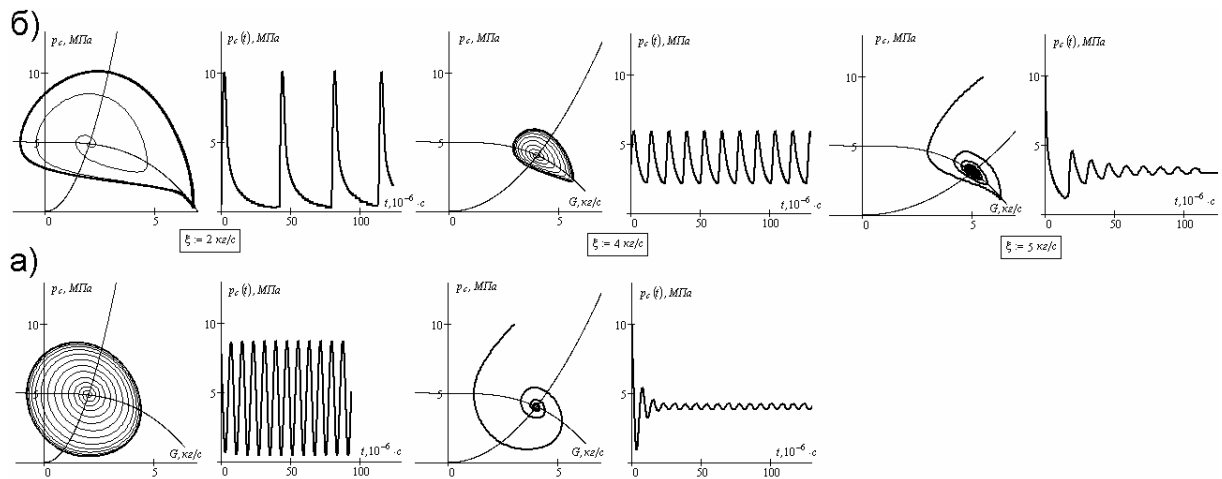


Рис. 2. Автоколивання вібраційного горіння в камері згорання РРД, коли  $F(G)$  є монотонно спадаючою залежністю, при: а)  $\tau = const$ ; б)  $\tau\{p_c(t)\} = b \frac{\exp(-ap_c)}{\sqrt{P_c}}$

В більшості для реальних камер згорання РРД автоколивання є релаксаційними, а якщо характеристика  $F(G)$  має сідлоподібний характер [11], то при  $\tau = 0$  збуджується граничний цикл, який є незмінним при зменшенні хвильового опору  $Z = \sqrt{L_a/C_a}$ , а при наявності запізнення  $\tau$  до граничного циклу приєднуються

гілки характеристики  $F(G)$ . Якщо  $\tau = const$  гілки  $F(G)$ , що приєднуються є майже однаковими (рис. 3), а при  $\tau = \tau\{p_c(t)\}$  граничний цикл зростає, головним чином в області великих витрат, де тиск  $p_c$  є найменшим, а запізнення згорання  $\tau$ , згідно з [1] є найбільшим.

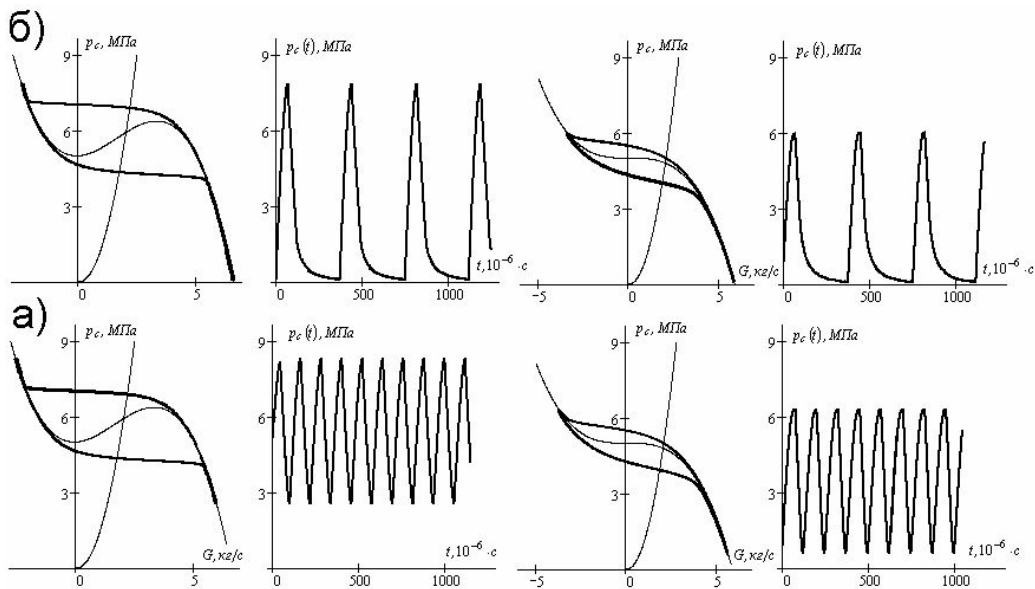


Рис. 3. Релаксаційні автоколивання вібраційного горіння РРД, коли: а)  $\tau = const$ ; б)  $\tau\{p_c(t)\} = b \frac{\exp(-ap_c)}{\sqrt{P_c}}$

Таким же є характер деформації граничного циклу, який виникає і на спадаючій залежності  $F(G)$ . Зростання такого граничного циклу за рахунок приєднання гілки  $F(G)$  (рис. 3), головним чином здійснюється при

великих витратах. Релаксаційні автоколивання, які збуджуються при постійному запізнюванні  $\tau$  згорання переходять в форму пилоподібних коливань (рис. 3, б), коли величина  $\tau$  є змінною, тобто  $\tau = \tau\{p_c(t)\}$ .

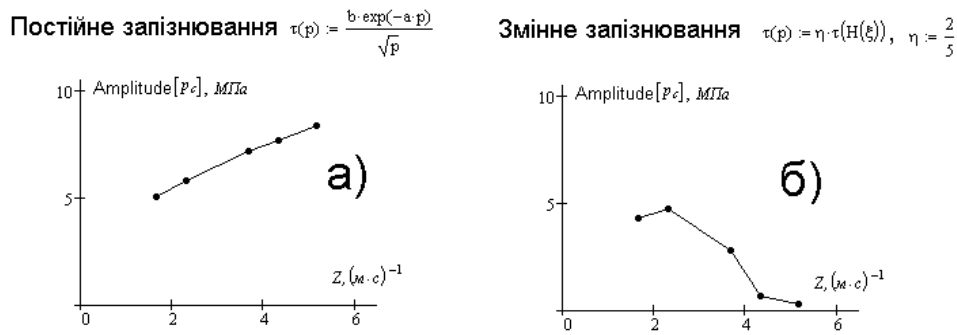


Рис. 4. Залежність амплітуди автоколиваний вібраційного горіння в РРД від хвильового опору  $Z$  камери згорання при сідлоподібній характеристиці  $F(G)$ : а) релаксаційних; б) близьких до гармонійних

Слід відзначити, що амплітуди релаксаційних автоколиваний, що відповідають граничним циклам, які збільшилися за рахунок приєднання до них гілок характеристики  $F(G)$ , не залежно від характеру запізнення згорання  $\tau$ , зростають при збільшенні хвильового опору  $Z$  камери згорання (рис. 4, а). Амплітуди коливаний близьких до гармонійних спочатку збільшуються при зростанні  $Z$ , а потім зменшуються (рис. 4, б) і практично зникають.

#### Висновки

1. Отримані періодичні розв'язки системи нелінійних рівнянь з запізнюючим аргументом, який в одному випадку є незмінним, а в іншому є відомою функцією тиску  $p_c$  в камері горіння.
2. Ілюстровано їх порівняння, а також відповідних їм граничних циклів, що дозволило визначити вплив залежності  $\tau = \tau\{p_c(t)\}$  в камері згорання на зміну внутрикамерних автоколиваний  $p_c(t)$  вібраційного горіння.
3. Встановлена зростаюча залежність амплітуди релаксаційних автоколиваний від хвильового опору  $Z$  камери згорання.
4. Також побудована залежність амплітуди гармонійних коливаний від хвильового опору  $Z$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Луиджи Крокко и Чжен Синь-и. Теория неустойчивости горения в жидкостных ракетных двигателях. – М.: Изд-во иностр. литерат., 1958. – 351с.
2. Раушенбах Б.В. Вибрационное горение. М.: Физматгиз, 1961, 500с.
3. Шаулов Ю.Х., Лернер М.О. Горение в жидкостных реактивных двигателях. М.: Оборонгиз, 1961. – 190 с.
4. Гоцуленко В.В., Гоцуленко В.Н. Автоколебания в модели ЖРД, определяемые вырожденной системой уравнений с запаздывающим аргументом // Математическое моделирование. – 2008. – № 2 (19). – С. 44–46.
5. Гоцуленко В.В. Теоретическое описание автоколебаний вибрационного горения в модели жидкостного реактивного двигателя // Авиационно – космическая техника и технология. – 2008. – № 2(52). – С. 66–71.
6. Шкляр Ф.Р., Малкин В.М., Каштанова С.П., Калугин Я.П., Советкин В.П. Доменные воздухоагреватели. М.: Металлургия, 1982. – 176 с.
7. Гоцуленко В.В., Гоцуленко В.Н. Автоколебания вибрационного горения в ЖРД, самовозбуждающиеся из-за феноменологического запаздывания сгорания топлива, и их математическое моделирование // Математическое моделирование. – 2008. – № 1 (18). – С. 39–42.
8. Дж. Холл, Дж. Уатт. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1979. – 312 с.
9. Дж. Хейл. Теория функционально – дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 400 с.
10. Гоцуленко В.В. Об одном численном методе интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Математическое моделирование. – 2004. – № 2 (12). – С. 5–7.
11. Гоцуленко В.В. Особенности внутрикамерной неустойчивости горения в жидкостных реактивных двигателях // Инженерно – физический журнал. – 2008. – Т. 81. – № 5. – С. 897–902.

пост. 25.03.09