

Задача електропереносу з розривним розв'язком

КРИВЦУН І.В.¹, КРИКЕНТ І.В.², ДЕМЧЕНКО В.Ф.¹, ЛІСНИЙ О.Б.¹, НАКВАСЮК В.В.¹

¹Інститут електрозварювання ім. Є.О. Патона НАНУ

²Дніпродзержинський державний технічний університет

Сформульована задача електропереносу з розривним розв'язком, характерною особливістю якої є зворотний стрибок (проти напрямку току) потенціалу на внутрішній границі (анодному прошарку) області розв'язку. Запропонована однорідна різницева схема на узагальненому розв'язку задачі. Методика чисельного розв'язку ілюструється на тестовій задачі, що має точний розв'язок. Наведені результати чисельного розрахунку електропереносу в плазмі стовпа зварювальної дуги при наявності зворотного стрибка потенціалу на плоскій поверхні аноду.

Сформулирована задача электропереноса с разрывным решением, характерной особенностью которой является наличие обратного скачка (против направления тока) потенциала на внутренней границе (анодный слой) области решения. Предложена однородная разностная схема на обобщенном решении задачи. Методика численного решения иллюстрируется на тестовой задаче, которая имеет точное решение. Приведены результаты численного расчета электропереноса в плазме столба сварочной дуги при наличии обратного скачка потенциала на плоской поверхности анода.

The task of electric transfer with the interrupt decision is formulated. The specific of the task is the presence of return potential jump (against the current flow) on internal area border (the anode layer) of the decision. The homogeneous difference scheme is suggested by using the generalized decision of the task. The numerical decision technique is illustrated on a test task, which has the exact decision. The numerical calculation results of electric transfer in the welding arch plasma at the presence of the return potential jump on a flat anode surface are given.

1. Постановка проблеми. Розриви розподілених характеристик (температури, концентрації, електричного потенціалу, тиску та ін.) при математичному описанні фізичних процесів можуть бути обумовлені різними факторами. Один із варіантів розривного розв'язку виникає при побудові математичних моделей процесів переносу в шарувато-неоднорідних середовищах, що мають на границі контакту тонкий (у порівнянні із характерними геометричними розмірами) слабопроникнений прошарок. В задачі про неідеальний контакт розрив розв'язку виникає за рахунок зосередженого (тонкий прошарок вилучається з області розв'язку) опору на границі контакту середовищ. Подібні задачі у постановках, що у явному вигляді використовують умови спряження на границі розриву розв'язку, розглядалися в роботах [1, 2, 3]. В [4, 5] запропонована узагальнена постановка задач тепло-масопереносу з розривним (за типом неідеального контакту) розв'язком, що ґрунтується на природньому з фізичної точки зору опису процесів переносу у вигляді системи рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} c\gamma \frac{\partial T}{\partial t} = \text{DIV}_+ \bar{q} + f(\bar{x}), & \bar{x} \in \Omega, \\ -\text{GRAD}_- T = \Xi \bar{q}, \end{cases} \quad (1)$$

перше з яких є узагальненим законом збереження субстанції, а друге - узагальненим феноменологічним законом - Ома, Дарсі, Фур'є, Фіка (визначення операторів DIV_+ , GRAD_- див. далі). В (1) $\Xi = E\rho + R\delta(\Gamma)P$, де E - одиничний тензор, P - тензор другого рангу з елементами $p_{i,j} = \gamma_i\gamma_j$, де γ_i - направляючі косинуси нормалі \vec{n} до границі Γ неідеального контакту, ρ - питомий опір середовища, R - опір неідеального контакту. Подібний «наскрізне» описання процесів переносу у всій бага-

тошаруватій системі не потребує апроксимації нормальних компонент вектора питомого потоку на границі Γ і дозволяє будувати [4] однорідні обчислювальні алгоритми чисельного розв'язку задачі. Формулювання задач переносу у вигляді (1) дозволяє розширити клас допустимих розв'язків диференціальної задачі (див. [6], де виходячи з (1), встановлено існування та єдність розв'язку задач теплопровідності в класі функцій $L_2(\Omega)$).

2. Моделі розривного розв'язку. В моделі неідеального контакту стрибок температури $[T]_{\Gamma} = T|_{\Gamma_+} - T|_{\Gamma_-}$ на Γ (тут Γ_+ - сторона гіперповерхні Γ , у напрямку нормалі \vec{n} до границі Γ) пропорційний проекції вектора теплового потоку $\vec{w} = -\lambda\nabla T$ на нормаль \vec{n} , тобто $[T]_{\Gamma} = -Rw_n|_{\Gamma}$. Специфічною особливістю моделі неідеального контакту є те, що, $\text{sign}[T]_{\Gamma} = \text{sign}(\text{grad } T)_n|_{\Gamma}$, а по тому $R > 0$. Стрибок такого типу будемо називати прямим стрибком (рис. 1 (а)), на відміну від зворотного стрибка, який буде розглянуто далі.

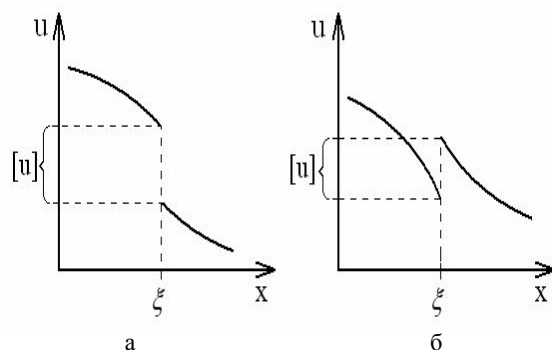


Рис. 1. Схеми розриву розв'язку (а - прямий стрибок; б - зворотний стрибок).

$$[\varphi]_{\Gamma} = G(j_n|_{\Gamma}). \quad (2)$$

На відміну від неідеального контакту модель анодного шару (2) не тільки робить задачу розрахунку потенціалу φ електричного поля нелінійною, але і приводить до якісно іншого типу стрибка розв'язку – так званого зворотного стрибка, одновимірна схема якого подана на рис. 1 (ii). Між знаками $[\varphi]_{\Gamma}$ та $(grad\varphi)_n|_{\Gamma}$ у цьому випадку встановлюється зв'язок наступного вигляду: $sign[\varphi]_{\Gamma} = -sign(grad\varphi)_n|_{\Gamma}$, що і виправдовує назву «зворотний стрибок».

3. Узагальнена постановка задачі електропереносу. Нехай R_n - n -вимірний евклідовий простір, $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ - декартові координати, $\Omega \subset R_n$ - область розв'язку задачі, яку для простоти запису будемо вважати двошаровою: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$; через Γ позначимо границю підобластей Ω_1, Ω_2 . Всім ідентифікаторам змінних, що стосуються підобластей Ω_1, Ω_2 присвоїмо індекси 1 і 2 відповідно. Електричний потенціал $\varphi(\bar{x})$, будемо вважати достатньо гладким всюди в Ω , за винятком, може бути, границі Γ , на якій $\varphi(\bar{x})$ набуває стрибка $[\varphi(\bar{x})]_{\Gamma}$; при цьому $[\varphi(\bar{x})]_{\Gamma}$ як функція координат границі Γ є неперервною. В кожній із підобластей Ω_1, Ω_2 визначимо вектор щільності струму наступним чином $\vec{j}_m = -\sigma_m grad \varphi_m$, $m = 1, 2$, де оператор градієнта розуміється у класичному змісті як функція точки $\bar{x} \in \Omega_1, \Omega_2$. Коефіцієнти $\sigma_m(\bar{x})$, $m = 1, 2$ будемо також вважати достатньо гладкими і такими, що задовольняють умові $\sigma_m(\bar{x}) \geq C > 0$. Нехай у кожній з підобластей Ω_m потенціал електричного поля задовольняє рівнянням

$$div(k_m grad \varphi_m) = 0, \bar{x} \in \Omega_m, m = 1, 2, \quad (3)$$

а на границі Γ виконується умова неперервності нормальних до Γ проєкцій вектора щільності струму, тобто

$$j_{1n}|_{\Gamma_+} = j_{2n}|_{\Gamma_-}. \quad (4)$$

У лінійній постановці задачі електропереносу будемо вважати, що на границі Γ задана різниця потенціалів $[\varphi]_{\Gamma}$ як функція координат границі Γ

$$[\varphi]_{\Gamma} = g(\bar{x}), \bar{x} \in \Gamma. \quad (5)$$

На зовнішній границі $\partial\Omega$ області Ω будемо припускати виконаними деякі граничні умови, конкретний вид яких для подальших викладок значення не має; при цьому вважається, що існує єдиний розв'язок задачі в класичній постановці.

$$\text{Уведемо в } \Omega \text{ функції } \varphi(\bar{x}), \vec{j}(\bar{x}), \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \sigma(\bar{x})$$

(існують в Ω як функції точки всюди, за винятком границі Γ) наступним чином: $\psi(\bar{x}) = \psi_m(\bar{x}), \bar{x} \in \Omega_m$, де $\psi(\bar{x})$ - одна з перерахованих вище функцій. Узагальнені частинні похідні $\frac{D_-}{Dx_i}$ функції $\varphi(\bar{x})$ в області Ω

визначаються наступним чином [9]

$$\frac{D_- \varphi}{Dx_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + [\varphi]_{\Gamma}^{(i)} \gamma_i \delta(\Gamma), \bar{x} \in \Omega, \quad (8)$$

де $[\varphi]_{\Gamma}^{(i)}$ - стрибок розв'язку, який досягає функція $\varphi(\bar{x})$ у напрямку осі Ox_i (у подальшому покладемо $[\varphi]_{\Gamma}^{(i)} = [\varphi]_{\Gamma}, i = \overline{1, n}$), $\gamma_i = \cos(\vec{n}, \vec{x}_i)$ - направляючі косинуси нормалі \vec{n} до Γ , $\delta(\Gamma)$ - δ -функція Дірака, що зосереджена на гіперповерхні Γ . Користуючись (8), уведемо в Ω узагальнений градієнт $GRAD_-$ розривної функції $\varphi(\bar{x})$

$$GRAD_- \varphi = grad \varphi + \vec{n}[\varphi]_{\Gamma} \delta(\Gamma), \quad (9)$$

де $grad \varphi = grad \varphi_m, \bar{x} \in \Omega_m$. Враховуючи, що $-k grad \varphi = \vec{j}(\bar{x})$, із (9) отримаємо

$$GRAD_- \varphi = -\rho \vec{j} + \vec{n}[\varphi]_{\Gamma} \delta(\Gamma), \quad (10)$$

де $\rho(\bar{x}) = \sigma^{-1}(\bar{x})$ має зміст питомого опору середовища. Користуючись (5), виключимо з (10) стрибок розв'язку

$$-GRAD_- \varphi = \rho \vec{j} - \vec{n} g(\bar{x})|_{\bar{x} \in \Gamma} \delta(\Gamma). \quad (11)$$

Рівняння можна трактувати як узагальнений локальний закон Ома, сформульований для розривного потенціалу. Приєднуючи до (11) узагальнений закон збереження заряду

$$-DIV_+ \vec{j} = 0, \quad (12)$$

отримаємо формулювання задачі електропереносу у вигляді системи рівнянь (11), (12) першого порядку в узагальнених похідних.

4. Обчислювальний алгоритм і результати розрахунків. Обмежимося побудовою різницевої схеми для одновимірної тестової задачі електропереносу з розривним розв'язком типу зворотного стрибка. Розглянемо одновимірний варіант узагальненої постановки (11), (12) задачі електропереносу

$$-\frac{dj}{dx} = 0; \frac{D_- \varphi}{Dx} = -\rho j + [\varphi]_{\xi} \delta(x - \xi), \quad (13)$$

$$0 < x < l; \varphi(0) = 0, \varphi(l) = u_0$$

де $\xi \in (0, l)$ - границя між металом і плазмою, $[\varphi]_{\xi}$ - заданий стрибок потенціалу на границі контакту середовищ. При $\rho(x) = \rho_1 = \text{const}, 0 < x < \xi$, $\rho(x) = \rho_2 = \text{const}, \xi < x < l$ задача (13) має простий аналітичний розв'язок:

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\omega x, & 0 < x < \xi, \\ -a(\rho_1 \xi + \rho_2(x - \xi)) + [\varphi]_\xi, & \xi < x < l; \end{cases} \quad (14)$$

де $\omega = \frac{[\varphi]_\xi - u_0}{\rho_1 \xi + \rho_2(l - \xi)}$. Користуючись інтегро-

інтерполяційним методом [10], на сітці $x_i = ih$ отримаємо наступну різницеву схему

$$\frac{1}{h} \left[a_{i+\frac{1}{2}} \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h} - a_{i-\frac{1}{2}} \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h} \right] = f_i, \quad (15)$$

$$i = \overline{1, N-1}; \quad \varphi_0 = 0, \quad \varphi_N = 0;$$

де $a_{i+\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho(x) dx \right]^{-1}$. Нехай

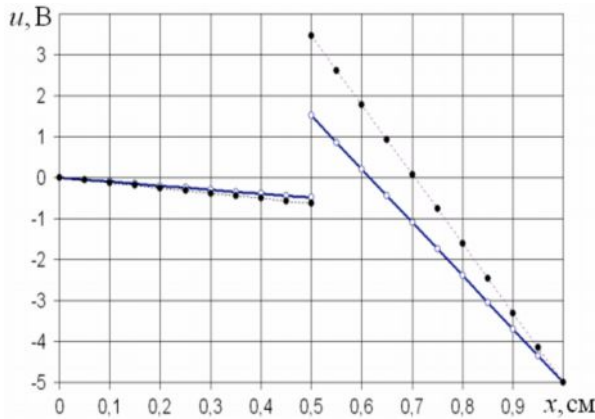


Рис. 2. Розподіл потенціалу при лінійній і нелінійній постановках задачі електропереносу (○ - чисельний розв'язок лінійної задачі, • - чисельний розв'язок нелінійної задачі)

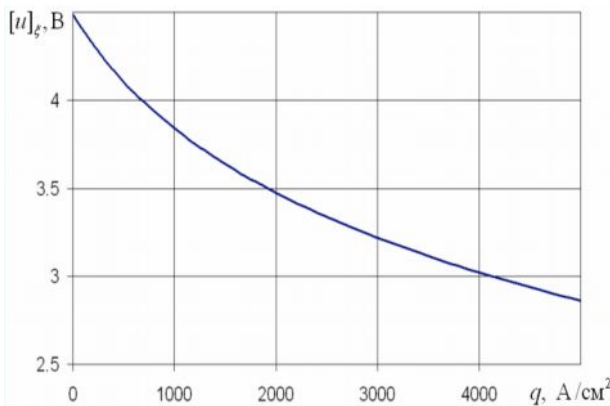


Рис. 3. Залежність анодного падіння потенціалу від щільності струму.

$\xi \in [x_m, x_{m+1}]$ тоді, $f_i = 0, i \neq m, m+1, f_i = 0, i \neq m, m+1, f_m = \phi_m, f_{m+1} = -\phi_m$, де

$$\phi_m = a_{m+\frac{1}{2}} \frac{[\varphi]_\xi}{h^2}.$$

Схема (15) у класі кусково-постійних коефіцієнтів є точною. Розрахунки велись при наступних числових значеннях параметрів задачі: $[\varphi]_\xi = 2 \text{ В}$, $\rho_1 = 0,0025 \text{ Ом} \cdot \text{см}$, $\rho_2 = 0,0333 \text{ Ом} \cdot \text{см}$, $u_0 = -5 \text{ В}$, $l = 1 \text{ см}$, $\xi = 0,5 \text{ см}$.

На рис. 2 представлено чисельний розв'язок задачі (13) в лінійній ($[\varphi]_\xi$ задано як параметр) і нелінійній постановках ($[\varphi]_\xi$ визначається залежністю (2) стрибка потенціалу від щільності струму j , функціональний вигляд якої наведений в [11], а числові характеристики показані на рис. 3.). Суцільними лініями на рис. 2 показаний точний розв'язок лінійної задачі

Нелінійна сіткова задача розв'язувалася методом ітерацій таким чином, що на кожному кроці ітераційного процесу розв'язувалася лінійна задача (15).

При чисельному моделюванні електромагнітних процесів в умовах дугового заварювання задача електропереносу в системі «дугова плазма-анод» стає багатовимірною. Із достатньо хорошим наближенням електричне поле в даній системі можна вважати осісиметричним. Область розв'язання задачі для такого випадку та відповідні граничні умови наведені на рис. 4, а результати розрахунків електричного поля та анодного стрибка потенціалу на рис. 5, 6.

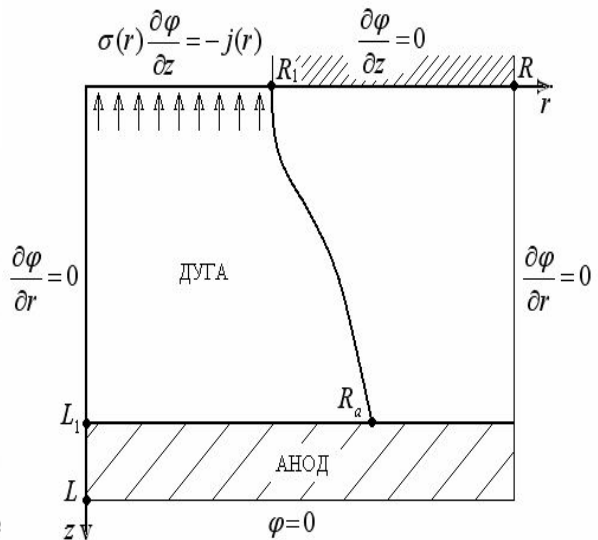


Рис. 4. Схема системи «дуга-анод».

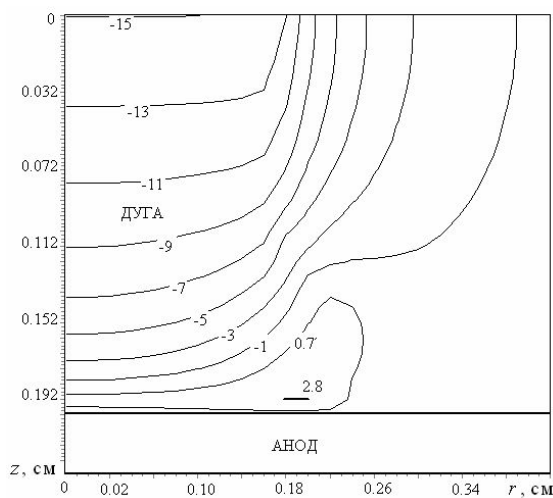


Рис. 5. Розподіл електричного потенціалу у прианодній зоні дугової плазми.

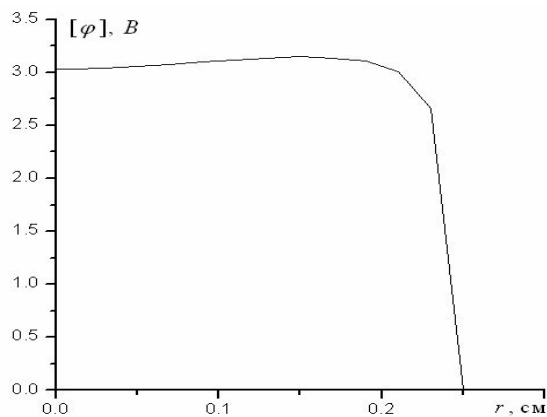


Рис. 6. Розподіл анодного стрибка потенціалу.

На завершення відзначимо, що викладена у цій роботі задача електропереносу є однією із складових самоузгодженої (замкнутої) моделі фізичних процесів, що перебігають в стовпі зварювальної дуги й електроді при електродуговому зварюванні плавким електродом.

ЛІТЕРАТУРА

1. Молчанов И.Н., Николенко Л.Д. Вариационный метод в некоторых краевых задачах с разрывным решением. // Численный анализ. Киев: Ик Ан УССР. 1984 – С. 71 – 83.
2. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – К.: Наукова думка, 2001. – 615с.
3. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Модели и методы решения задач в неоднородных средах. – К.: Наукова думка, 2001. – 606с.
4. Ляшко И.И., Демченко В.Ф., Демченко Л.И. Численное моделирование процессов Тепло- и массопереноса. – Киев: УМК Во, 1988. 164с.
5. Демченко В.Ф., Демченко Л.И., Зельниченко А.Т. Разностная схема сквозного счета для стационарного уравнения теплопроводности в многослойных средах с неидеальным контактом. Вычислительная и прикладная математика 1980. Вып. 40. С. 122-130.
6. Номировский Д.А. Обобщенная разрешимость параболических систем с неоднородными условиями сопряжения типа неидеального контакта. Дифференциальные уравнения. 2004, Т. 40, №10. С. 1390-1399.
7. Dinulescu, H. A. & Pfender, E. Analysis of the anode boundary layer of high intensity arcs. *J. Appl. Phys.* 1980, 51, 3149-3157.
8. Krivtsun, I. V. Model of evaporation of metal in arc, laser and laser-arc welding. *The Paton Welding J.*, 2001, No. 3, 2-9.
9. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.

пост. 13.05.08

Математическое моделирование местного отпуска цилиндрических изделий переменного сечения

И.А.ПАВЛЮЧЕНКОВ, И.К.КАРИМОВ, М.В.БАБЕНКО, М.Г.РЕЗНИКОВ, Д.М.РЕЗНИКОВ

Днепродзержинский государственный технический университет

Предложены математическая модель и алгоритм численного моделирования теплового состояния изделия, состоящего из двух цилиндров разных диаметров, в условиях локального теплоподвода и ограничении скорости изменения температуры в области сварного шва.

Запропоновані математична модель і алгоритм чисельного моделювання теплового стану виробу, що складається з двох циліндрів різних діаметрів, в умовах локального теплопідводу і обмеження швидкості зміни температури в області зварного шву.

A mathematical model and algorithm of numeral design of the article thermal state, consisting of two cylinders of different diameters in the conditions of local heat supply and speed limit of temperature change around joint weld have been offered.