і позначимо внутрішній інтеграл помножений на π через

$$|I(s,\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\pi|\omega|R_{\phi}(\omega,\varphi)e^{i2\pi\omega s}d\omega,$$

тоді набирає вигляду: $f(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}I(s,\varphi)d\varphi.$

Висновок

В даній роботі було розглянуто основний метод покращення зображення, методом двох вимірних вейвлет фільтрів, а також застосування прямого і зворотнього перетворення Фур'є для розв'язання задачі томографії. Тим самим ми довели ефективність роботи двох вимірних вейвлет фільтрів, привівши математичну модель зворотнього перетворення Фур'є.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лопата В. А. К истории рентгеновской томографи // Электроника и свіязь. — №5. 2010.— С.236—242.
2. Radon J. Über die Besimmung von Functionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten // Berichte Sächsische Academie der Wissenschaften. — Math.–Phys. Kl. — Leipzig. 1917. — Vol. 69. — P.262—277.
3. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии: Пер. с англ. — М. : Мир. 1990. — 16 с., 255 с.
4. Natterer F., Ritman E. L. Past and future directions in X-ray computed tomography (CT) // Wiley Periodicals. 2002. — vol. 12. — P.175—187.
5. Bracewell R. N. Strip integration in radio astronomy // Aust. J. Phys. 9. 198–217 (1956).
6. Ng R. Fourier slice photography // ACM SIGGRAF. 2005: http://graphics.stanford.edu/papers/fourierphoto/fourierphoto-600dpisubmitted.pdf.
7. Р. М. Луитт Алгоритмы реконструкции с использованием интегральных преобразований // ТИИЭР: Пер. с англ. — 1983. — Т.71. №3. —С.125—147.

пост.22.12.14

Оптимизационные модели с булевыми переменными

А. И. КОСОЛАП, А. А. ДОВГОПОЛАЯ

Украинский государственный химико-технологический университет

В статье использован новый метод точной квадратичной регуляризации для решения задач булевой оптимизации. Такие задачи преобразуются к общим квадратичным задачам. Следующие преобразования сводят квадратичные задачи к максимизации нормы вектора на выпуклом множестве для решения таких задач используются прямо-двойственные методы внутренней точки и метод дихотомии. Множество вычислительных примеров показывают эффективность предложенного метода.

У статті використано новий метод точної квадратичної регуляризації для розв'язання задач булевої оптимізації. Такі задачі перетворюються до загальних квадратичних задач. Наступні перетворення зводять квадратичні завдання до максимізації норми вектора на опуклому множині для розв'язання таких задачь використовуються прямо-двоїсті методи внутрішньої точки та метод дихотомії. Безліч обчислювальних прикладів показують ефективність запропонованого методу.

In this the paper we used a new method of exact quadratic regularization for solving Boolean optimization. Such problems are converted to a general quadratic problems. The following transformations reduce the problem to maximize the quadratic norm of a vector on a convex set for such tasks we used a primal-dual interior point method and the dichotomy. Many computational examples are provided to show the effectiveness of the proposed method.

Введение в проблему. Моделирование сложных систем приводит к большому разнообразию многоэкстремальных задач, которые относятся к классу NP-сложных. Среди этого класса задач важное место занимают системы в которых необходимо выбрать наилучшие решения из множества альтернативных вариантов. Такие задачи относятся к комбинаторным. Однако в настоящее время не существуют эффективные методы решения для такого класса задач. Методы ветвей и границ позволяют находить эффективные решения для размерностей меньше 100. Дальнейшее увеличение размерности приводит к экспоненциальному росту времени решения. В последнее время для решения задач с булевыми переменными используются методы глобальной оптимизации. Разработано много различных методов для их решения [1]. Преобладают стохастические методы. Эти методы не гарантируют получение точки глобального минимума. Они позволяют найти точку глобального минимума только с некоторой вероятностью. Значительные проблемы возникают при использовании этих методов, когда задача имеет сложную структуру ограничений. Данные методы могут использоваться для решения оптимизационных задач при отсутствии эффективных детерминированных алгоритмов. Детерминированные методы для некоторых задач гарантируют получение точки глобального минимума с заданной точностью. Естественно, что они могут использоваться и в общем случае, но требуют для этого экспоненциального времени. В работе используется новый метод точной квадратичной регуляризации.

Постановка задачи и метод ее решения. Многие задачи проектирования сложных систем, рыночной экономики, техники, управления производством, компьютерных технологий и др., в которых необходимо найти наилучшие решения из множества возможных альтернатив, могут быть сведены к задачам оптимизации с булевыми переменными

$$\min\{f_0(x) \mid f_i(x) \le 0, i=1,\dots,m, x = 0 \vee 1, x \in E^n\} \quad (1)$$

где все функции $f_i(x)$, как правило, линейные или квадратичные, а E^n – евклидовое пространство.

Булевые переменные удовлетворяют условию $x(x-1)=0$. Это условие позволяет преобразовать задачу (1) к непрерывной оптимизации

$$\min\{f_0(x) \mid f_i(x) \le 0, i=1,\dots,m, \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i-1)=0, x \in [0,1]\} \quad (2)$$

Задача (2) является многоэкстремальной, так как содержит квадратичное ограничение-равенство. Для ее решения будем использовать метод точной квадратичной регуляризации [3]. Этот метод позволяет преобразовать задачу (2) к виду

$$\max\{\|z\|^2 \mid f_0(x)+s+(r-1)\|z\|^2 \le d, f_i(x)+r\|z\|^2 \le d,$$
$$i=1,\dots,m, \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i-1) \le 0, -\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i-1)+r\|z\|^2 \le d, x \in [0,1]\} \quad (3)$$

где $z_i = x_i$, $i=1,\dots,n$, $z=(z_1,\dots,z_{n+1})$. Параметр s удовлетворяет условию $f_0(x^*)+s \ge \|x^*\|^2$ (x^* – решение задачи (2)), а значение $r > 0$ должно быть таким, чтобы все функции в ограничениях задачи (3) были выпуклыми. Если все функции задачи (1) линейные, то достаточно взять $r = 2$.

Таким образом, задача (1) сведена к максимизации квадрата нормы вектора на выпуклом множестве. В задаче (3) необходимо найти минимальное значение переменной d, для которой выполняется условие $r\|z\|^2 = d$. Задача (3) решалась модифицированным методом внутренней точки [2] при фиксированных значениях переменной d. При увеличении переменной d значение $r\|z\|^2$ растет, поэтому минимальное значение d, при котором выполняется условие $r\|z\|^2 = d$, находим методом дихотомии. Найденное решение уточнялось вариацией параметра r и локальным поиском.

Численные эксперименты. Были проведены многочисленные эксперименты с задачами о ранце

$$\max\{p^T x \mid a^T x \le b, x = 0 \vee 1\}, \quad (4)$$

где p – вектор стоимости выбранных товаров, a – определяет их вес, а b – ограничение по весу. Эта задача относится к классу NP-сложных [2]. Решение методом точной квадратичной регуляризации проводилось для значений n = 50÷150 и сравнивалось с результатами решения методом ветвей и границ. Для этой размерности задач метод ветвей и границ только в 17% случаев позволил найти оптимальное решение задачи (4). Метод точной квадратичной регуляризации с локальной коррекцией решения в 98% нашел оптимальное решение. Количество решенных задач равнялось 50. Некоторые результаты решенных задач приведены ниже в *таблице 1*, где EQR – значение, полученное с помощью метода точной квадратичной регуляризации; PR – значение, полученное при помощи метода ветвей и границ, *b* – заданная константа, upper bound – глобальный максимум без условия булевости переменных (верхняя граница).

Таблица 1. **Решение тестовых задач методом точной квадратичной регуляризацией**

№ п/п	EQR	PR	*b*	upper bound
1	1387	1349	800	1387,66
2	869	862	480	890,538
3	1298	1298	500	1304,79
4	946	946	400	948,481
5	970	970	500	982,999
6	1225	1225	600	1469,99
7	1662	1616	800	1667,31
8	2020	2020	1000	2022,33
9	1438	1433	600	1446,07
10	1355	1351	540	1361,4
11	794	794	490	813,706
12	683(q>0)	455	440	708
13	1382	1412 (g>b)	620	1428,67
14	867	863	550	875,235
15	918	918	620	929,4
16	1558	1556	630	1564,72
17	892	886	650	895,286
18	1822	1822	876	1827
19	768(q>0)	768	350	775,791
20	960(q>0)	960	490	966,308
21	2285	2284	1620	2288,26
22	1272(q>0)	1236	784	1278
23	1328	1288 (g>b)	572	1334,56
24	1599(q>0)	1592	692	1607,16
25	1142	1144	702	1144,39

В задачах 12, 19, 20, 22, 24 (см. *табл.1*), лучшее решение находилось при преобразовании задачи (3) к виду

$$\max\{\|z\|^2 \mid f_0(x)+q\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i-1)+s+(r-1)\|z\|^2 \le d,$$
$$f_i(x)+r\|z\|^2 \le d, i=1,\dots,m, x \in [0,1]\},$$

где q – штрафной параметр, выбирался в численных экспериментах равным 100.

При решении задач 13 и 23 методом ветвей и границ точное решение не возможно найти, так как не выполнялось ограничение задачи (4).

Рассмотренная методика решения задач с булевыми переменными позволяет решать задачи вида (1) с большими размерностями 1000 и более переменных, так как метод точной квадратичной регуляризации использует только локальный поиск.

Выводы

В работе приведена новая методика для решения комбинаторных задач с булевыми переменными. Эти задачи преобразовывались к многоэкстремальным. Для решения полученной многоэкстремальной задачи использовался новый метод точной квадратичной регуляризации с локальной коррекцией решения. Эффективность нового метода проверена на многочисленных экспериментах. В этих экспериментах в 98% случаях этим методом найдено оптимальное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gray P. A survey of global optimization methods / W. Hart, L. Painton, C. Phillips: [Электрон. ресурс]. — Режим доступа: — WWW: http://www.cs.sandia.gov/opt/survey/.
2. Encyclopedia of Optimization / editors C. A. Floudas, P.M. Pardalos. — Springer. 2009. — 4646 p.
3. Косолап А. И. Методы глобальной оптимизации / А. И. Косолап. — Дн-ск : Наука и образование. 2013. — 316 с.
4. Martello S. Knapsack problems: algorithms and computer implementation / S. Martello, P. Toth. — Chichester : John Wiley & SONS. 1990. — 296 p.

пост.12.01.15