

## Математичне моделювання збуреного руху зчленованого спецавтотранспортного засоба з U-подібною вантажною рамою

О. О. БЕЙГУЛ, М. М. КОРНІЙЧУК, Г. Л. ЛЕПЕТОВА

Дніпродзержинський державний технічний університет

Розроблена математична модель збуреного руху зчленованого спецавтотранспортного засоба з U-подібною вантажною рамою для транспортування контейнерів в умовах технологічних доріг.

Разработана математическая модель возмущённого движения сочленённого автотранспортного средства с U-образной грузовой рамой для транспортирования контейнеров в условиях технологических дорог.

The mathematical model of indignant motion for articulated special motor transport with U-similar weight lifting frame for container transportation on technological roads has been worked out.

**Постановка проблеми.** Перспектива розвитку механізації транспортних операцій у технологічних лініях металургійного виробництва тісно пов'язана з постановкою нових задач, для розв'язання яких потрібні нові транспортні засоби, часто нетрадиційних компоновок. Так, для виконання операцій, пов'язаних з автономним навантаженням, транспортуванням, розвантаженням та складуванням контейнерів, пакетованих вантажів на піддонах ефективним вважається технологічний спецавтотранспорт з U-подібною рамою. У плані науково обгрунтованого вибору параметрів таких несучих систем вирішальну роль відіграють динамічні навантаження, які характеризуються певними коефіцієнтами динамічності. Динаміку навантаження будемо розглядати на шляху дослідження та вивчення збуреного руху зчленованого спецавтотранспортного засоба з U-подібною рамою.

**Аналіз досліджень та публікацій.** Зчленований спецавтотранспортний засіб з U-подібною рамою вписується в розрахункову схему дволанкового автопоїзда, який під час руху по нерівностях технологічних доріг здійснює складні коливання. Питанням динаміки дволанкових транспортних систем приділяється увага у ряді наукових праць [1–3], де висвітлюються вимушені коливання, визначаються критерії стійкості руху.

**Нерозв'язана частина загальної проблеми.** Вище згадані наукові праці, присвячені динаміці дволанкових транспортних систем, не враховують компоновочні та конструктивні особливості зчленованої машини з U-подібною рамою, яка експлуатується в умовах технологічних перевезень.

**Мета роботи,** таким чином, полягає у розробці математичної моделі збуреного руху зчленованого автотранспортного засоба з U-подібною рамою з урахуванням компоновочних та конструктивних особливостей та специфіки умов експлуатації у технологічних лініях металургійних підприємств.

**Виклад основного матеріалу.** Схема зчленованого спецавтотранспортного засоба з U-подібною рамою подана на рис. 1, де використані наступні позначення та характерні розміри: 1 – трактор-тягач; 2 – напівпричіп з U-подібною рамою; 3 – контейнер;  $l_1$  – горизонтальна проекція відстані від переднього моста трактора до його центра маси;  $l_2$  – горизонтальна проекція відстані від заднього моста трактора до його центра маси;  $l_3$  – горизонтальна проекція відстані від опорного вузла до заднього моста трактора;  $l_4$  – гори-

зонтальна проекція відстані від опорного вузла до центра маси напівпричепа з контейнером;  $l_5$  – горизонтальна проекція відстані від осі напівпричепа до його центра маси.

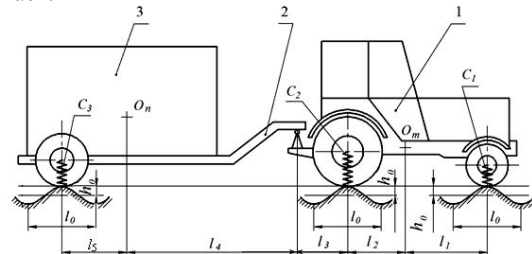


Рис. 1. Схема зчленованого спецавтотранспортного засоба з U-подібною рамою

Диференціальні рівняння коливань у збуреному русі отримуємо у формі рівняння Лагранжа другого роду [4]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j=1,2,3), \quad (1)$$

де  $T$  – кінетична енергія системи, Дж;  
 $\Pi$  – потенціальна енергія системи, Дж;  
 $q_j$  –  $j$ -а узагальнена координата.

Відповідно розрахунковій схемі приймаємо наступні узагальнені координати:  $y$  – вертикальне переміщення центра маси трактора-тягача;  $\phi_1$  – кут повороту трактора-тягача відносно поперечної осі, яка проходить через його центр маси, у поздовжній площині;  $\phi_2$  – кут повороту напівпричепа відносно поперечної осі, яка проходить через опорний вузол.

Кінетична енергія приймає наступний вигляд:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [\dot{y} - (l_2 + l_3) \dot{\phi}_1 - l_4 \dot{\phi}_2]^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\phi}_2^2, \quad (2)$$

де  $m_1$  – маса трактора-тягача, кг;  
 $m_2$  – маса напівпричепа з U-подібною рамою з контейнером, кг;  
 $I_1$  – момент інерції трактора-тягача відносно поперечної осі, яка проходить через його центр маси, кг·м<sup>2</sup>;

$I_2$  – момент інерції напівпричепа з контейнером відносно поперечної осі, яка проходить через опорний вузол, кг·м<sup>2</sup>.

Потенціальна енергія приймає наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2}C_1(y + l_1\varphi_1 - h_1)^2 + \\ & + \frac{1}{2}C_2(y - l_2\varphi_1 - h_2)^2 + \\ & + \frac{1}{2}C_3[y - (l_2 + l_3)\varphi_1 - (l_4 + l_5)\varphi_2 - h_3]^2, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $C_1$  – сумарний коефіцієнт жорсткості передньої підвіски трактора-тягача, Н/м;

$C_2$  – сумарний коефіцієнт жорсткості задньої підвіски трактора-тягача, Н/м;

$C_3$  – сумарний коефіцієнт жорсткості підвіски напівпричепа, Н/м;

$h_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – висота нерівностей технологічної дороги під відповідною підвіскою, м.

Використовуючи дії у відповідності з рівнянням Лагранжа другого роду, отримуємо систему диференціальних рівнянь, яка описує динаміку збуреного руху зчленованого спецавтотранспортного засоба з U-подібною рамою:

$$\begin{aligned} & (m_1 + m_2)\ddot{y} + (C_1 + C_2 + C_3)y - \\ & - m_2(l_2 + l_3)\ddot{\varphi}_1 + \\ & + [C_1l_1 - C_2l_2 - C_3(l_2 + l_3)]\dot{\varphi}_1 - m_2l_4\ddot{\varphi}_2 - \\ & - C_3(l_4 + l_5)\dot{\varphi}_2 = \\ & = C_1h_1 + C_2h_2 + C_3h_3, \\ & - m_2(l_2 + l_3)\ddot{y} + \left[ \begin{array}{l} C_1l_1 - C_2l_2 - \\ - C_3(l_2 + l_3) \end{array} \right] \dot{y} + \\ & + [l_1 + m_2(l_2 + l_3)^2]\ddot{\varphi}_1 + \\ & + [C_1l_1^2 + C_2l_2^2 + C_3(l_2 + l_3)^2]\dot{\varphi}_1 + \\ & + m_2l_4(l_2 + l_3)\ddot{\varphi}_2 + \\ & + C_3(l_2 + l_3)(l_4 + l_5)\dot{\varphi}_2 = C_1l_1h_1 - \\ & - C_2l_2h_2 - C_3(l_2 + l_3)h_3, \\ & - m_2l_4\ddot{y} - C_3(l_4 + l_5)\dot{y} + \\ & + m_2l_4(l_2 + l_3)\ddot{\varphi}_1 + \\ & + C_3(l_2 + l_3)(l_4 + l_5)\dot{\varphi}_1 + (l_2 + m_2l_4^2)\ddot{\varphi}_2 + \\ & + C_3(l_4 + l_5)^2\dot{\varphi}_2 = -C_3(l_4 + l_5)h_3. \end{aligned} \quad (4)$$

Після введення відповідних позначень та розкриття виразів  $h_i$  [5] система диференціальних рівнянь приймає наступний вигляд:

$$\left. \begin{aligned} & a_{11}\ddot{y} + c_{11}\dot{y} + a_{12}\ddot{\varphi}_1 + c_{12}\dot{\varphi}_1 + \\ & + a_{13}\ddot{\varphi}_2 + c_{13}\dot{\varphi}_2 = C_1h_0 \sin(\omega t + \psi_1) + \\ & + C_2h_0 \sin(\omega t + \psi_2) + C_3h_0 \sin(\omega t + \psi_3), \\ & a_{21}\ddot{y} + c_{21}\dot{y} + a_{22}\ddot{\varphi}_1 + c_{22}\dot{\varphi}_1 + \\ & + a_{23}\ddot{\varphi}_2 + c_{23}\dot{\varphi}_2 = C_1l_1h_0 \sin(\omega t + \psi_1) - \\ & - C_2l_2h_0 \sin(\omega t + \psi_2) - \\ & - C_3(l_2 + l_3)h_0 \sin(\omega t + \psi_3), \\ & a_{31}\ddot{y} + c_{31}\dot{y} + a_{32}\ddot{\varphi}_1 + c_{32}\dot{\varphi}_1 + \\ & + a_{33}\ddot{\varphi}_2 + c_{33}\dot{\varphi}_2 = \\ & = -C_3(l_4 + l_5)h_0 \sin(\omega t + \psi_3), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

де

$$a_{11} = m_1 + m_2, \quad c_{11} = C_1 + C_2 + C_3, \quad a_{12} = -m_2(l_2 + l_3),$$

$$c_{12} = C_1l_1 - C_2l_2 - C_3(l_2 + l_3), \quad a_{13} = -m_2l_4,$$

$$c_{14} = -C_3(l_4 + l_5),$$

$$a_{21} = -m_2(l_2 + l_3), \quad c_{21} = C_1l_1 - C_2l_2 - C_3(l_2 + l_3),$$

$$a_{22} = l_1 + m_2(l_2 + l_3)^2, \quad c_{22} = C_1l_1^2 + C_2l_2^2 + C_3(l_2 + l_3)^2,$$

$$a_{23} = m_2l_4(l_2 + l_3), \quad c_{23} = C_3(l_2 + l_3)(l_4 + l_5),$$

$$a_{31} = -m_2l_4,$$

$$c_{31} = -C_3(l_4 + l_5), \quad a_{32} = m_2l_4(l_2 + l_3),$$

$$c_{32} = C_3(l_2 + l_3)(l_4 + l_5),$$

$$a_{33} = l_2 + m_2l_4^2, \quad c_{33} = C_3(l_4 + l_5)^2;$$

$h_0$  – амплітудне значення синусоїди, яка апроксимує нерівності технологічної дороги, м;

$\omega$  – кругова частота кінематичних збурень, 1/с;

$t$  – час, с;

$\psi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – фазові кути відповідних гармонік коливань, рад.

Кругова частота кінематичних збурень визначається наступним чином:

$$\omega = \frac{2\pi v}{l_0}, \quad (6)$$

де  $v$  – швидкість руху, м/с;

$l_0$  – довжина синусоїди, яка апроксимує нерівності технологічної дороги, м.

Як це витікає з рис. 1,

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = -\frac{2\pi}{l_0}(l_1 + l_2),$$

$$\psi_3 = -\frac{2\pi}{l_0}(l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5).$$

Шляхом простих тригонометричних перетворень та введення нових позначень систему рівнянь (5) зводимо до наступної:

$$\left. \begin{aligned} & a_{11}\ddot{y} + c_{11}\dot{y} + a_{12}\ddot{\varphi}_1 + c_{12}\dot{\varphi}_1 + a_{13}\ddot{\varphi}_2 + \\ & + c_{13}\dot{\varphi}_2 = H_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t; \\ & a_{21}\ddot{y} + c_{21}\dot{y} + a_{22}\ddot{\varphi}_1 + c_{22}\dot{\varphi}_1 + a_{23}\ddot{\varphi}_2 + \\ & + c_{23}\dot{\varphi}_2 = H_2 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t; \\ & a_{31}\ddot{y} + c_{31}\dot{y} + a_{32}\ddot{\varphi}_1 + c_{32}\dot{\varphi}_1 + a_{33}\ddot{\varphi}_2 + \\ & + c_{33}\dot{\varphi}_2 = H_3 \sin \omega t + B_3 \cos \omega t \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Задача, таким чином, поділяється на дві: перша розглядає синусоїдальні збурення, друга – косинусоїдальні. Оскільки має місце лінійна постановка, то ці розв'язання об'єднуються. У першому випадку коливання задаємо у вигляді

$$\left. \begin{aligned} y &= A_1 \sin \omega t, \\ \varphi_1 &= A_2 \sin \omega t, \\ \varphi_2 &= A_3 \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Далі обмежуємось першою складовою вимушених коливань. У такому разі отримуємо наступну алгебраїчну систему рівнянь відносно амплітуд коливань:

$$\left. \begin{aligned} (c_{11} - \omega^2 a_{11})A_1 + (c_{12} - \omega^2 a_{12})A_2 + \\ + (c_{13} - \omega^2 a_{13})A_3 &= H_1, \\ (c_{21} - \omega^2 a_{21})A_1 + (c_{22} - \omega^2 a_{22})A_2 + \\ + (c_{23} - \omega^2 a_{23})A_3 &= H_2, \\ (c_{31} - \omega^2 a_{31})A_1 + (c_{32} - \omega^2 a_{32})A_2 + \\ + (c_{33} - \omega^2 a_{33})A_3 &= H_3. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Система рівнянь (9) розв'язується методом Крамера [6], що виглядає так:

$$A_i = \frac{\Delta_i}{D} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (10)$$

де  $D$  – головний визначник системи рівнянь (9);

$\Delta_i$  – визначник, отриманий з головного визначника шляхом заміни  $i$ -го стовпчика на стовпчик, складений з правих частин системи (9).

Замість позначення  $\omega$  вводимо позначення  $p$ , прирівнюємо головний визначник системи рівнянь (9) нулю, отримуємо частотне рівняння, з якого визначаємо власні частоти коливань динамічної системи зчленованого спецавтотранспортного засоба з U-подібною вантажною рамою:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - p^2 a_{11} & c_{12} - p^2 a_{12} & c_{13} - p^2 a_{13} \\ c_{21} - p^2 a_{21} & c_{22} - p^2 a_{22} & c_{23} - p^2 a_{23} \\ c_{31} - p^2 a_{31} & c_{32} - p^2 a_{32} & c_{33} - p^2 a_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

або після розкриття визначника:

$$b_0 - b_1(p^2)^1 + b_2(p^2)^2 - b_3(p^2)^3 = 0, \quad (12)$$

де коефіцієнти і вільний член витікають з рівняння (11).

### Висновки

Таким чином, досліджена динаміка, розроблена математична модель збуреного руху зчленованого спецавтотранспортного засоба з U-подібною вантажною рамою, яка дає підстави для аналітичного вивчення формування зовнішніх навантажень, сприйняття та передачі внутрішніх зусиль. Відкриті прозорі підходи до проектувальних та перевірочних розрахунків на міцність нетрадиційної компоновки промислового транспорту з U-подібною рамою.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Бейгул В. О., Лєспа І. І., Лєпетова Г. Л. Математична модель збуреного руху системи «буксировщик-автосамоскид» / Системні технології. — Дніпропетровськ: ДНВП «Системні технології», 2006. — Вип. 4 (45). — С. 94—98.
2. Веселов Г. П., Густомьясов А. Н., Колмаков В. И. Аналитическое исследование колебаний системы тягач-прицеп / Известия вузов. Машиностроение. — 1988. — №5. — С. 92—97.
3. Лобас Л. Г., Ващенко Ю. Л. Динамическое поведение двухзвенного автопоезда вблизи границы области устойчивости / Прикладная механика. — 1991. — Т. 27. — № 12. — С. 85—91.
4. Яблонский А. А., Норейко С. С. Курс теории колебаний. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Высшая школа, 1966. — 255 с.
5. Афанасьев В. Л., Хачатуров А. А. Статистические характеристики микропрофиля автомобильных дорог и колебания автомобиля / Автомобильная промышленность. — 1966. — № 2. — С. 23—27.
6. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. — 13-е изд., испр. — М.: Наука, 1986. — 544 с.