1. Вступ. Розв'язання крайових задач теорії пружності для шарових тіл має велике практичне і теоретичне значення. Багато розрахунків міцності гідротехнічних споруд, висотних будинків, шахт, аеродромного покриття, шосейних доріг, а також проектування складених конструкцій зводиться до розв'язання задач, які пов'язані з визначенням напружено-деформованого стану в багатошаровому середовищі.

2. Постановка задачі. Нехай важка пружна смуга товщиною h лежить на багатошаровій основі та відривається від пружного півпростору двома зосередженими силами $\frac{Q}{2}$ $(q(x)=-\frac{Q}{2}[\delta(x+c)]+\delta(x-c)]$. Матеріал смуги припускається однорідним і ізотропним. E,ν та ρ – відповідно модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона та питома густина матеріалу.

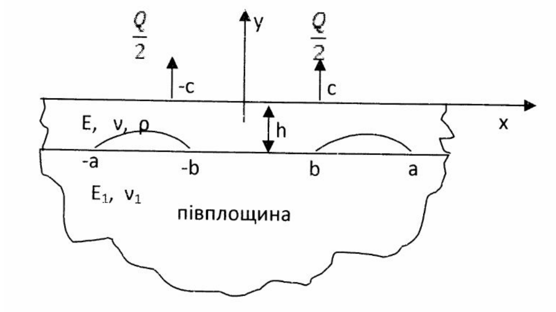

Рис. 1

Позначимо

$$f(x)=\frac{dv(x,-h)}{dx}-\frac{dv(x)}{dx}, \tag{1}$$

де $v(x,-h)$ та $v(x)$ вертикальні переміщення точок, відповідно, нижньої межі смуги та верхньої межі основи. Треба встановити зв'язок між контактним напруженням на межі важкої смуги і основи та величиною зазору [1,2].

$$\sigma(x,-h)=\frac{1}{\pi\tilde{E}}\frac{f(t)dt}{t-x}+$$

$$+\frac{1}{\pi\tilde{E}}f(t)\Phi(t-x)dt-\frac{1}{\pi}q(t)\Psi(t-x)dt-\rho gh, \tag{2}$$

де $|x|<\infty$.

$$\Phi(\xi)=H(p)\sin(p\xi)dp,$$
$$\Psi(\xi)=R(p)\cos(p\xi)dp, \tag{3}$$

$$\tilde{E}=\frac{2(1-\nu)(1+\Delta)}{E}, \tag{4}$$

$$H(p)=\frac{(e\ -2p\,h-2ph-1)}{\Delta(ch(2ph)-2p\,h\ -1)+sh(2ph)+2ph}, \tag{5}$$

$$R(p)=\frac{2(sh(ph)+ph\cdot ch(ph))}{\Delta(ch(2ph)-2p\,h\ -1)+sh(2ph)+2ph}. \tag{6}$$

3. Випадок двох зон відриву

Розглянемо задачу (рис. 1) при наявності двох зон відриву $\overline{L}=[-a,-b]\bigcup[b,a]$. Отримаємо з (2), задовольняючи крайові умови контактної задачі

$$\begin{cases} v(x,-h)=v(x), x\in\overline{L} \\ \sigma(x,-h)=0, \quad x\in\overline{L} \\ \tau(x,-h)=0, \quad |x|<\infty \end{cases} \tag{7}$$

сингулярне інтегральне рівняння:

$$\frac{f(t)}{t-x}dt+f(t)\Phi(t-x)dt=$$

$$=-\frac{Q\tilde{E}}{2}[\psi(-c-x)+\psi(c-x)]+\pi\tilde{E}\rho gh, x\in\overline{L}. \tag{8}$$

Зробимо регуляризацію Карлемана-Векуа [3,4].

Отримаємо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду [5]:

$$\overline{f}(\overline{x})-\frac{\lambda}{\pi}\sqrt{(1-\overline{s})(\overline{s}-\beta)}\overline{f}(\overline{s})K(\overline{x},\overline{s})d\overline{s}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{\overline{\psi}(\overline{t})-\overline{\psi}(\overline{x})}{\sqrt{(1-\overline{t})(\overline{t}-\beta)}}\frac{\overline{t}d\overline{t}}{\sqrt{(1+\overline{t})(\overline{t}+\beta)(\overline{t}-\overline{x})}}, \overline{x}\in(\beta,1) \tag{9}$$

відносно функції

$$\overline{f}(\overline{x})=\frac{f(a\overline{x})h}{Q\tilde{E}\sqrt{(1-\overline{x})(\overline{x}-\beta)}}, \tag{10}$$

при виконанні двох умов:

$$\sqrt{(1-\overline{x})(\overline{x}-\beta)}\sqrt{(1+\overline{x})(\overline{x}+\beta)}\overline{f}(\overline{x})=0; \tag{11}$$

$$\frac{\rho gh}{Q}=\frac{2\lambda}{\pi}\sqrt{(1-\overline{s})(\overline{s}-\beta)}\overline{f}(\overline{s})d\overline{s}\frac{\overline{t}\tilde{\Phi}(\overline{t},\overline{s})d\overline{t}}{\sqrt{(1-\overline{t})(\overline{t}-\beta)}}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\frac{\overline{t}\overline{\psi}(\overline{t})d\overline{t}}{\sqrt{(1-\overline{t})(\overline{t}-\beta)}}. \tag{12}$$

В цих співвідношеннях $\lambda,\beta,\overline{x},\overline{c},\overline{s},\overline{t}$ та Δ визначаються за формулами

$$\Delta=\frac{E(1-\nu)}{E(1-\nu)},\ \overline{c}=\frac{c}{h},$$

$$x=\overline{x}a,\quad s=\overline{s}a,\quad t=\overline{t}a,\quad \lambda=\frac{a}{h},\quad \beta=\frac{b}{a}, \tag{13}$$

та $K(\overline{x},\overline{s})=\sqrt{(1+\overline{s})(\overline{s}+\beta)}\overline{K}(\overline{x},\overline{s})$,

$$\overline{K}(\overline{x},\overline{s})=\frac{\tilde{\Phi}(\overline{t},\overline{s})-\tilde{\Phi}(\overline{x},\overline{s})}{\sqrt{(1-\overline{t})(\overline{t}-\beta)}}\frac{2\overline{t}d\overline{t}}{\sqrt{(1+\overline{t})(\overline{t}+\beta)(\overline{t}-\overline{x})}},$$

$$\tilde{\Phi}(\overline{t},\overline{s})=\tilde{\Phi}(\overline{s}-\overline{t})+\tilde{\Phi}(\overline{s}+\overline{t}),\quad \overline{\psi}(\overline{t})=\overline{\psi}(\overline{c}+\overline{t})+\overline{\psi}(\overline{c}-\overline{t}).$$

Де $\overline{\Phi}(\xi)$ та $\overline{\psi}(\overline{t})$ визначаються за формулами

$$\overline{\Phi}(\xi)=\overline{H}(u)\sin(\xi\lambda u)du,\ \ \overline{\Psi}(\overline{t})=\overline{R}(u)\cos(\lambda\overline{t}u)du.$$

При цьому безрозмірні контактні напруження обчислюємо за формулою:

$$\frac{h\sigma(a\overline{x},-h)}{Q}=\frac{2}{\pi}\sqrt{(1-\overline{t})(\overline{t}-\beta)}\overline{f}(\overline{t})\frac{\overline{t}d\overline{t}}{\overline{t}-\overline{x}}+$$

$$\frac{\lambda}{\pi}\sqrt{(1-\overline{t})(\overline{t}-\beta)}\overline{f}(\overline{t})[\overline{\Phi}(\overline{t}+\overline{x})+\overline{\Phi}(\overline{t}-\overline{x})d\overline{t}+$$

$$\frac{1}{2\pi}[\overline{\psi}(\overline{c}+\overline{x})+\overline{\psi}(\overline{c}-\overline{x})]-\frac{\rho gh}{Q}. \tag{14}$$

Висновки

Для двох зосереджених сил $\frac{Q}{2}$, у результаті обчислювального експерименту виявилося, що коли параметр $\overline{c}<0,879$, то зона відриву ще одна як і у випадку однієї зосередженої сили. Якщо $\overline{c}>0,879$, то зон відриву буде дві $([-a,-b]\bigcup[b,a])$. Розроблено алгоритм визначення меж областей контакту та обчислення контактних напружень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ламзюк В. Д., Приварников А. К. Упругая деформация неоднородного многослойного пакета при неполном контакте его слоев // ДАН УССР. Сер. А. № 7. 1977.
2. Ламзюк В. Д. Об отрыве упругой полосы от многослойного основания // Выездное заседание научного совета АН СССР, ГКНТ по современным проблемам теории контактных взаимодействий. Тез.докл. — Ереван. 1988. С.87—89.
3. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. — М. : Наука. 1968.
4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М. : Физматгиз. 1963.
5. Ламзюк В. Д. О неполном контак те тяжелой полосы с основанием // Вопросы прочности и пластичности. — Днепропетровск : изд-во ДГУ. 1993. С.58—68.

пост.20.05.14