

Розв'язання обернених сингулярно збурених задач – математичних моделей процесів фільтрування

БОМБА А.Я.¹, САФОНИК А.П.², ФУРСАЧИК О.А.²

Рівненський державний гуманітарний університет¹,
Національний університет водного господарства та природокористування²,

Побудовано нову нелінійну модель процесу очищення стічної води на каркасно-засипних фільтрах шляхом „дифузійного збурення” відомої моделі Мінца, яка враховує зміни пористості завантаження та залежність шуканого коефіцієнта дифузії від часу у випадку достатньої гладкості та узгодженості умов перевизначення, початкової та граничних умов. На цій основі проведено комп'ютерний експеримент.

Построена новая нелинейная модель процесса очистки сточной воды на каркасно-засыпных фильтрах путем «диффузионного возмущения» известной модели Минца, которая учитывает изменение пористости загрузки и зависимость искомого неизвестного коэффициента диффузии от времени в случае достаточной гладкости и согласованности условий переопределения, начальных и граничных условий. На этой основе проведен компьютерный эксперимент.

The new model of process of sewer water treatment is built on wire-frame filling filters by a way „diffuse existence” of the known model of Mintsа, taking into account some changes of porosity loading and dependence on time of unknown coefficient of diffusion, in the case of reasonable smoothness and coordinated over-termination conditions, entry and boundary conditions. On this basis the computer experiment is carried out.

Вступ. Область застосовності відомих математичних моделей процесів фільтрування через пористі середовища обмежена численними припущеннями відносно властивостей рідини, що фільтрується, завислих у ній домішкових частинок, осаду, завантаження, швидкості фільтрування тощо [1]. Разом з тим, оптимізація процесів фільтрування, на які в різних країнах витрачаються надзвичайно великі кошти, передбачає можливість надійного прогнозування наслідків зміни не тільки самих складних з існуючих, але й гіпотетичних умов фільтрування. Досвід фундаментальної науки однозначно свідчить про необхідність введення узагальненої математичної моделі процесів фільтрування через пористі середовища. Достатньо послатися на рівняння Максвелла в електродинаміці, рівняння Нав'є–Стокса в гідродинаміці, рівняння Полубариної–Кочиної в фільтрації тощо. Не є виключенням і фільтрування, хоча в даній області традиційні методи введення узагальнених математичних моделей, що безпосередньо базуються на законах збереження, наперед неприйнятні.

Проведений в [2,3] аналіз показав, що основна математична модель процесів фільтрування через пористі середовища – модель Мінца (точніше лінійна модель) є стохастичною. Зокрема, розв'язки цієї моделі можуть бути виражені через пуассонові ймовірності захвату і відриву частинок, а сама модель еквівалентна відомим у статистичній фізиці рівнянням Колмогорова–Феллера [4]. Крім того, доведено [5], що модель Мінца може застосовуватися і у випадках, коли на протязі фільтроциклу відбувається значна зміна пористості завантаження. (Формально модель Мінца зміни пористості завантаження не враховує, див. наприклад [6]).

На даний час актуальними залишаються питання узагальнення моделі Мінца шляхом її дифузійного збурення з метою дослідження нелінійних процесів очищення стічних вод на каркасно-засипних фільтрах з урахуванням малої дифузії та зміни пористості завантаження, а також визначення параметрів процесів масоперенесення шляхом математичних розрахунків без проведення складних фізичних експериментів, що приводить до необхід-

ності розв'язування обернених задач. Виходячи з цього розглянемо наступну модельну обернену сингулярно збурену задачу конвективної дифузії [7-9]:

$$\begin{cases} \sigma(x) \frac{\partial c(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + v \frac{\partial c(x,t)}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \varepsilon \beta c(x,t) - \alpha \rho(x,t) + D_* \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (1)$$

$$c|_{x=0} = c^*(t), \quad c|_{x=L} = \varepsilon_*(x), \quad \rho|_{x=0} = \rho^*(t), \quad \rho|_{x=L} = \rho_*(x),$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (2)$$

$$D(t) \frac{\partial c(0,t)}{\partial x} = c_\Delta(t), \quad D_*(t) \frac{\partial \rho(0,t)}{\partial x} = \rho_\Delta(t), \quad (3)$$

де $c(x,t)$ – концентрація домішок у рідині, що фільтрується, $\rho(x,t)$ – концентрація осаду в завантаженні, β – коефіцієнт, що характеризує обсяги захоплених за одиницю часу домішкових частинок, α – коефіцієнт, що характеризує обсяги відірваних за той же час частинок осаду, v – швидкість фільтрування, $c^*(t)$, $c_*(x)$ – концентрація завислих домішкових частинок відповідно на вході фільтра та в початковий момент часу, $\rho^*(t)$, $\rho_*(x)$ – концентрація осаду у завантаженні відповідно на вході фільтра та в початковий момент часу, $\sigma(x)$ – пористість завантаження, $D(t)$, $D_*(t)$ – коефіцієнт дифузії, $D(t) = b(t)\varepsilon$, $D_*(t) = b_*(t)\varepsilon$, $0 < b(t) \leq 1$, $0 < b_*(t) \leq 1$, ε – малий параметр ($\varepsilon > 0$); $c(x,t)$, $\rho(x,t)$, $b(t)$ та $b_*(t)$ – шукані функції.

Асимптотика розв'язку. Розв'язки системи (1) за умов (2) та умов перевизначення (3) шукаємо у вигляді асимптотичних рядів (див. [10-12]):

$$c(x,t) = c_0(x,t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i c_i(x,t) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i M_i(\xi,t) + R_1(x,t,\varepsilon),$$

$$\begin{aligned} \rho(x,t) &= \rho_0(x,t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \rho_i(x,t) + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i P_i(\xi,t) + \\ &+ \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^{i/2} U_i(\mu,t) + R_2(x,t,\varepsilon), \\ b(t) &= b_0(t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i b_i(t) + r_b(t,\varepsilon), \\ b_*(t) &= b_{*0}(t) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i b_{*i}(t) + r_{b_*}(t,\varepsilon), \end{aligned} \quad (4)$$

де R_1, R_2, r_b, r_{b_*} – залишкові члени, $c_i(x,t)$, $\rho_i(x,t)$, $b_{*i}(t)$, $b_i(t)$ ($i = \overline{0, n}$) – члени регулярних частин асимптотик, зокрема: c_0, ρ_0 – розв'язки відповідної виродженої задачі, c_i, ρ_i – поправки, що враховують “вклад” дифузії вздовж фільтра (за винятком деякої його примежевої зони), $M_i(\xi,t)$, $P_i(\xi,t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) – функції типу примежевого шару, що враховують вплив умов в околі $x = L$ (поправки на виході фільтраційного потоку із фільтра), $U_i(\mu,t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) – поправки на вході фільтраційного потоку в фільтр, $\xi = (L-x) \cdot \varepsilon^{-1}$, $\mu = x \cdot \varepsilon^{-1/2}$ – відповідні регуляризуючі перетворення.

Аналогічно до [7, 10], після підстановки (4) в (1)-(3) та застосування стандартної “процедури прирівнювання”, для знаходження функцій c_i і ρ_i ($i = \overline{0, n}$) приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} \sigma(x) \frac{\partial c_0}{\partial t} + \frac{\partial c_0}{\partial x} - \frac{\partial \rho_0}{\partial t}, \frac{\partial \rho_0}{\partial t} - \alpha \rho_0, \\ c_0|_{x=0} = c_0^*(t), c_0|_{t=0} = c_0^*(x), \rho_0|_{x=0} = \rho_0^*(t), \rho_0|_{t=0} = \rho_0^*(x), \end{cases} \quad (5)$$

$$b_0(t) = \frac{c_{\Delta}(t)}{c_{0x}(0,t)}, \quad b_{*0}(t) = \frac{\rho_{\Delta}(t)}{\rho_{0x}(0,t)}, \quad (6)$$

$$\begin{cases} \sigma(x) \frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial c_i}{\partial x} - \Psi_i - \frac{\partial \rho_i}{\partial t}, \frac{\partial \rho_i}{\partial t} - \alpha \rho_i + \Phi_i, \\ c_i|_{x=0} = 0, c_i|_{t=0} = 0, \rho_i|_{x=0} = 0, \rho_i|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$b_i(t) = - \frac{\sum_{k=1}^i b_{i-k}(t) c_{ix}(0,t)}{c_{0x}(0,t)}, \quad (8)$$

$$b_{*i}(t) = - \frac{\sum_{k=1}^i b_{*i-k}(t) \rho_{ix}(0,t)}{\rho_{0x}(0,t)},$$

де

$$\Psi_i(x,t) = b \frac{\partial^2 c_{i-1}(x,t)}{\partial x^2},$$

$$\Phi_i(x,t) = b_* \frac{\partial^2 \rho_{i-1}(x,t)}{\partial x^2} + \beta c_{i-1}(x,t), \quad i = \overline{1, n}.$$

В результаті розв'язання (5) маємо:

$$\begin{aligned} \rho_0(x,t) &= \rho_*(x) e^{-\alpha t}, \\ c_0(x,t) &= \begin{cases} \alpha \int_0^t \frac{\rho_*(x-v(t-\tilde{t}), \tilde{t}) e^{-\alpha \tilde{t}}}{\sigma(x-v(t-\tilde{t}))} d\tilde{t} + c_*(x-vt), & t \leq \frac{x}{v}, \\ \frac{\alpha}{v} \int_0^x \frac{\rho_*(\tilde{x}) e^{-\frac{\alpha}{v}(\tilde{x}-x+vt)}}{\sigma(\tilde{x})} d\tilde{x} + c_*^*\left(t - \frac{x}{v}\right), & t > \frac{x}{v}. \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язавши (7) отримаємо:

$$\begin{aligned} \rho_i(x,t) &= e^{-2\alpha t} \int_0^t \Phi_i(x, \tilde{t}) d\tilde{t}, \\ c_i(x,t) &= \begin{cases} \int_0^t \frac{W_i(x-v(t-\tilde{t}), \tilde{t})}{\sigma(x-v(t-\tilde{t}))} d\tilde{t}, & t \leq \frac{x}{v}, \\ \frac{1}{v} \int_0^x \frac{W_i\left(\tilde{x}, \frac{1}{v}(\tilde{x}-x+vt)\right)}{\sigma(\tilde{x})} d\tilde{x}, & t > \frac{x}{v}, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{де } W_i(x,t) = \Psi_i(x,t) - \frac{\partial \rho_i}{\partial t}.$$

$$\text{Функції } M = \sum_{i=0}^{m+1} M_i \varepsilon^i, \quad P = \sum_{i=0}^{m+1} P_i \varepsilon^i,$$

$U = \sum_{i=0}^{m+1} U_i \varepsilon^{i/2}$ призначені для усунення неузгодженостей, внесених побудованими регулярними частинами

$c(x,t) = \sum_{i=0}^m c_i \varepsilon^i$, $\rho(x,t) = \sum_{i=0}^m \rho_i \varepsilon^i$ в околі $x=0$, $x=L$

(входу та виходу фільтраційної течії), тобто забезпечують виконання умов: $\frac{\partial}{\partial x}(c+M) = O(\varepsilon^{m+1})$,

$\frac{\partial}{\partial x}(\rho+P) = O(\varepsilon^{m+1})$, $\frac{\partial}{\partial x}(\rho+U) = O(\varepsilon^{m+1})$. Для знаходження цих функцій маємо задачі:

$$\begin{aligned} & b_0(t) M_{i\xi\xi} + v M_{i\xi} = \\ & = I(i) P_{i-1t} + I(i) \varepsilon^{i/2} P_{it} + I(i+1) P_{it} + \sigma(x) M_{i-1t}, \end{aligned}$$

$$M_i \xrightarrow[\xi \rightarrow \infty]{} 0, \quad M_{i\xi}(L,t) = K_i(t);$$

$$b_{*0}(t) P_{i\mu\mu} - \alpha P_i - P_{it} = 0,$$

$$P_i \xrightarrow[\mu \rightarrow \infty]{} 0, \quad P_{i\mu}(L,t) = H_i(t);$$

$$b_{*0}(t) U_{i\mu\mu} - \alpha U_i - U_{it} = 0,$$

$$U_i \xrightarrow[\mu \rightarrow \infty]{} 0, \quad U_{i\mu}(L,t) = H_i(t);$$

$$I(a) = \begin{cases} 0, & a - \text{парне}, \\ 1, & a - \text{непарне}, \end{cases}$$

$$K_i(t) = \begin{cases} 0, & i = m+1, \\ -c_{i\xi}(L,t), & i = 0, \dots, m, \end{cases}$$

$$H_i(t) = \begin{cases} 0, & i = m+1, \\ -\rho_{i\mu}(L,t), & i = 0, \dots, m. \end{cases}$$

Розв'язки останніх задач, як задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку та параболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами, отримуються в явному вигляді, аналогічно до [10]

Для оцінки залишкових членів маємо задачу:

$$\begin{cases} \sigma(x) \frac{\partial R_1}{\partial t} + \frac{\partial R_2}{\partial t} + v \frac{\partial R_1}{\partial x} - \varepsilon b_0 \frac{\partial^2 R_1}{\partial x^2} = \varepsilon^{m+1} g(x,t) \\ \frac{\partial R_2}{\partial t} - \beta R_1 + \alpha R_2 - \varepsilon b_{*0} \frac{\partial^2 R_2}{\partial x^2} = \varepsilon^{m+1} g_1(x,t,\varepsilon) \end{cases}$$

$$\text{де } g(x,t) = b \frac{\partial^2 c_m}{\partial x^2} - \sigma(x) \frac{\partial M_m}{\partial t},$$

$$g_1(x, t, \varepsilon) = \beta c_m + \beta M_{m+1} + \varepsilon \beta M_{m+1} + b_{0*} \frac{\partial^2 \rho_m}{\partial x^2} + b_{0*} \frac{\partial^2 P_{m+1}}{\partial \mu^2} + b_{0*} \frac{\partial^2 U_{m+1}}{\partial \mu^2},$$

$$R_1(0, t, \varepsilon) = R_1(L, t, \varepsilon) = R_1(x, 0, \varepsilon) = R_2(0, t, \varepsilon) = R_2(L, t, \varepsilon) = R_2(x, 0, \varepsilon) = O(\varepsilon^{m+1}).$$

Вимагаючи достатньої гладкості початкової і граничних умов та коефіцієнтів системи рівнянь (1) а також їх узгодженості, на основі принципу максимуму приходимо до справедливості такого твердження:

$$R_i(x, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{m+1}) \quad (i=1,2).$$

Результати числових розрахунків, висновки.

Наведемо результати розрахунків за формулами (4) при $\rho_*(t) = 0$, $\rho_*(x) = 0$, $c_*(t) = 0.17$,

$$c_0(x) = 0.17e^{-(0.5x)^2}, \quad c_\Delta(t) = 0.1 \left(1 + \sin^2(0.7t) + \left(\frac{t}{4}\right)^2 \right)^{-1},$$

$$\rho_\Delta(t) = -0.5e^{-\left(\frac{t}{2}\right)^2} + 1, \quad \beta = 3c^{-1}, \quad a = \frac{1}{18}c^{-1},$$

$v = 10 \text{ м/год}$, $L = 0.8 \text{ м}$. На рисунку 1 зображені графіки функцій $D = D(t)$, $D_* = D_*(t)$.

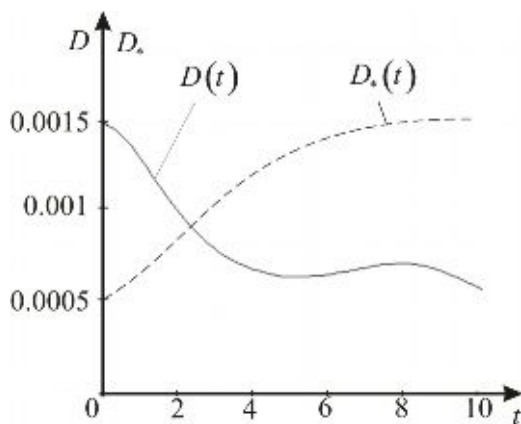


Рис. 1. Значення коефіцієнтів дифузії $D = D(t)$ та $D_* = D_*(t)$ при $\varepsilon = 0.01$.

Вплив коефіцієнта дифузії на концентрації домішок у рідині та осаді проілюстровано на рисунку 2.

На рисунку 3 зображено розподіл концентрації домішок у рідині та осаді у певні моменти часу.

Звідси, задавши на виході фільтра (при $x = 0.8$) допустиме значення концентрації $c = c_{кр} = 0.0015 \text{ г/л}$, знаходимо час його захисної дії: $t = t_s = 5.3 \text{ год}$, що на 2% відрізняється від даних, отриманих дослідним способом [13].

Отже, у випадках достатньої гладкості та узгодженості умови перевизначення, початкової і граничних умов, запропонована в роботах [10,11] методика уточнення відомої моделі Мінца (шляхом переходу до відповідної “збуреної” задачі (1), (2)), застосовна і до розв’язання обернених сингулярно збурених задач (що дозволяє зберегти класичні форми законів, які описують

відповідні процеси руху рідини в пористих середовищах, а при побудові їх розв’язків, не починаючи “все спочатку”, доповнювати відомі “незбурені” розв’язки різними поправками). У випадках, коли умова перевизначення початкова та граничні умови недостатньо узгоджені або недостатньо гладкі, то необхідно здійснити спочатку процедуру згладження негладкостей розв’язків вироджених задач вздовж відповідних характеристик, наприклад, аналогічно до [9]. У перспективі застосування даної методики до розв’язування відповідних просторових задач (включаючи оптимізацію їх параметрів), задач на прийняття рішень та керування відповідними процесами.

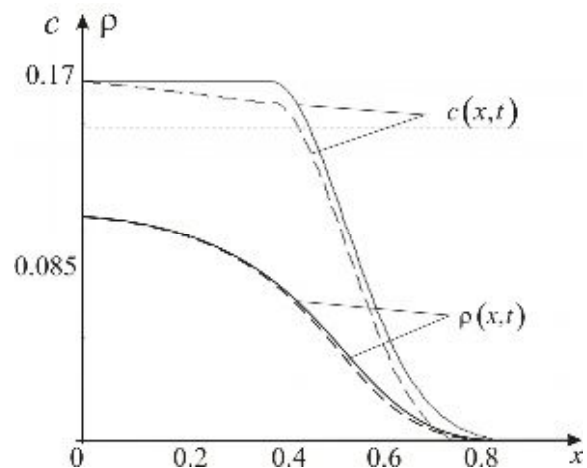


Рис. 2. Розподіл $c(x,t)$ і $\rho(x,t)$ при $t = 2 \text{ год}$ і різних ε ($\varepsilon = 0.01$ - суцільна лінія, $\varepsilon = 0.05$ - пунктирна лінія)

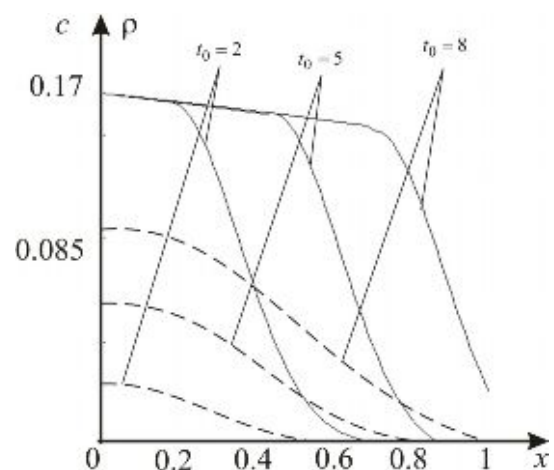


Рис. 3. Розподіл $c(x,t)$ - (a) і $\rho(x,t)$ - (b) в різні моменти часу t_0

ЛІТЕРАТУРА

1. Минц Д.М. Теоретические основы технологии очистки воды. – М.: Стройиздат, 1964. – 156 с.
2. Кочмарский В.З., Демчик И.И. Статистическая интерпретация математической модели фильтрования

- Минца // Теорет. основы хим. технологии. – 1989. – Т.23, №3. – С.405 – 407.
3. Демчик І.І. До питання про статистичну інтерпретацію моделі фільтрування Мінца // Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво: Зб. наук.праць. – Рівне, 2002. – Вип. 27. – С. 207 – 213.
 4. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. – М.: Наука, 1976. – Ч.1. – 494 с.
 5. Демчик І.І. Деякі питання теорії фільтрування // Вісник Рівненського державного технічного університету: Зб. наук. Праць. – Рівне, 2002 – Вип. 1 (14). – С. 80 – 89.
 6. Веницианов Е.В., Рубинштейн Р.Н., Сенявин М.М. О возможности распространения динамики сорбции на расчет осветления воды зернистыми фильтрами // Докл. АН СССР. – 1970. – Т.195, №3. – С. 658 – 661.
 7. Бомба А.Я. Про асимптотичний метод розв'язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі // Укр. мат. журн.– 1982.– Т.4, №4.– С. 493–496.
 8. Лаврик В.И., Бомба А.Я., Власюк А.П. Об асимптотическом приближении решений некоторых массопереноса при фильтрации в неоднородной среде Препринт 85.72. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. – 16с.
 9. Иванчов Н.И. Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении// Сиб. мат. журнал. - 1998.—Т. 39, N 3.—С. 539-550
 10. Бомба А.Я., Барановський С.В., Присяжнюк І.М. Нелінійні сингулярно збурені задачі типу «конвекція-дифузія». – Рівне: НУВГП, 2008. – 252 с.
 11. Сафоник А.П. Чисельно-асимптотичне наближення розв'язків одного класу нелінійних сингулярно збурених крайових задач процесів фільтрування з післядією // Волинський математичний вісник. Серія: Прикладна математика. – 2008. – Вип. 4(13). – С. 119–128.
 12. Бомба А.Я., Присяжнюк І.М., Фурсачик О.А. Оберені сингулярно збурені задачі типу “конвекція-дифузія” для двозв'язних областей // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології – Львів – 2008. – Вип. 8.– С. 19-25.
 13. Орлов В.О. Водоочисні фільтри із зернистою засипкою. – Рівне: НУВГП, 2005. – 163 с.

пост. 29.04.09

Дослідження процесів тепломасообміну, що протікають у дугових печах на етапі проплавлення колодязів

ПАВЛЕНКО А.М., ЯЛОВА К.М.

Дніпродзержинський державний технічний університет

За допомогою математичного моделювання отримано розрахункові дані щодо розподілу температури, маси розплаву, тривалості періоду проплавлення колодязів та впливу діаметру ввідних електродів на динаміку протікання розгляданого періоду теплової роботи дугової сталеплавильної печі.

Средствами математического моделирования получены расчетные данные относительно распределения температуры, массы расплава, длительности периода проплавления колодцев и влияния диаметра вводимых электродов на динамику протекания рассматриваемого периода тепловой работы дуговой сталеплавильной печи.

The calculating data concerning distribution of temperature, mass of the melting, duration of period of pit's melting and influence of diameter of electrodes on the dynamics of the given period of the arc furnace's work are obtained with the help of mathematical modeling.

Вступ. У світовому виробництві сталі спостерігається неухильний ріст частини електросталеплавильного виробництва. Це обумовлено тим, що воно відрізняється більш низькими показниками енергоємності, кількостями сировинних матеріалів і викидів у навколишнє середовище, а також гнучкістю використання різних видів шихтових матеріалів. Рівень енергозбереження безпосередньо залежить від способу ведення плавки і динаміки тепломасообмінних процесів, що протікають у робочому просторі печі [1]. Пошук і розробка ефективних режимів плавки шляхом виробничого експерименту неможливі без суттєвих витрат та капіталоукладень. Альтернативою цьому є створення математичної моделі теплової роботи печей, що дозволить проводити чисельні експерименти поза пічню. Розробка математичної моделі теплової роботи печі, алгоритму та

програми розрахунку на ЄОМ дозволять вивчати будь-які ситуації з різними чисельними значеннями фізичних величин і отримати найбільш ефективні рішення при створенні енергозберігаючих технологій для діючих та майбутніх дугових печей.

Постановка задачі. Дугова електрична піч являє собою тепловий агрегат з циклічною роботою і різними тепловими режимами, а завалочні матеріали – пористий об'єкт, що характеризується порозністю насипного шару і теплофізичними характеристиками для кожного виду шихти. Необхідно відзначити, що теплову роботу дугових печей умовно поділяють на чотири періоди: запалювання електричних дуг, проплавлення колодязів, плавлення закритими дугами, доплавлення шихти відкритими дугами. При цьому теплофізичні процеси і механізми передачі теплоти до шихти