

где $P_i(t)$ – вероятность того, что в момент t ЭА будет находиться в состоянии x_i ; M – число подсистем ЭА.

Вероятность нахождения ЭА в момент t в технически исправном состоянии (вероятность безотказной работы):

$$P(t) = \sum_{i=1}^M P_i(t) \cdot \alpha_i = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M P_{0j} \cdot P_{ji} \cdot \alpha_i \quad (20)$$

Уравнение вида (19) может быть компактно переписано в матричном виде:

$$\bar{P}(t) = \bar{P}(0) \cdot \Pi(t), \quad (21)$$

где $\Pi(t)$ – матрица переходов ЭА за период снятия показаний t ; $\bar{P}(0)$ – вектор-строка вида $\bar{P}(0) = (P_{01}, P_{02}, \dots, P_{0M})$.

Тогда выражение (19) может быть получено из (20) по формуле:

$$P(t) = \bar{P}(0) \cdot \Pi(t) \cdot \bar{H},$$

где \bar{H} – вектор-столбец, элементами которого являются вероятности α_i (исправны все подсистемы ЭА).

Таким образом, **математическая модель надежности функционирования ЭА** может быть представлена в следующем виде.

Вероятность перехода ЭА из полностью работоспособного состояния (исправны все подсистемы ЭА) x_i в состояние x_s (неисправна хотя бы одна из подсистем ЭА):

$$P(t_3) = \prod_{v=1}^4 P_v(t_3) \cdot \prod_{\mu=1}^4 [1 - P_\mu(t_3)], \quad (22)$$

где $P_v(t_3)$ – вероятность безотказной работы v -го элемента ЭА из числа не отказавших за время t_3 ;

$1 - P_\mu(t_3)$ – вероятность появления отказа μ -го элемента ЭА за время t_3 .

Следует отметить, что при проверке ЭА на надежность функционирования, могут быть установлены только 2 возможных его состояния: x_1 – исправны все её подсистемы и x_2 – отказала хотя бы одна подсистема. Тогда матрица переходов ЭА как системы за период T_n [2]:

$$\Pi(T_n) = \begin{bmatrix} \prod_{i=1}^N P_i & 1 - \prod_{i=1}^N P_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

где p_i – вероятность безотказной работы i -ой подсистемы в течение времени T_n .

Выводы

1. Сформулирована математическая модель надежности функционирования ЭА.
2. При проверке ЭА на надежность функционирования, могут быть установлены только 2 возможных его состояния: исправны все её подсистемы и отказала хотя бы одна подсистема.

ЛИТЕРАТУРА

1. Червоный А. А. Надежность сложных систем. изд. 2-е, перераб. и доп. / Червоный А. А., Лукьященко В. И. — М.: Машиностроение, 1976. — 288 с.
2. Надежность и эффективность в технике: Справочник в 10 т. Т. 2. Математические методы в теории надежности и эффективности / Под ред. Б. В. Гнеденко, 1987. — 280 с.

пост.13.12.13

Два вида аperiodических колебаний в модели динамики численности популяций анадромных рыб

А. Ю. ПЕРЕВАРЮХА

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАИ

Предложена модель популяции рыб событийно-стадийной структуры, включающая непрерывные и дискретные составляющие. Динамика рассматривалась на основе численного решения последовательности Коши для системы уравнений убыли поколений. Получено отображение, имеющее два локальных экстремума. Установлено появление переходного аperiodического режима при возможности притяжения к двум аттракторам. После бифуркации исчезновения двух не тривиальных стационарных точек возникает интервальной аттрактор, для которого возможно явление граничного кризиса.

Запропоновано модель популяції риб подієво-стадійної структури, що включає неперервні і дискретні складові. Динаміка розглядалася на основі чисельного розв'язання послідовності задач Коші для системи рівнянь спаду поколень, що задає відображення, яке має дві критичні точки. Встановлено виникнення перехідного аperiodического режиму. Після бифуркації зникнення нетривіальної стаціонарної точки виникає хаотичний інтервальный аттрактор, для якого можливо явище граничної кризи.

The article considers the model of a population of fish with event-stage structure, which includes continuous and discrete components. Dynamics of the model was analyzed based on the numerical of Cauchy sequences for the ODE system of wastage generations. Consider the map that has two critical points. Found the appearance of the transition a periodic regime. After the bifurcation of the disappearance of a nontrivial fixed point of the interval occurs chaotic attractor, for which there is a possibility of phenomenon boundary crisis.

Введение. Математические методы моделирования биологических процессов продолжают развиваться в нескольких отдельных междисциплинарных направлениях. Изначально предложения по формализации популяционной динамики заключались в разработке систем дифференциальных уравнений с различного вида правыми частями, отражающими некоторые теоретические предположения о характере взаимодействия биомассы конкурирующих видов.

Интересы рационального планирования масштабной эксплуатации биоресурсов требовали актуального подхода, несвязанного с проблемами аналитического исследования решений ОДУ, но соответствующего появившимся вычислительным мощностям.

В задачах моделирования сообществ гидробионтов в 1970 гг. развивались алгоритмические методы, основанные на исследовании дискретных вычислительных структур с применением ЭВМ. Отечественной школой предложено значительное число разнообразных дискретных моделей для промысловой ихтиологии: В.В. Меншуткина, А.Б. Казанского, В.В. Суханова. Развитием подхода стало создание в ЛИИАН в 1989 г. высокоуровневого языка алгоритмических сетей, предназначенного для описания процесса пользователем в виде ориентированного «функционального» графа операторов.

Возможности модельного описания и прогнозирования популяционных процессов столкнулись с фундаментальными проблемами теории универсальности поведения нелинейных систем [1]. Дискретно-матричные популяционные модели, ориентированные на вычислительные методы исследования, обладают нетривиальными возможностями изменениями поведения с хаотическими и циклическими режимами.

В статье на основе представлений об экологических особенностях воспроизводства анадромных рыб предлагается новая модель динамики численности, обладающая свойством трансформации двух разных видов аperiодического поведения траектории.

Биологическая постановка задачи. В основе моделей эксплуатируемых популяций рыб лежит формализация баланса воспроизводства и смертности от различных факторов. Естественная убыль на ранних этапах жизни у крупных анадромных рыб очень велика и ее изменения критически сказываются на благополучии популяции. Опыт наблюдений показал, что среднее пополнение R от величины родительского запаса S редко удовлетворительно описывается линейным или кусочно-линейным соотношением: $R = f(S) = aS, S < K$ $f(S) = X = cost, S > K$.

Пополнением будем считать численность поколения от одного нереста, дожившего до установленного момента. Для разных видов рыб этот момент может определяться достижением промысловых размеров, прохождением периода смолтификации при адаптации к морскому периоду жизни или окончанием полового созревания.

В ихтиологии возникло направление исследований, объясняющее закономерности изменения эффективности воспроизводства. Целью являлось на основе данных наблюдений определение зависимости для прогнозирования скорости восполнения промысловых запасов. Обобщенная задача представляется противоречивой, т.к. очевидны различия экологиче-

ских особенностей нереста разных рыб и дискуссия о её роли имеет долгую историю.

Нами предполагается, что механизмы определяющие зависимость действуют для рыб с особыми условиями нерестового цикла. Такие рыбы (называемые анадромными) заходят при необходимой температуре в реки и нерестятся на ограниченных по площади пригодных русловых нерестилищах, как крупные лососевые и осетровые. Известно, что при повышенной плотности икры на грунте наблюдается ряд негативных для выживаемости явлений, связанных с гипоксией и токсикозом. Ограниченность пригодных нерестовых участков, например, характерна для волжской севрюги. В период масштабного гидростроительства возводились искусственные нерестилища. Для размножающихся в толще воды рыб успех репродуктивного процесса определяет благоприятное сочетание случайных флуктуаций условий среды, что снижает возможности применения детерминированных моделей.

Концепция моделей воспроизводства заключается в описании лимитирующих факторов $v(S)$, действующих на нерестилищах при повышенной плотности запаса с репродуктивным потенциалом a : $R = aS / v(S)$. У. Рикером предложена экспоненциальная форма $v(S) = e^{bS}$, где b показатель действия лимитирующих факторов. Дж. Шепард обосновал применение зависимости по аналогии с логистической моделью: $v(S) = 1 + (S / K)^b$ где учтена критическая биомасса запаса K . Анализ моделей проводится в виде функциональных итераций $x_{n+1} = f(x_n)$. Для траектории итераций функции Рикера при возрастании a характерно изменение поведения от устойчивого равновесия R^* к хаосу через каскад Фейгенбаума [2]. Аналогично бифуркации удвоения периода цикла наблюдаются для модели Шепарда. Нами показано ранее, что бифуркационные параметры в двух моделях имеют противоположный смысл, что влечет проблему интерпретации результатов моделирования [3].

Аттрактор, возникающий в результате накопления каскада бифуркаций удвоения, является аналогом канторовского множества: замкнутого множества, не содержащего как внутренних, так и изолированных точек. Структурно хаотический аттрактор представляет собой результат объединения всё уменьшающихся субинтервалов, которые составляют точки отрезка за исключением несчетного числа неустойчивых точек всех периодов 2^n и их прообразов. Анализ образования и свойств канторовских множеств является отдельной задачей при исследовании нелинейных дискретных моделей. Теория универсальности изменения поведения отображений, удовлетворяющих критериям теоремы Д. Синжера [4] (SU -отображения), описана достаточно подробно.

Выявление свойства хаотичности важно для оценки адекватности биологических моделей. Обычно для определения хаотичности используется свойство чувствительной зависимости от начальных условий, но на основе работы [5] можно ввести критерий хаотичности отображения отрезка $f: I \rightarrow I$ на основе топологической транзитивности: для всех открытых подмножеств $U \subseteq V, U \neq \emptyset$ и $Y \subseteq V, Y \neq \emptyset \exists n \geq 0$, выполняется $f^n(U) \cap Y \neq \emptyset$, то поведение хаотично.

Помимо хаотизации и соответственно эффекта экспоненциального разбегания близких траекторий в отобра-

жениях возможны другие нелинейные эффекты, связанные с окнами периодичности. Отметим, что нелинейные эффекты в динамике делают проблематичной сущностную интерпретацию поведения дискретных популяционных моделей, в особенности не относящихся к SU -семейству.

Сведения о воспроизводстве севрюги и горбуши показали, что наблюдается выраженная неунимодальная зависимость с двумя высокими диапазонами эффективности воспроизводства, между которыми существует промежуток численности запаса, при котором для популяции характерна низкая способность к восстановлению. С биологической точки зрения можно обосновать предположение, что характер зависимости является следствием различия факторов смертности на разных этапах развития молоди рыб.

Описание новой модели. Физиологи выделяют стадии развития молоди по мере формирования органов и характера передвижения. Можно предположить, что изменения происходят по мере размерного развития за счет питания особей, скорость которого представим в уравнении обратно пропорциональной плотности:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{g}{N^k(t) + l}, k < 1, \quad (1)$$

где g – параметр объема доступных кормовых ресурсов, l – учитывает ограничение скорости развития не связанное с плотностью. Важнейшие изменения, как переход на активное питание и начало самостоятельной миграции можно считать событиями в динамике поколения, что позволит выделить стадии: D_1, D_2, D_3 . Таким образом, имеются основания для применения гибридной структуры модели, со структурой, изменяемой при достижении некоторых выделяемых предикатами событий.

Предложение по формализации процесса формирования пополнения заключается в описании убыли начальной численности поколения от вылупления из икринок дифференциальным уравнением на промежутке времени $[0, T]$ в явном виде учитывающих разные факторы смертности и её изменение по мере развития особей:

$$\frac{dN}{dt} = \begin{cases} -(\alpha w(t)N(t) + U\beta)N(t), & t < \tau \\ -(\alpha_1 N(\tau) / w(\tau) + \beta)N(t), & t > \tau, \quad w(t) < w_{D2} \\ -\alpha_2 w(t)N^2(t), & w(t) < w_{D3}, \end{cases} \quad (2)$$

где α – коэффициент зависящей от плотности компенсационной смертности; β – коэффициент нейтральной убыли. От абстрактного «репродуктивного потенциала» разумно перейти к естественному показателю средней плодовитости λ , оцениваемой по данным мониторинга, т.к. у осетровых нет половых хромосом, и дифференциация происходит эпигамно. Начальные условия для уравнений (1),(2): $w(0) = w_0, N(0) = \lambda S$. Время τ – длительность первой стадии с эндогенным питанием, для севрюги в среднем составляет 8 суток. w_D – условный уровень развития, при достижении которого меняется действие факторов смертности, что интерпретируется экологией обитания молоди при начале самостоятельной миграции. Логично, что интервал уязвимости не является

постоянным и может растягиваться при замедлении скорости развития.

По данным о воспроизводстве волжской севрюги выявлено действие отрицательного эффекта группы (известного в литературе как «Allee effect»), когда при низкой плотности уменьшается вероятность встреч на нерестилищах, что сильно сокращает продуктивность нереста. Потому в правую часть (2) для D_1 вводится функция $U(S)$, которая быстро стремится к единице: $E(U) = [2, 1)$, т.к. эффект не может проявляться при исторически оптимальной для промысловой популяции численности запаса:

$$U(S) = 1 + \exp(-cS^2), \quad (3)$$

где параметр $c < 1$ определяет степень выраженности эффекта. ОДУ (1), набор правых частей (2) с (3) формируют непрерывно-дискретную вычислительную структуру.

Особенности представления модели. Особенности дискретно-событийного подхода составляют переходы, которые происходят между состояниями моделируемой системы согласно графу всех возможных состояний. В применяемом методе на основе гибридного автомата переключение реализуется между режимами изменения состояния. Режимам изменения сопоставлен набор форм правой части системы ОДУ из (2), алгоритм контроля предикатов определяет выбор решаемой в данный момент задачи Коши с инициализацией новых начальных условий. Промежуток интервала уязвимости разбит на последовательность кадров гибридного времени в инструментальной вычислительной среде AnyLogic. Алгоритмическое представление модели реализуется на основе автомата с таймированными и предикативными переходами. Множество решений задач Коши для допустимых $S \in \mathbb{Z}^+$ определит интересующую нас зависимость, называемую в работах ихтиологов «кривой воспроизводства» популяции.

Результаты вычислительного исследования. В вычислительной среде получена неунимодальная «волнообразная» зависимость $R = \varphi(S)$ запаса и пополнения, о причинах наблюдения которой для крупных рыб писал Рикер в [6]. Зависимость (рис. 1) без учета действия промысловой смертности характеризуется четырьмя нетривиальными стационарными точками $R_i^*, i = 1 \dots 4$, пересечениями кривой с биссектрисой координатного угла $R = S$.

График второй итерации $\varphi(\varphi(S)) \equiv \varphi^2(S)$ показал устойчивость четвертой точки наряду с устойчивостью $R = 0$. Для дискретной динамической системы $R_{n+1} = \varphi(R_n)$ возможны качественно различные варианты поведения в зависимости от вычисленного значения функции в двух точках локальных экстремумов $\min \varphi(R), \max \varphi(R), R_1^* < R < R_3^*$. Наибольший практический интерес представляет выполнение условий: $\varphi(R_{\max} \pm \epsilon) > R_3^*, \varphi(R_{\min} \pm \epsilon) < R_1^*$. При выполнении условий в вычислительных экспериментах фиксируется образование в фазовом пространстве объекта, относящегося к разновидности непритягивающих хаотических множеств.

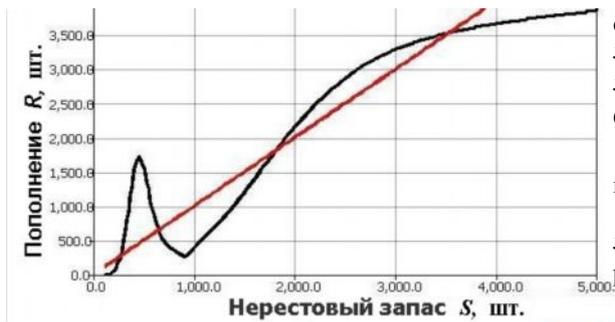


Рис. 1. $\varphi(R)$ с четырьмя стационарными точками.

Если для динамической системы существует два аттрактора, то при исследовании необходимо определить границу их областей притяжения. В про-

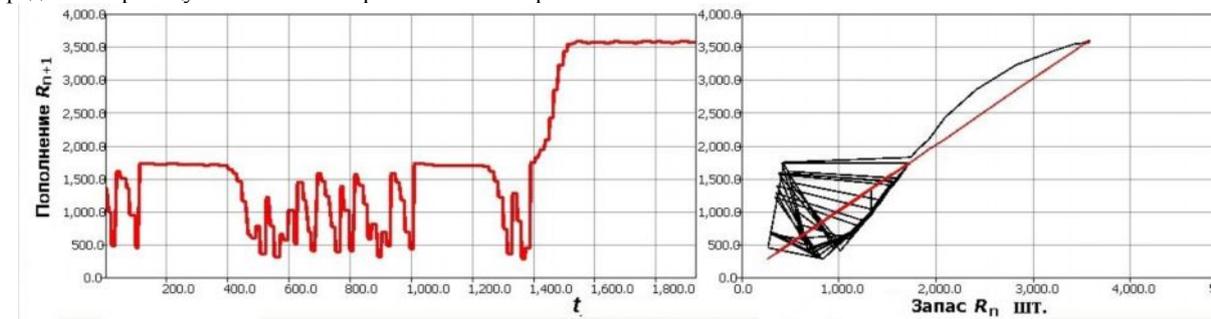


Рис. 2. Выход траектории из режима переходного хаоса (временная и фазовая диаграммы).

При рассмотрении в модели увеличения промышленной смертности изменяется конфигурация стационарных точек. Для динамической системы возможна обратная касательная бифуркация: слияние R_3^*, R_4^* с исчезновением стационарной точки, при сохранении оставшихся R_1^*, R_2^* . В таком случае возможны два варианта, определенные смещением значением $\varphi_1(R_{\min})$ в точке минимума измененной зависимости (рис. 3). При выполнении условия $\varphi_1(R_{\min}) > R_1^*$ траектории притягиваются к интервальному аттрактору, неустойчивая точка R_1^* служит границей с областью притяжения тривиального равновесия (рис. 4). Тогда после обратной касательной бифуркации траектория моментально переходит к устойчивому аperiodическому режиму, что соответствует колебаниям в диапазоне низкой численности популяции без возможности восстановления. Подобная ситуация из-за последствий длительного перелола наблюдается сейчас с осетровыми Каспия, где промысел не был остановлен своевременно.

стейшем случае границей является неустойчивая «репеллерная» точка. В рассматриваемом случае границу составляет все множество прообразов неустойчивых точек R_1^* . Обе области притяжения в локальном диапазоне $[R_1^*, R_3^*]$ представляются несвязным объединением малых интервалов.

Канторовская структура границы приводит к появлению длительного переходного хаотического режима, реализующегося до момента $\varphi^z(R_0) > R_3^*$ (или $\varphi^z(R_0) < R_1^*$), достижение которого означает стремительное развитие неожиданной «вспышки» численности (рис. 2) популяции, что отмечалось для горбуши. Число итераций z пребывания траектории в переходном аperiodическом режиме чувствительно зависит от выбора начальных условий [7].

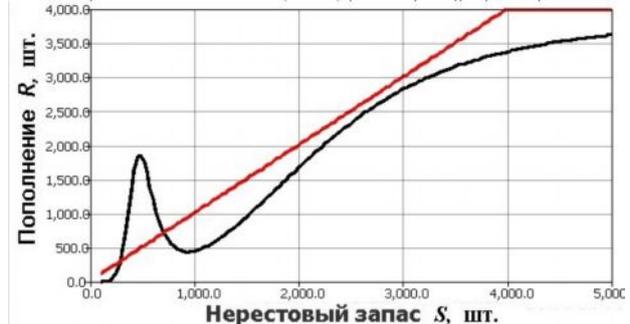


Рис. 3. $\varphi(R)$ после обратной касательной бифуркации.

В момент достижения $\varphi_1(R_{\min}) < R_1^*$ происходит граничный кризис интервального аттрактора [8]. При подобном кризисе аттрактор соприкасается с границей, теряет свойство инвариантности при сохранении локально-несвязной структуры у вновь появившегося непритягивающего хаотического множества типа «хаотическое седло» по классификации Гребоджи [9]. Единственным аттрактором остается тривиальное равновесие, что описывает неминуемую деградацию популяции после короткого переходного аperiodического режима флуктуаций.

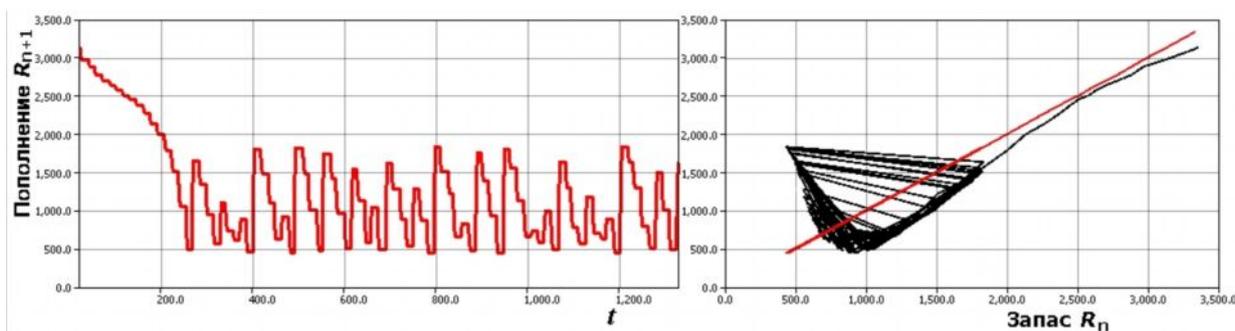


Рис. 4. Притяжение траектории к интервальному аттрактору (временная и фазовая диаграммы).

Выводы

Разработанная модель формирования пополнения позволят описывать зафиксированные в ряде случаев [10] для промысловых популяций горбуши тихоокеанского побережья Канады изменения, связанные с существованием двух уровней численности популяции: низкого и высокой. При низкой численности популяция испытывает резкие флуктуации, но существует перспектива восстановления высокой численности при прекращении промысла. В режиме переходного хаоса мы не можем предсказать, к какому из альтернативных аттракторов в результате устремится траектория и данное свойство определяется как неопределенность относительно асимптотического состояния динамической системы.

При исследовании модели установлена возможность трансформации двух различных хаотических режимов при касательной бифуркации, переходного и устойчивого, связанного с интервальным аттрактором. Данная трансформация интерпретируется как последствие усиления промыслового давления и влечет длительное пребывание популяции в неблагоприятном для промысла состоянии.

Основная идея практического применения разработанных систем непрерывно-дискретных уравнений состоит в организации набора вычислительных модельных сценариев для анализа эффективности эксплуатации водных биоресурсов с учетом представлений теории этапности развития рыб [11].

Условием применения подхода является представление «стратегии» природопользования, вырабатываемой экспертами согласно некоторым внутренним правилам, применяемой для достижения приоритетной цели. Формирование сценариев на основе моделей теории восполнения запасов даст возможность рассматривать не просто динамику отдельной популяции, но оценить концептуальные стратегии управления с точки зрения возрастания экологических рисков и регулярно отмечаемых явлений «коллапсов» рыбных запасов. Своевременное снижение доли изъятия и предосторожный подход оказывается экономически эффективнее стратегии максимизации вылова, так как большие потери приносит всей экономике региона вынужденно вводимый мораторий на промы-

сел в случае подрыва способности биоресурсов к самовосстановлению.

Выполненные исследования поддержаны грантом РФФИ № 13-07-00925.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Б. Вул, Я. Г. Синай, К. М. Ханин Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // Успехи математических наук, 1984. Т. 39. вып.3. С. 3—37.
2. М. Фейгенбаум Универсальность в поведении нелинейных систем // Успехи физических наук, 1983. Т.141. вып. 2. С. 343—374.
3. А. Ю. Переварюха Интерпретация поведения моделей динамики биоресурсов и моментальная хаотизация в новой модели // Нелинейный мир, 2012. № 4. С. 255—261.
4. D. Singer Stable orbits and bifurcations of the maps on the interval // SIAM journal of applied math, 1978. V. 35. P. 260—268.
5. M. Vellekoop, R. Berglund On intervals, transitivity = chaos // The American Mathematical Monthly, 1994, Vol. 101, No.4. P. 353—355.
6. W. Ricker Stock and recruitment // Journal Fisheries research board of Canada, 1954. Vol. 11. № 5. P. 559—623.
7. V. Paar, N. Pavin Sensitive dependence of lifetimes of chaotic transient on numerical accuracy for a model with dry friction and frequency dependent driving amplitude // Modern Physics Letters B., 1996, Vol. 10, № 4 & 5, P. 153—159.
8. C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke Chaotic attractors in crisis // Physical Review Letters, 1982. Vol. 8. №22. P.1507—510.
9. C. Grebogi, E. Ott, J. Yorke Chaos, strange attractors and fractal basin boundaries in nonlinear dynamics // Science. 1987, Vol. 238. № 4827. P. 632—638.
10. C. Minto, R. A. Myers, W. Blanchard Survival variability and population density in fish populations // Nature, 2008. Vol. 452. P. 344—348.
11. Еремеева Е. Ф., Смирнов А. И. Теория этапности развития и её значение в рыбоводстве // Теоретические основы рыбоводства. М. : Наука, 1965, С. 129—138.