

- неприменимость к анализу нестационарных процессов;
- преобразование Фурье выполнимо, если анализируемый процесс задан на всей числовой оси (и в прошлом, и в будущем);
- практически неизбежное ограничение числа гармоник приводит к ошибкам при восстановлении процесса;
- базисной функцией при разложении в ряд Фурье является гармоническое колебание, определенное на всей оси, параметры которого не меняются во времени;
- отдельные (локальные) особенности наблюдаемого процесса вызывают изменения частотного образа процесса, которые «размазываются» по всей частотной оси, что делает их обнаружение по спектру сигнала практически невозможным;
- плавный характер базисной функции затрудняет представление локальных пиков, разрывов процесса, что приводит к необходимости использования в представлении сигнала гармоник высокой частоты, которые влияют на форму восстановленного сигнала и за пределами локальных особенностей процесса;
- по составу высших составляющих спектра практически невозможно оценить местоположение особенностей;
- при наличии локальных особенностей процесса его спектр содержит высокочастотные компоненты, амплитуда которых мала, в силу чего они могут быть при анализе не замечены и отброшены.

Таким образом, известные методы представления реальных сигналов и функций постоянно наталкивались на серьёзные теоретические ограничения, не позволяющие осуществить единообразное их математическое описание.

В связи с этим поставим задачу разработки технологии получения аналитического описания сложных процессов, свободных от перечисленных недостатков известных методов.

**Постановка задачи.** Мощной альтернативой анализу Фурье является теория вейвлетов, которая и позволяет теоретически строго приблизить практически любую функцию, в том числе состоящую из разных нестационарных компонент, действующих в разные промежутки времени, амплитудно и частотно модулированную, содержащую пики, разрывы и другие особенности [1-3].

Одна из основополагающих идей вейвлет – представления функций заключается в разбиении приближения к наблюдаемому процессу на две составляющие – аппроксимирующую (грубую) и детализирующую с их последующим итерационным уточнением.

Задача аппроксимации наблюдаемого процесса решается с использованием системы функций, получаемых из так называемой порождающей функции с помощью целочисленных сдвигов. Принципиальное свойство, которым должна обладать порождающая функция состоит в следующем: для порождающей функции  $\varphi(x)$  система функций  $\varphi(x-n)$ ,  $n \in Z$ , образует ортонормированный базис [2]. Кроме того, порождающая функция должна удовлетворять уравнению:

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in Z} h_n \varphi(2x-n), \quad (1)$$

где  $\varphi(2x-n)$  – функция, получаемая из  $\varphi(x)$  путем масштабируемого сдвига (в связи с этим функция  $\varphi(x)$  называется масштабирующей).

Определяемая в соответствии с (1) процедура масштабируемого сдвига может быть продолжена. При этом получим систему функций:

$$\varphi_{j,n}(x) = \sqrt{2}^j \varphi(2^j x - n), \quad j=1,2,\dots \quad (2)$$

Легко показать, что система функций  $\varphi_{j,n}(x)$  также образует ортонормированный базис [3,4].

Заметим, что если масштабирующая функция  $\varphi(x)$  имеет компактный носитель, лежащий на промежутке длины  $N$ , то сумма в равенстве (1) является конечной и содержит не более  $N+1$  слагаемого.

Качество процедуры аппроксимации зависит от того, каким образом выбрана масштабирующая функция. Эта процедура не формализована. В связи с этим поставим задачу компактного описания технологии получения масштабирующей функции и ее использования для решения задач аппроксимации.

**Основной результат.** Масштабирующее уравнение может быть использовано для построения масштабирующей функции, если известны масштабирующие коэффициенты  $\{h_n\}$ ,  $n \in Z$ . С этой целью запишем уравнение (1) в виде операторного уравнения. Введем два унитарных оператора:

а) оператор  $A$  изменения масштаба,

$$A(f(x)) = \sqrt{2} f(2x);$$

б) оператор  $T_{\frac{n}{2}}$  сдвига на  $\frac{n}{2}$ ,

$$T_{\frac{n}{2}}(f(x)) = f\left(x - \frac{n}{2}\right).$$

Очевидно, что  $\sqrt{2}\varphi(2x-n) = T_{\frac{n}{2}}(A(\varphi(x)))$ .

Тогда масштабирующее уравнение (1) может быть записано с использованием суперпозиции операторов  $A$  и  $T_{\frac{n}{2}}$  следующим образом:

$$\varphi(x) = \sum_{n \in Z} h_n T_{\frac{n}{2}}(A(f(x))).$$

Введем теперь оператор  $F$ , соответствующий линейной комбинации суперпозиций операторов  $T_{\frac{n}{2}}$  и

$A$  для множества значений  $n$ :

$$F = \sum_{n \in Z} h_n T_{\frac{n}{2}}(A).$$

Тогда масштабирующее уравнение примет вид  $\varphi(x) = F(\varphi(x))$ , то есть масштабирующая функция  $\varphi(x)$  является неподвижной точкой оператора  $F$ . Поэтому, масштабирующая функция может быть определена путем последовательных приближений

$$\varphi_{n+1}(x) = F(\varphi_n(x)), \quad (3)$$

причем в качестве начального приближения можно выбрать, например, функцию Хаара -  $\varphi(x)$ , определяемую

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \\ 0, & x \notin [0,1). \end{cases}$$

Получим систему уравнений для расчета набора масштабирующих коэффициентов. Первое из уравнений системы выводится следующим образом. Выполним преобразование Фурье масштабирующего соотношения (1).

Пусть

$\hat{f}(\omega) = \Phi(f(x))$  - есть преобразование Фурье функции  $f(x)$ . Тогда в соответствии со свойствами преобразования Фурье запишем  $\Phi[f(ax)] = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$ ,

$$\Phi[f(x-b)] = e^{-i\omega b} \hat{f}(\omega).$$

Тогда, поскольку  $\varphi(2x-n) = \varphi\left(2\left(x-\frac{n}{2}\right)\right)$ , имеем

$$\Phi[\varphi(2x-n)] = \frac{1}{2} e^{-in\frac{\omega}{2}} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Поэтому, преобразовав по Фурье уравнение (1), получим

$$\Phi[\varphi(x)] = \Phi\left[\sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \varphi(2x-n)\right]$$

и

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-in\frac{\omega}{2}} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Введем

$$H_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-in\omega}. \quad (4)$$

Тогда

$$\hat{\varphi}(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (5)$$

Из соотношения (5) следует  $\hat{\varphi}(0) = H(0)\hat{\varphi}(0)$ , откуда  $H(0) = 1$ .

Тогда, с учетом (4), имеем

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n = \sqrt{2}. \quad (6)$$

Первое уравнение системы уравнений, используемых для отыскания набора  $\{h_n\}$ , получено. Далее, используя (2), имеем

$$\varphi_{j-1,k}(x) = \sqrt{2^{j-1}} \varphi\left(2^{j-1}x-k\right). \quad (7)$$

С другой стороны, в соответствии с (1)

$$\varphi\left(2^{j-1}x-k\right) = \sqrt{2} \sum_m h_m \varphi\left(2\left(2^{j-1}x-k\right)-m\right) \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), получим

$$\varphi_{j-1,k}(x) = \sqrt{2} \sqrt{2^{j-1}} \sum_m h_m \varphi\left(2\left(2^{j-1}x-k\right)-m\right) = \sqrt{2^j} \sum_m h_m \varphi\left(2^j x - 2k - m\right) \quad (9)$$

Введем новую переменную  $n = m + 2k$ . Тогда соотношение (9) примет вид

$$\begin{aligned} \varphi_{j-1,k}(x) &= \sqrt{2^j} \sum_n h_{n-2k} \varphi\left(2^j x - n\right) = \\ &= \sum_n h_{n-2k} \varphi_{j,n}(x) \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда, в частности, следует, что при  $j = 1$

$$\varphi_{0,k}(x) = \sum_n h_{n-2k} \varphi_{1,n}(x).$$

Далее, так как функции  $\varphi_{0,0}(x)$  и  $\varphi_{0,k}(x)$  ортогональны, то

$$\sum_n h_n h_{n-2k} = \delta_{0k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \text{Ent}\left[\frac{n}{2}\right], \quad (11)$$

где  $\text{Ent}[x]$  - целая часть  $x$ .

Еще одна группа уравнений для отыскания набора  $\{h_n\}$  связана со следующими обстоятельствами.

Понятно, что удобное для практического использования разложение функции должно иметь конечное число членов, то есть должно быть основано на вейвлетах с компактным носителем. Этим свойством обладает вейвлет Хаара, но он имеет разрывы. Поэтому желательно найти другие вейвлеты, которые имели бы компактный носитель и были бы достаточно регулярными. Есть ещё одно желательное требование – достаточное количество нулевых моментов. Нулевые моменты существенно влияют на качество разложения. Дело в том, что если вейвлет  $\psi(x)$  имеет достаточное число нулевых моментов, то коэффициенты разложения гладкой функции быстро убывают. С другой стороны, в [2] показано, что если функция  $\psi(x)$  имеет  $N$  нулевых моментов, то коэффициенты  $\{h_n\}$  удовлетворяют уравнениям:

$$\sum_n (-1)^n n^k h_n = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (12)$$

Таким образом, получена совокупность уравнений (6), (11), (12), которые образуют систему уравнений, достаточную для расчёта коэффициентов  $\{h_n\}$ .

Приведём, например, систему уравнений для частного случая, когда длина носителя равна 5 и, следовательно, число членов в разложении будет равно 6.

Тогда система уравнений имеет следующий вид: Из (6):

$$h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 = \sqrt{2}.$$

Из (11):

$$k = 0, \quad h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2 + h_5^2 = 1;$$

$$k = 1, \quad h_0 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_4 + h_3 h_5 = 0;$$

$$k = 2, \quad h_0 h_4 + h_1 h_5 = 0.$$

Из (12):

$$k = 0, \quad h_0 - h_1 + h_2 - h_3 + h_4 - h_5 = 0;$$

$$k = 1, \quad -h_1 + 2h_2 - 3h_3 + 4h_4 - 5h_5 = 0.$$

Решение этой системы уравнений таково:

$$h_0 = 0,0813, \quad h_1 = 0,6035, \quad h_2 = 0,7744, \quad h_3 = 0,0836,$$

$$h_4 = -0,1486, \quad h_5 = 0,020.$$

Таким образом, для получения аппроксимации наблюдаемого процесса может быть использована следующая процедура. На первом шаге для выбранной длины носителя  $N$  по формулам (6), (11), (12) составляется и решается система уравнений относительно мас-

штабирующих коэффициентов  $h_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ . На втором шаге с использованием набора  $\{h_n\}$  по формуле (3) рекуррентно отыскивается масштабирующая функция  $\varphi(x)$  и, затем, ортонормированный базис  $\{\varphi_{j,n}(x)\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ .

Аппроксимирующая функция определяется теперь по формуле (13):

$$P_j(f(x)) = \sum_{n \in Z} (f(x), \varphi_{j,n}(x)) \varphi_{j,n}(x), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} (f(x), \varphi_{j,n}(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_{j,n}(x) dx = \\ &= \sqrt{2^j} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(2^j x - n) dx. \end{aligned} \quad (14)$$

При этом проекции  $P_j(f(x))$  являются приближениями к функции  $f(x)$  тем более точными, чем выше  $j$ . Число  $j$  характеризует уровень разрешения. Чем больше  $j$ , тем более малыми являются носители функций  $\varphi_{j,n}(x)$  и поэтому коэффициенты  $(f(x), \varphi_{j,n}(x))$  разложения (13) обеспечивают более детальное отображение наблюдаемой функции  $f(x)$ .

Для получения уточняющего разложения используется другой ортонормированный набор базисных функций – вейвлеты. Соответствующая порождающая функция  $\psi(x)$  отыскивается по формуле [4]:

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_n (-1)^n h_{N-n} \varphi(2x - n) \quad (15)$$

Базисный набор вейвлетов формируется путем масштабированного сдвига порождающего (его называют материнским), вейвлета (15). При этом уточняющее разложение получают по формуле:

$$P_j^w(f(x)) = \sum_{n \in Z} (f(x), \psi_{j,n}(x)) \psi_{j,n}(x), \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} (f(x), \psi_{j,n}(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{j,n}(x) dx = \\ &= \sqrt{2^j} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi(2^j x - n) dx \end{aligned} \quad (17)$$

Важное достоинство описанного подхода состоит в том, что сглаживающую функцию  $P_j(f(x))$

можно ещё раз разложить на ещё более сглаженную и детализирующую части. Этот процесс, если необходимо, можно продолжить.

Идеи вейвлет-анализа могут быть эффективно использованы при исследовании эволюции параметров теоретико-вероятностного описания нестационарного процесса, в частности, плотности его распределения. При этом сглаженная составляющая разложения процесса адекватно описывает поведение его математического ожидания, а детализирующие компоненты разло-

жения – уровень вариации процесса относительно среднего. Соответствующая вычислительная процедура может быть построена следующим образом. Сначала с учетом эволюции математического ожидания процесса временной интервал его наблюдения разбивается на подынтервалы с практически неизменным средним значением. Затем, на каждом из этих подынтервалов независимо осуществляется стандартная статистическая обработка элементов детализирующих разложений. Случайные значения колебательных компонентов на каждом из подынтервалов постоянства сглаживающей составляющей имеют плотность распределения с нулевым средним для каждой детализирующей составляющей процесса

$$\int_{T_1}^{T_2} \sum_{n \in Z} (f(x) \psi_{j,n}(x)) \psi_{j,n}(x) dx = 0,$$

где  $(T_1, T_2)$  – интервал наблюдения.

Тогда плотность распределения случайного значения процесса на  $s$ -м подынтервале может быть аппроксимирована, например, следующим образом

$$g_s(x) = A_s \exp \left\{ -\frac{(x - \theta_{1s})^2}{2\theta_{2s}^2} (1 + \theta_{3s} \text{sign}(x - \theta_{1s})) \right\},$$

где  $\theta_{1s}$  – значение сглаживающей составляющей на  $s$ -м подынтервале,  $\theta_{2s}$  – дисперсия детализирующей составляющей на  $s$ -м подынтервале,  $\theta_{3s}$  – асимметрия детализирующей составляющей на  $s$ -м подынтервале,  $A_s$  – нормирующий коэффициент.

Полученное математическое описание плотности распределения значений наблюдаемого случайного процесса на каждом из подынтервалов позволяет решать многие практические задачи (например, оценка вероятности выхода за допустимый диапазон, продолжительности процесса внутри диапазона и т.п.).

## Выводы

Таким образом, рассмотрена методика приближения к наблюдаемому процессу с использованием сглаживающей и детализирующих составляющих на основе вейвлет – функций. Описана методика расчета масштабирующей функции и масштабирующих коэффициентов, обеспечивающая возможность сглаживания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Астафьева Н.М. Вейвлет – анализ: основы теории и примеры приложения// Усп. физ. наук. – 1998. – Т. 166, № 11. – С. 1145-1170.
2. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам: пер. с англ. – М.: РХД, 2001. – 219 с.
3. Чуи К. Введение в вейвлеты: пер. с англ. – М.: МИР, 2001. – 412 с.
4. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов: пер. с англ. – М.: МИР, 2005. – 658 с.