МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА АЛГОРИТМИ

Математическая модель надежности функционирования электронной аппаратуры для биомедицинских исследований

С. К МЕЩАНИНОВ, Ю. Ю. МАКАРЕНКО, А. В. БИЛЬЧУК

Днепродзержинский государственный технический университет, Украина

Представлены результаты аналитический исследований надежности функционирования электронной аппаратуры, используемой для осуществления медико-биологических исследований. Рассмотрен механизм формирования отказа электронной аппаратуры для биомедицинских исследований на основе модели лавинообразного вовлечения ее подсистем в состояние отказа. Создана математическая модель для оценки надежности функционирования подобной аппаратуры.

Представлені результати аналітичний досліджень надійності функціонування електронної апаратури, використовуваної для здійснення медико-біологічних досліджень. Розглянутий механізм формування відмови електронної апаратури для біомедичних досліджень на основі моделі лавиноподібного залучення її підсистем в стан відмови. Створена математична модель для оцінки надійності функціонування подібної апаратури.

There are presented results of analytical researches reliability of functioning electronic apparatus, used for realization of medical-biological researches. The mechanism of forming of refuse of electronic apparatus is considered for biomedical researches on the basis of model of the avalanche-type involving of her subsystems in the state of refuse. The mathematical model is created for the estimation of reliability of functioning the similar apparatus.

Введение. Надежность и эффективность электронной аппаратуры (ЭА) для биомедицинских исследований является важнейшим критерием, по которому можно сделать оценку целесообразности использования того или иного варианта использования комплекса такой аппаратуры в современном лечебно-диагностическом учреждении с учетом требований экономичности, безопасности, эргономических и экологических норм. Рассмотрение эффективности любого участка измерительного тракта, на сегодняшний день, по нашему мнению, наиболее целесообразно производить с использованием комплексного метода исследований, в основе которого должно находится представление о рассматриваемом объекте (или его части), как сложной технической системе, подсистемы которой находятся в определенном взаимодействии.

Оптимизация работы ЭА для биомедицинских исследований, как единой измерительно-диагностической системы связана с разработкой и использованием прикладных программ, контролирующе – управляющего и иного оборудования чрезвычайно большой сложности, что, либо существенно затрудняет задачу оптимизации, либо делает ее нереальной.

Постановка задачи исследований. Оценка надежности и эффективности функционирования ЭА по известным показателям работы ее подсистем, предполагает переход к рассмотрению надежности и эффективности функционирования ЭА в целом. Основная трудность этого перехода состоит в адекватном учете взаимодействия подсистем ЭА. Отказы подсистем этой аппаратуры, являясь случайными событиями, в совокупности образуют последовательность зависимых и независимых событий. Это имеет место тогда, когда отказ подсистемы (или, что тоже самое, ее элемента), вызывает неуправляемое движение материальных потоков: потеря информационных и энергетических потоков и т.п. Это неуправляемое движение, вызванное отказом первой подсистемы (элемента), в свою очередь, оказывает воздействие на другие подсистемы в виде внешней нагрузки. Если величина этой нагрузки превышает предельно допустимое значение для смежной подсистемы, то происходит ее отказ.

Таким образом, **цель настоящей статьи** – рассмотрение механизма формирования отказа ЭА для биомедицинских исследований на основе приведенной выше модели лавинообразного вовлечения ее подсистем в состояние отказа и создание на основе полученных результатов математической модели надежности ее функционирования.

Основная часть. Показатель технической исправности системы $P_и(t)$ определяется как вероятность того, что в момент t система находится в технически исправном состоянии.

$$P_и(t) = \sum_{j=1}^{N_p} P_j(t), \ t = n(T_n + t_p), \qquad (1)$$

где $P_j(t)$ – вероятности, характеризующие возможные состояния ЭА по истечении периода снятия показаний $t_{изм}$; T_n – весь период функционирования ЭА; t_p – длительность проведения технического обслуживания; N_p – количество подсистем ЭА, прошедших техническое обслуживание; n – порядковый номер технического обслуживания ЭА (количество технических обслуживаний).

Для определения этого показателя достаточно подсчитать число реализаций $m_и$, при которых в момент t ЭА была исправна, то есть, число реализаций, при которых состояние x_i в момент времени t удовлетворяет условию $x_i \in R$ (R – вероятность безотказной работы системы). Тогда статистическая оценка $P_и(t)$ определяется следующим соотношением:

$$P_и(t) = m_и / L. \qquad (2)$$

Для вычисления вероятности безотказной работы ЭА за время τ необходимо вести подсчет всех реализаций, при которых ЭА впервые достигла состояния $x_i \in Q$ в промежутке времени τ (Q – вероятность отказа). Пусть это число реализаций равно m_0. Тогда статистическая оценка указанного показателя:

$$P(\tau) = (L - m_0)/L, \qquad (3)$$

где L – число реализаций.

Математическое ожидание времени безотказной работы ЭА оценивается по формуле:

$$T_L = \frac{L-1}{L} T_{L-1} + \frac{1}{L} t_L, \qquad (4)$$

где T_L – среднее время безотказной работы ЭА; t_L – продолжительность простоя ЭА.

Обычно процесс технического обслуживания выполняется в соответствии с технологическим регламентом. Однако, применительно к ЭА для биомедицинских исследований, могут иметь место внеплановые остановки для технического обслуживания, связанные с выходом значений параметров, характеризующих надежность ее функционирования их допустимого диапазона.

Технологический график проведения технического обслуживания может быть представлен в виде сетевого графика [1]. Обозначим длительность i-го пути сетевого графика через L_i, а длительность критического пути – символом L_{ik}. Тогда время проведения технического обслуживания является длиной критического пути. Длительность выполнения соответствующих технологических операций:

$$L_i = \sum_{j=1}^{k_i} \tau_{ij}, \qquad (5)$$

где τ_{ij} – время выполнения j-й технологической операции; k_{ij} – число технологических операций, составляющих i-й путь.

Таким путем задача моделирования времени проведения технического обслуживания может быть сведена к моделированию длительности технологических операций.

Время проведения одной технологической операции может быть разделено на две составляющие:

$$\tau_{ij} = \tau'_{ij} + \Delta\tau_{ij}, \qquad (6)$$

где τ'_{ij} – время выполнения технологической операции при отсутствии отказов; $\Delta\tau_{ij}$ – приращение времени выполнения технологической операции, вызванное появлением отказов оборудования, участвующего в ее выполнении.

При выполнении технического обслуживания могут иметь место два вида отказов. Отказы первого вида, как правило, проявляются в начале технологической операции, но обнаруживаются только при обслуживании. Время выполнения операции при их появлении увеличивается на величину времени восстановления работоспособности оборудования. Время восстановления работоспособности i-го элемента подсистемы $\tau_i^в$ также является случайной величиной и может быть промоделировано на основании известного закона распределения.

Отказы второго вида возникают в процессе выполнения технологической операции и иногда приводят к тому, что после устранения причины их появления, приходится повторять часть работ технологической операции, выполненных до появления отказа. Продолжительность времени, необходимого на повторение выполненных ранее работ τ_i^0, является величиной, однозначно определяемой временем появления отказа для каждого вида оборудования, участвующего в выполнении операции.

Момент появления этого вида отказов при моделировании может быть установлен путем проверки логического условия:

$$R_i \ge t_{ij}, \qquad (7)$$

где R_i – случайное число, подчиненное тому же закону распределения, что и время безотказной работы для рассматриваемой подсистемы; t_{ij} – время работы подсистемы при выполнении технологической операции. Выполнение условия (7) соответствует случаю отсутствия отказов за время выполнения технологической операции. Если указанное условие не выполняется, то имеет место отказ в момент времени, равный по величине R_i.

Таким образом, время выполнения технологической операции при одной реализации процесса моделирования τ_{ij} может быть определено по формуле:

$$\tau_{ij} = \sum_{\mu=0}^{a} \tau_{ij}^{в(\mu)} + \sum_{\mu=0}^{c} \left(\tau_{ij}^{0(\mu)} + \tau_{ij}^{в(\mu)}\right) + \tau'_{ij}, \qquad (8)$$

где a, c – число отказов первого и второго видов; μ – интенсивность восстановления работоспособности.

После определения длительности выполнения каждой технологической операции по соотношению (7), можно определить длины всех путей сетевого графика.

Время выполнения технического обслуживания в s-й реализации процесса:

$$t_p^s = L_k^s = \max\{L_i^s\}, \qquad (9)$$

где L_k^s – длина критического пути сетевого графика обслуживания в s-й реализации процесса.

Рассмотренные выше соотношения позволяют с помощью ЭВМ моделировать одну реализацию процесса технического обслуживания ЭА.

Статистическая плотность распределения величины t_p^s может быть получена путем вычисления на ЭВМ частот появления событий:

$$t_p^s \in [t_i, t_{i+1}], \qquad (10)$$

где t_i, t_{i+1} – пределы интервалов группирования, используемые при построении статистической плотности распределения.

Для определения частоты появления события (10), текущее время может быть разбито на ряд интервалов в соответствии с правилами математической статистики. Входящие в выражение (10) величины задаются в исходных данных.

Формально, математическая модель надежности функционирования ЭА может быть представлена соотношением, устанавливающим функциональную связь между уровнем надежности ЭА и уровнем надежности её подсистем:

$$H = \Phi[F(r_i, \tau_i, N), U(r_i, \tau_i, \partial, T_c, T_п, N)], \qquad (11)$$

где $F(r_i, \tau_i, N)$ – функциональное представление структуры ЭА и взаимосвязи её подсистем в течение некоторого отрезка времени τ_i; r_i – показатель надежности i-й подсистемы; N – число подсистем в комплексе ЭА; U – оператор, учитывающий степень влияния управляемых факторов на уровень надежности ЭА; $\partial, T_п$ – объем и период проведения технического обслуживания ЭА; T_c – время снижения коэффициента готовности ЭА при обслуживании; H – исследуемый показатель надежности ЭА.

Так как, в общем случае, отказы ЭА происходят случайно, то заранее не может быть предсказано его поведение при выполнении задачи измерений. Тогда, в общем случае, выполнение поставленной задачи с требуемой вероятностью может быть обеспечено при введении в действие избыточного числа элементов (резервные элементы). Вероятность W_N выполнения производственной задачи при применении N резервных элементов может быть определена из соотношения:

$$W_N = 1 - (1 - W_{N0}), \qquad (12)$$

где W_{N0} – вероятность выполнения задачи измерений при исследовании одного пациента (системы или органа) при условии отсутствия отказов; P – обобщенный показатель надежности ЭА.

Тогда:

$$N = \frac{\ln(1 - W_{N0})}{\ln(1 - PW_0)}. \qquad (13)$$

Показатель экономичности выполнения задачи измерений:

$$\overline{D} = C_{1N} = C_1 \frac{\ln(1 - W_{N0})}{\ln(1 - PW_0)}, \qquad (14)$$

где C_1 – стоимость применения одного комплекта ЭА, выраженная в зависимости от достигнутого уровня надежности диагностического результата.

Тогда:

$$D = \frac{\overline{D}_u - C_1 \frac{\ln(1 - W_{N0})}{\ln(1 - PW_0)}}{\overline{D}_u}, \qquad (15)$$

где $\overline{D}_u$ – некоторое число, характеризующее экономичность применения эксплуатируемой системы при решении поставленной задачи.

$$C_1 = C_0(1-P)^{-\alpha}, \quad D = \frac{\overline{D}_u - C_0(1-P)^{-\alpha} \frac{\ln(1 - W_{N0})}{\ln(1 - PW_0)}}{\overline{D}_u}, \qquad (16)$$

где C_0 и α – некоторые параметры, определяемые по статистическим данным.

Оптимальное значение обобщенного показателя надежности может быть определено из уравнения:

$$\frac{dD}{dP} = 0,$$

или:

$$\frac{W_0}{\alpha} + \frac{(1 + P_0 W_0)\ln(1 - P_0 W_0)}{1 - P_0} = 0, \qquad (17)$$

где P_0 – оптимальное значение обобщенного показателя надежности системы.

В сложных технических системах, к которым относится и ЭА, существующие связи между подсистемами, как правило, носят детерминированный характер. Отказы приводят к тому, что нарушается (изменяется) алгоритм взаимодействия подсистем.

Учитывая то, что число подсистем в ЭА конечно, множество E возможных несовместных состояний ЭА также будет конечным. Тогда число таких несовместных состояний ЭА:

$$\prod_{i=1}^{n} k_i, \qquad (18)$$

где k_i – число возможных состояний i-й подсистемы ЭА, n – число подсистем.

Так, если каждый элемент системы может находиться только в двух состояниях: «исправен» или «неисправен», то множество E будет содержать 2^N различных несовместных состояний.

Каждое состояние $x_i \in E$, характеризуется некоторым значением условной вероятности $\alpha_i(t)$ выполнения задания системой при условии, что она находится в состоянии x_i. Для некоторых состояний x_i, величина $\alpha_i(t) = 0$. Поэтому множество E можно разбить на два подмножества Q и R так, чтобы в Q входили все $x_i \in E$ для которых $\alpha_i(t) = 0$, а в R – все остальные состояния.

Должны выполняться следующие условия [1]: $R \cup Q = E, R \cap Q = \otimes$; если система исправна, то $\alpha_i(t) > 0$.

Пусть P_{ij} – вероятность перехода ЭА из состояния x_{0j} в состояние x_i за время t.

Тогда по формуле полной вероятности:

$$P_j(t_з) = \sum_{j=1}^{M} P_{0j} \cdot P_{ij}(t_з), \; i = 1, 2, \ldots, M, \qquad (19)$$

где $P_i(t)$ – вероятность того, что в момент t ЭА будет находиться в состоянии x_i; M – число подсистем ЭА.

Вероятность нахождения ЭА в момент t в технически исправном состоянии (вероятность безотказной работы):

$$P(t) = \sum_{i=1}^{M} P_i(t) \cdot \alpha_i = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} P_{0j} \cdot P_{ji} \cdot \alpha_i . \qquad (20)$$

Уравнение вида (19) может быть компактно переписано в матричном виде:

$$\overline{P}(t) = \overline{P}(0) \cdot \Pi(t), \qquad (21)$$

где $\Pi(t)$ – матрица переходов ЭА за период снятия показаний t; $\overline{P}(0)$ – вектор-строка вида $\overline{P}(0) = (P_{01}, P_{02}, ..., P_{0M})$.

Тогда выражение (19) может быть получено из (20) по формуле:

$$P(t) = \overline{P}(0) \cdot \Pi(t) \cdot \overline{H},$$

где $\overline{H}$ – вектор-столбец, элементами которого являются вероятности α_i (исправны все подсистемы ЭА).

Таким образом, **математическая модель надежности функционирования ЭА** может быть представлена в следующем виде.

Вероятность перехода ЭА из полностью работоспособного состояния (исправны все подсистемы ЭА) x_i в состояние x_s (неисправна хотя бы одна из подсистем ЭА):

$$P(t_з) = \prod_{\nu=1}^{4} P_\nu(t_з) \cdot \prod_{\mu=1}^{4} \left[1 - P_\mu(t_з)\right], \qquad (22)$$

где $P_\nu(t_з)$ – вероятность безотказной работы ν-го элемента ЭА из числа не отказавших за время $t_з$; $1 - P_\mu(t_з)$ – вероятность появления отказа μ-го элемента ЭА за время $t_з$.

Следует отметить, что при проверке ЭА на надежность функционирования, могут быть установлены только 2 возможных его состояния: x_1 – исправны все её подсистемы и x_2 – отказала хотя бы одна подсистема. Тогда матрица переходов ЭА как системы за период $T_п$ [2]:

$$\Pi(T_п) = \begin{Vmatrix} \prod_{i=1}^{N} p_i & 1 - \prod_{i=1}^{N} p_i \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad (23)$$

где p_i – вероятность безотказной работы i-ой подсистемы в течение времени $T_п$.

Выводы

1. Сформулирована математическая модель надежности функционирования ЭА.

2. При проверке ЭА на надежность функционирования, могут быть установлены только 2 возможных его состояния: исправны все её подсистемы и отказала хотя бы одна подсистема.

ЛИТЕРАТУРА

1. Червоный А. А. Надежность сложных систем. изд. 2-е, перераб. и доп. / Червонный А. А., Лукьященко В. И. — М. : Машиностроение, 1976. — 288 с.
2. Надежность и эффективность в технике: Справочник в 10 т. Т. 2. Математические методы в теории надежности и эффективности / Под ред. Б. В. Гнеденко, 1987. — 280 с.

пост.13.12.13