Резко сходящееся течение раствора полимера

А. В. ПОГРЕБНЯК[*], *Ю. Ф. ИВАНЮТА*[**]

*Донецкий национальный университет экономики и торговли
имени Михаила Туган-Барановского

**Россия. г.Санкт-Петербург. Государственный университет морского и речного флота имени
адмирала С.О.Макарова

Приведені результати чисельного моделювання течії простої і вязкопружньої (розчину полімеру) рідин через щілину.

Приведены результаты численного моделирования течения простой и вязкоупругой (раствора полимера) жидкостей через щель.

Presents the results of computational modeling of common and viscous-elastic (polymer solution) liguid flow through a slot.

Введение. Одна из основных проблем, которую необходимо решать при разработке оборудования водно-полимерной резки различных материалов, - это определение оптимального режима протекания полимерного раствора через струеформирующую головку. Гидродинамический расчет режимов течения раствора полимера основан на использовании установленного критерия перехода макромолекулярного клубка из гидродинамически непроницаемого "сегментального геля", где значительная часть сегментов заэкранирована, в протекаемый "сегментальный раствор", в котором уже все сегменты гидродинамически взаимодействуют с растворителем. Условия этого перехода определяются выражением (1),

$$\dot{\varepsilon}\theta_c \ge D_{e\,кр}\,. \tag{1}$$

при выполнении которого в растворах полимеров, таких как полиэтиленоксид, полиакриламид и др., формируются динамические надмолекулярные структуры[1-3].

Соотношение (1) следует трактовать как число Деборы, т.к. обратная величина продольного градиента скорости это не что иное, как временной масштаб течения [4]. Таким образом, расчет сводится к определению времени релаксации (характерного времени полимерного раствора) и реализуемых продольных градиентов скорости при течении полимерного раствора через струеформирующую головку гидрорежущей установки.

Постановка задачи. Следует отметить, что в настоящее время в литературе отсутствуют аналитические выражения, с помощью которых можно было бы рассчитать продольный градиент скорости при втекании в отверстие или щель раствора полимера. Известно, что растворы полимеров обладают упруговязкими свойствами. Поэтому, для оценки деформационных характеристик (функций тока, распределений продольного градиента скорости и нормальных напряжений) потока, приводящих к проявлению аномальных, по сравнению с поведением ньютоновской жидкости, эффектов, можно выбрать хорошо зарекомендовавшую максвелловскую модель упруговязкой жидкости [5-10] с использованием оператора Яумана [11]. Выбор этой модели был обусловлен тем, что, согласно Лоджу [10], исследование непрямолинейных, неустановившихся, с точки зрения Лагранжа, течений упруговязких жидкостей не добавляет какой-либо новой информации к уже полученной при изучении однородных или квазиоднородных сдвиговых деформаций. По его мнению, "...единственная причина детальных расчетов различных типов непрямолинейных течений - убедиться в их практической реализуемости". Это утверждение Лоджа можно интерпретировать таким образом, что для описания сходящихся потоков не следует придумывать новые реологические уравнения состояния, достаточно воспользоваться полученными при изучении куэттовского течения или, по крайней мере, определить, не могут ли они объяснить закономерности сходящегося течения.

Алгоритм численного решения задачи. Установившиеся течения несжимаемых сред описываются следующими уравнениями:

– уравнением неразрывности

$$\mathcal{V}^i_{,i} = 0\,, \tag{2}$$

– уравнением движения Коши

$$\rho \nu^\kappa \nu^i_{,\kappa} = -g^{i\kappa} P_{,\kappa} + T^{ij}_{,\kappa}\,, \tag{3}$$

где g^{ik} - метрический тензор, а $T^{ij}_{,k}$ вычисляется при ковариантном дифференцировании T^{ij}:

$$T^{ij}_{,k} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k} + \begin{Bmatrix} i \\ k\ \ m \end{Bmatrix} T^{mj} + \begin{Bmatrix} i \\ k\ \ m \end{Bmatrix} T^{im}\,,$$

где $\begin{Bmatrix} i \\ k\ \ m \end{Bmatrix}$ представляет собой трехкомпонентный символ Кристоффеля и выражается зависимостью:

$$\begin{Bmatrix} i \\ k\ \ m \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} g^{i\ell} \left(\frac{\partial g_{k\ell}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{m\ell}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x^\ell} \right).$$

Обозначив время релаксации через θ_c, а вязкость через η_c, запишем структурное реологическое уравнение модели жидкости Максвелла:

$$T^{ij} + \theta_c \frac{D_j T^{ij}}{Dt} = 2\eta_c D^{ij}\,, \tag{4}$$

где $\frac{D_j}{Dt}$ – производная Яумана, выражаемая следующим уравнением:

$$\frac{D_j T^{ij}}{Dt} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial t} + \mathcal{V}^k T^{ij}_{,k} - W^i_k T^{kj} - T^{ik} W^j_k\,,$$

в котором

$$D_{km}=\frac{1}{2}\left(\mathcal{V}_{k,m}+\mathcal{V}_{m,k}\right),$$

$$W_{km}=\frac{1}{2}\left(\mathcal{V}_{k,m}-\mathcal{V}_{m,k}\right).$$

Рассмотрим случай, когда несжимаемая жидкость движется между двумя параллельными плоскостями и вытекает через щель, длина которой значительно превышает ее ширину. Течение плоское и стационарное. На *рис.1* показана форма канала и декартовы координаты.

Компоненты метрического тензора в декартовых координатах имеют вид:

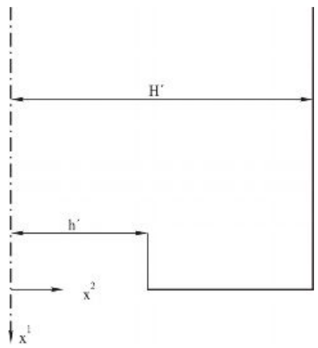


Рис.1. Форма канала и декартовы координаты

$$g_{11}=g_{22}=1,$$

$$g_{12}=g_{21}=0.$$

Трехкомпонентный символ Кристоффеля $\left\{ {i \atop k\ m} \right\}$ равен нулю, т.к. компоненты метрического тензора g_{ik} не зависят от координат.

Выразим в безразмерном виде и введем в уравнения (2), (3) и (4) следующие величины:

$$x_1^*=\frac{x^1}{H'}, \qquad x_2^*=\frac{x^2}{H'},$$

$$V_1^*=\frac{\mathcal{V}^1}{\bar{u}}, \qquad V_2^*=\frac{\mathcal{V}^2}{\bar{u}},$$

$$T_{11}^*=\frac{H'}{\eta_c\bar{u}}T^{11}, \qquad T_{22}^*=\frac{H'}{\eta_c\bar{u}}T^{22},$$

$$T_{12}^*=\frac{H'}{\eta_c\bar{u}}T^{12}, \qquad T_{21}^*=\frac{H'}{\eta_c\bar{u}}T^{21}, \tag{5}$$

$$P^*=\frac{H'}{\eta_c\bar{u}}P,$$

где $\bar{u}$ – средняя скорость течения;

$2H'$ – ширина канала.

С учетом преобразований (2), (3), (4) приводятся к виду

$$\frac{\partial\mathcal{V}_1^*}{\partial x_1^*}+\frac{\partial\mathcal{V}_2^*}{\partial x_2^*}=0\,, \tag{6}$$

$$\mathrm{Re}\left(\mathcal{V}_1^*\frac{\partial\mathcal{V}_1^*}{\partial x_1^*}+\mathcal{V}_2^*\frac{\partial\mathcal{V}_1^*}{\partial x_2^*}\right)=-\frac{\partial P^*}{\partial x_1^*}+\frac{\partial T_{11}^*}{\partial x_1^*}+\frac{\partial T_{12}^*}{\partial x_2^*}, \tag{7,а}$$

$$\mathrm{Re}\left(\mathcal{V}_1^*\frac{\partial\mathcal{V}_2^*}{\partial x_1^*}+\mathcal{V}_2^*\frac{\partial\mathcal{V}_2^*}{\partial x_2^*}\right)=-\frac{\partial P^*}{\partial x_2^*}+\frac{\partial T_{21}^*}{\partial x_1^*}+\frac{\partial T_{22}^*}{\partial x_2^*}, \tag{7,б}$$

$$T_{11}^*+\mathrm{We}\left\{\begin{array}{l}\mathcal{V}_1^*\dfrac{\partial T_{11}^*}{\partial x_1^*}+\mathcal{V}_2^*\dfrac{\partial T_{11}^*}{\partial x_2^*}-\\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\mathcal{V}_1^*}{\partial x_2^*}-\dfrac{\partial\mathcal{V}_2^*}{\partial x_1^*}\right)\left(T_{12}^*+T_{21}^*\right)\end{array}\right\}=2\frac{\partial\mathcal{V}_1^*}{\partial x_1^*}, \tag{8,а}$$

$$T_{22}^*+\mathrm{We}\left\{\begin{array}{l}\mathcal{V}_1^*\dfrac{\partial T_{22}^*}{\partial x_1^*}+\mathcal{V}_2^*\dfrac{\partial T_{22}^*}{\partial x_2^*}+\\ +\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\mathcal{V}_1^*}{\partial x_2^*}-\dfrac{\partial\mathcal{V}_2^*}{\partial x_1^*}\right)\left(T_{12}^*+T_{21}^*\right)\end{array}\right\}=2\frac{\partial\mathcal{V}_2^*}{\partial x_2^*}, \tag{8,б}$$

$$T_{12}^*+\mathrm{We}\left\{\begin{array}{l}\mathcal{V}_1^*\dfrac{\partial T_{12}^*}{\partial x_1^*}+\mathcal{V}_2^*\dfrac{\partial T_{12}^*}{\partial x_2^*}+\\ +\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\mathcal{V}_1^*}{\partial x_2^*}-\dfrac{\partial\mathcal{V}_2^*}{\partial x_1^*}\right)\left(T_{11}^*-T_{22}^*\right)\end{array}\right\}=\frac{\partial\mathcal{V}_1^*}{\partial x_2^*}+\frac{\partial\mathcal{V}_2^*}{\partial x_1^*}, \tag{8,в}$$

$$T_{21}^*+\mathrm{We}\left\{\begin{array}{l}\mathcal{V}_1^*\dfrac{\partial T_{21}^*}{\partial x_1^*}+\mathcal{V}_2^*\dfrac{\partial T_{21}^*}{\partial x_2^*}+\\ +\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\mathcal{V}_1^*}{\partial x_2^*}-\dfrac{\partial\mathcal{V}_2^*}{\partial x_1^*}\right)\left(T_{11}^*-T_{22}^*\right)\end{array}\right\}=\frac{\partial\mathcal{V}_1^*}{\partial x_2^*}+\frac{\partial\mathcal{V}_2^*}{\partial x_1^*}, \tag{8,г}$$

где $\mathrm{Re}=\dfrac{\rho\bar{u}H'}{\eta_c}$ – число Рейнольдса;

$\mathrm{We}=\dfrac{\theta_c\,\bar{u}}{H'}$ – число Вейсенберга.

Если ограничиться течением, при котором инерционными членами можно пренебречь, то левая часть уравнений (7) станет равной нулю. Применяя уравнение неразрывности (6), введем функцию тока:

$$\mathcal{V}_1^*=\frac{\partial\psi}{\partial x_2^*}, \qquad \mathcal{V}_2^*=-\frac{\partial\psi}{\partial x_1^*}. \tag{9}$$

Полагая пуазейлевским профиль скорости на входе в канал, а скорость на поверхности твердой стенки (условие прилипания) равной нулю и считая, что в потоке, покинувшем канал, скорость постоянна, граничные условия будут иметь следующий вид:

$$x_1^*=-\infty, \qquad \mathcal{V}_1^*=\frac{3}{2}\left(1-x_2^{*2}\right), \qquad \mathcal{V}_2^*=0\,, \tag{10,а}$$

$$x_1^*=0\,, \qquad 0\le x_2^*\le h^*, \qquad \mathcal{V}_1^*=\mathcal{V}_0^* \qquad \mathcal{V}_2^*=0\,, \tag{10,б}$$

$$x_1^* = 0\,, \qquad h^* \le x_2^* \le 1\,, \qquad \mathcal{V}_1^* = \mathcal{V}_2^* = 0\,, \tag{10,в}$$

$$x_2^* = 0\,, \qquad \frac{\partial \mathcal{V}_1^*}{\partial x_2^*} = \mathcal{V}_2^* = 0\,, \tag{10,г}$$

$$x_2^* = 1\,, \qquad \mathcal{V}_1^* = \mathcal{V}_2^* = 0\,, \tag{10,д}$$

где $\mathcal{V}_0^* = const$, определяемая расходной скоростью;

h^* – безразмерная величина, равная $\frac{h'}{H'}$;

$2h'$ – ширина щели.

Для определения полей течения и напряжений необходимо решить уравнения (6), (7) и (8), используя граничные условия (10). Решить эти уравнения в общем случае не представляется возможным. Поэтому ограничимся лишь медленными течениями. Тогда можно пренебречь не только инерционными членами, но и считать, что число Вейсенберга меньше единицы.

Следует напомнить, что число Вейсенберга характеризует меру проявления неньютоновского эффекта при сдвиговом течении. В рассматриваемой задаче реализуется сложное течение, когда имеется и сдвиговый, и продольный градиенты скорости. С ростом скорости истечения через щель, как было показано в работе[12], доля продольного течения возрастает, а сдвигового – уменьшается. Поэтому более оправдано использовать не число We, а число Деборы, которое характеризует проявление неньютоновских свойств при течении с растяжением [13]. Однако если учесть, что для стационарных течений отношение $\frac{\mathrm{De}}{\mathrm{We}} = \mathrm{Re}^{0{,}75}$ [13, 14], то оба критерия (We и De) становятся равноинформационными, т.к. они взаимозависимы в пределах геометрически подобных полей течения.

Поэтому для тех ограничений, которые наложены на рассматриваемое течение, можно записать скорости, напряжения и функции тока в виде разложения по числу We:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_i^* &= \mathcal{V}_i^{(0)} + \mathrm{We}\,\mathcal{V}_i^{(1)} + \mathrm{We}^2\mathcal{V}_i^{(2)} + \ldots, \\
P^* &= P^{(0)} + \mathrm{We}P^{(1)} + \mathrm{We}^2 P^{(2)} + \ldots, \\
T_{ij}^* &= T_{ij}^{(0)} + \mathrm{We}T_{ij}^{(1)} + \mathrm{We}^2 T_{ij}^{(2)} + \ldots, \\
\psi^* &= \psi^{(0)} + \mathrm{We}\psi^{(1)} + \mathrm{We}^2\psi^{(2)} + \ldots.
\end{aligned} \tag{11}$$

Подставив (11) в уравнения (6), (7), (8) и условия на границе (10), проведем упорядочение относительно числа Вейсенберга.

Запишем члены уравнений, не включающие число Вейсенберга:

$$\frac{\partial \mathcal{V}_1^{(0)}}{\partial x_1^*} + \frac{\partial \mathcal{V}_2^{(0)}}{\partial x_2^*} = 0\,, \tag{12,а}$$

$$\frac{\partial T_{11}^{(0)}}{\partial x_1^*} + \frac{\partial T_{12}^{(0)}}{\partial x_2^*} = \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x_1^*}\,, \tag{12,б}$$

$$\frac{\partial T_{21}^{(0)}}{\partial x_1^*} + \frac{\partial T_{22}^{(0)}}{\partial x_2^*} = \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x_2^*}\,, \tag{12,в}$$

$$T_{11}^{(0)} = 2\frac{\partial \mathcal{V}_1^{(0)}}{\partial x_1^*}\,, \qquad T_{22}^{(0)} = 2\frac{\partial \mathcal{V}_2^{(0)}}{\partial x_2^*}\,, \tag{12,г}$$

$$T_{12}^{(0)} = \frac{\partial \mathcal{V}_1^{(0)}}{\partial x_1^*} + \frac{\partial \mathcal{V}_2^{(0)}}{\partial x_1^*}\,, \tag{12,д}$$

$$T_{21}^{(0)} = \frac{\partial \mathcal{V}_1^{(0)}}{\partial x_1^*} + \frac{\partial \mathcal{V}_2^{(0)}}{\partial x_1^*}\,, \tag{12,ж}$$

$$\mathcal{V}_1^{(0)} = \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial x_2^*}\,, \qquad \mathcal{V}_2^{(0)} = -\frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial x_1^*}\,. \tag{12,з}$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned}
&x_1^* = -\infty, && \mathcal{V}_1^{(0)} = \frac{3}{2}\left(1 - x_2^{*2}\right), && \mathcal{V}_2^{(0)} = 0, \\
&x_1^* = 0, && 0 \le x_2^* \le h^*, && \mathcal{V}_1^{(0)} = \mathcal{V}_0^*, \quad \mathcal{V}_2^{(0)} = 0, \\
&x_1^* = 0, && h^* \le x_2^* \le 1, && \mathcal{V}_1^{(0)} = \mathcal{V}_2^{(0)} = 0, \\
&x_2^* = 0, && \frac{\partial \mathcal{V}_1^{(0)}}{\partial x_2^*} = \mathcal{V}_2^{(0)} = 0, \\
&x_2^* = 1, && \mathcal{V}_1^{(0)} = \mathcal{V}_2^{(0)} = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Учитывая уравнения (12), выразив $\frac{\partial P^{(0)}}{\partial x_1^*}$, $\frac{\partial P^{(0)}}{\partial x_2^*}$ через $\psi^{(0)}$ и ее производные и исключив $P^{(0)}$, получим:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^{*2}}\right)\psi^{(0)} = 0\,. \tag{14}$$

Для граничных условий (13) решение уравнения (14)

$$\psi^{(0)} = \psi^{(0)}\left(x_1^*, x_2^*\right)$$

описывает течение ньютоновской жидкости.

Подставив уравнения (11) в уравнения (8) и сгруппировав члены, содержащие число Вейсенберга в первой степени, получим:

$$\begin{aligned}
T_{11}^{(1)} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{V}_1^{(0)}}{\partial x_2^*} - \frac{\partial \mathcal{V}_2^{(0)}}{\partial x_1^*}\right)\left(T_{12}^{(0)} + T_{21}^{(0)}\right) + \\
&+ 2\frac{\partial \mathcal{V}_1^{(1)}}{\partial x_1^*} - \mathcal{V}_1^{(0)}\frac{\partial T_{11}^{(0)}}{\partial x_1^*} - \mathcal{V}_2^{(0)}\frac{\partial T_{11}^{(0)}}{\partial x_2^*},
\end{aligned} \tag{15,а}$$

$$\begin{aligned}
T_{22}^{(1)} &= 2\frac{\partial \mathcal{V}_2^{(1)}}{\partial x_2^*} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{V}_1^{(0)}}{\partial x_2^*} - \frac{\partial \mathcal{V}_2^{(0)}}{\partial x_1^*}\right)\left(T_{12}^{(0)} + T_{21}^{(0)}\right) - \\
&- \mathcal{V}_1^{(0)}\frac{\partial T_{22}^{(0)}}{\partial x_1^*} - \mathcal{V}_2^{(0)}\frac{\partial T_{22}^{(0)}}{\partial x_2^*},
\end{aligned} \tag{15,б}$$

$$\begin{aligned}
T_{12}^{(1)} &= \frac{\partial \mathcal{V}_1^{(1)}}{\partial x_2^*} + \frac{\partial \mathcal{V}_2^{(1)}}{\partial x_1^*} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{V}_1^{(0)}}{\partial x_2^*} - \frac{\partial \mathcal{V}_2^{(0)}}{\partial x_1^*}\right) \times \\
&\times \left(T_{11}^{(0)} - T_{22}^{(0)}\right) - \mathcal{V}_1^{(0)}\frac{\partial T_{12}^{(0)}}{\partial x_1^*} - \mathcal{V}_2^{(0)}\frac{\partial T_{12}^{(0)}}{\partial x_2^*},
\end{aligned} \tag{15,в}$$

$$\begin{aligned}
T_{21}^{(1)} &= \frac{\partial \mathcal{V}_1^{(1)}}{\partial x_2^*} + \frac{\partial \mathcal{V}_2^{(1)}}{\partial x_1^*} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{V}_1^{(0)}}{\partial x_2^*} - \frac{\partial \mathcal{V}_2^{(0)}}{\partial x_1^*}\right) \times \\
&\times \left(T_{11}^{(0)} - T_{22}^{(0)}\right) - \mathcal{V}_1^{(0)}\frac{\partial T_{21}^{(0)}}{\partial x_1^*} - \mathcal{V}_2^{(0)}\frac{\partial T_{21}^{(0)}}{\partial x_2^*},
\end{aligned} \tag{15,г}$$

где $\mathcal{V}_i^{(0)}, T_{ij}^{(0)}$ представляют собой составляющие скорости и напряжений членов уравнений, которые содержат число Вейсенберга в нулевой степени и являются известными.

Преобразуя аналогичным образом уравнение неразрывности, уравнение движения и граничные условия, получим:

$$\frac{\partial \mathcal{V}_1^{(1)}}{\partial x_1^*}+\frac{\partial \mathcal{V}_2^{(1)}}{\partial x_2^*}=0, \qquad (16,а)$$

$$\frac{\partial T_{11}^{(1)}}{\partial x_1^*}+\frac{\partial T_{12}^{(1)}}{\partial x_2^*}=\frac{\partial P^{(1)}}{\partial x_1^*}, \qquad (16,б)$$

$$\frac{\partial T_{21}^{(1)}}{\partial x_1^*}+\frac{\partial T_{22}^{(1)}}{\partial x_2^*}=\frac{\partial P^{(1)}}{\partial x_2^*}. \qquad (16,в)$$

Граничные условия:

$$\begin{array}{ll} x_1^*=-\infty, & \mathcal{V}_1^{(1)}=\mathcal{V}_2^{(1)}=0, \\ x_1^*=0, & \mathcal{V}_1^{(1)}=\mathcal{V}_2^{(1)}=0, \\ x_2^*=1, & \mathcal{V}_1^{(1)}=\mathcal{V}_2^{(1)}=0, \\ x_2^*=0, & \mathcal{V}_1^{(1)}=\mathcal{V}_2^{(1)}=0. \end{array} \qquad (17)$$

Функция тока (9) приобретает вид:

$$\mathcal{V}_1^{(1)}=\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x_2^*}, \qquad \mathcal{V}_2^{(1)}=-\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x_1^*}. \qquad (18)$$

Учитывая (18) и исключая из уравнения (16) $P^{(1)}$, получим:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^{*2}}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^{*2}}\right)^2 \psi^{(1)}=0. \qquad (19)$$

Решение уравнения (19) с граничными условиями (17) имеет вид $\psi^{(1)}=0$, т.е. члены уравнения, содержащие число Вейсенберга в первой степени, не оказывают влияния на распределение скорости. Однако, как видно из уравнения (15), напряжения $T_{11}^{(1)}, T_{22}^{(1)}, T_{12}^{(1)}, T_{21}^{(1)}$ отражают влияние упругости членов уравнения, содержащих число Вейсенберга в первой степени.

Подставляя уравнения (11) в уравнения (18), учитывая, что $\mathcal{V}_1^{(1)}=\mathcal{V}_2^{(1)}=0$, и сгруппировав члены, содержащие число Вейсенберга во второй степени, получим:

$$T_{11}^{(2)}=2\frac{\partial \mathcal{V}_1^{(2)}}{\partial x_1^*}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{V}_1^{(0)}}{\partial x_2^*}-\frac{\partial \mathcal{V}_2^{(0)}}{\partial x_1^*}\right)\times \left(T_{12}^{(1)}+T_{21}^{(1)}\right)-\mathcal{V}_1^{(0)}\frac{\partial T_{11}^{(1)}}{\partial x_1^*}-\mathcal{V}_2^{(0)}\frac{\partial T_{11}^{(1)}}{\partial x_2^*}, \qquad (20,а)$$

$$T_{22}^{(2)}=2\frac{\partial \mathcal{V}_2^{(2)}}{\partial x_2^*}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{V}_1^{(0)}}{\partial x_2^*}-\frac{\partial \mathcal{V}_2^{(0)}}{\partial x_1^*}\right)\times \left(T_{12}^{(1)}+T_{21}^{(1)}\right)-\mathcal{V}_1^{(0)}\frac{\partial T_{22}^{(1)}}{\partial x_1^*}-\mathcal{V}_2^{(0)}\frac{\partial T_{22}^{(1)}}{\partial x_2^*}, \qquad (20,б)$$

$$T_{12}^{(2)}=\frac{\partial \mathcal{V}_1^{(2)}}{\partial x_2^*}+\frac{\partial \mathcal{V}_2^{(2)}}{\partial x_1^*}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{V}_1^{(0)}}{\partial x_2^*}-\frac{\partial \mathcal{V}_2^{(0)}}{\partial x_1^*}\right)\times \left(T_{11}^{(1)}-T_{22}^{(1)}\right)-\mathcal{V}_1^{(0)}\frac{\partial T_{12}^{(1)}}{\partial x_1^*}-\mathcal{V}_2^{(0)}\frac{\partial T_{12}^{(1)}}{\partial x_2^*}, \qquad (20,в)$$

$$T_{21}^{(2)}=\frac{\partial \mathcal{V}_1^{(2)}}{\partial x_2^*}+\frac{\partial \mathcal{V}_2^{(2)}}{\partial x_1^*}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{V}_1^{(0)}}{\partial x_2^*}-\frac{\partial \mathcal{V}_2^{(0)}}{\partial x_1^*}\right)\times \left(T_{11}^{(1)}-T_{22}^{(1)}\right)-\mathcal{V}_1^{(0)}\frac{\partial T_{21}^{(1)}}{\partial x_1^*}-\mathcal{V}_2^{(0)}\frac{\partial T_{21}^{(1)}}{\partial x_2^*}. \qquad (20,г)$$

Уравнение неразрывности, уравнение движения, граничные условия и функция тока имеют такой же вид, как и уравнения (16), (17) и (19) после замены в последних индекса (1) на (2).

Далее исключая $P^{(2)}$, получим:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^{*2}}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^{*2}}\right)^2 \psi^{(2)}=\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1^{(0)}}{\partial x_2^* \partial x_1^*}\left(\frac{\partial A}{\partial x_1^*}+\frac{\partial A}{\partial x_2^*}\right)+\\
&+\frac{\partial \mathcal{V}_1^{(0)}}{\partial x_2^*}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^{*2}}+2\frac{\partial^2 T_{12}^{(1)}}{\partial x_2^* \partial x_1^*}\right)+\frac{\partial \mathcal{V}_2^{(0)}}{\partial x_1^*}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x_2^{*2}}-2\frac{\partial^2 T_{12}^{(1)}}{\partial x_1^* \partial x_2^*}\right)-\\
&-C\frac{\partial^2 B}{\partial x_1^* \partial x_2^*}-\frac{B}{2}\left(2\frac{\partial^2 C}{\partial x_1^* \partial x_2^*}-\frac{\partial^2 A}{\partial x_2^{*2}}+\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^{*2}}\right)-\\
&-\frac{\partial B}{\partial x_1^*}\left(\frac{\partial C}{\partial x_2^*}+\frac{\partial A}{\partial x_1^*}\right)+\frac{\partial B}{\partial x_2^*}\left(\frac{\partial A}{\partial x_2^*}-\frac{\partial C}{\partial x_1^*}\right)+\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1^{(0)}}{\partial x_2^{*2}}\cdot\frac{\partial T_{12}^{(1)}}{\partial x_1^*}+\\
&+\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2^{(0)}}{\partial x_2^{*2}}\cdot\frac{\partial T_{12}^{(1)}}{\partial x_2^*}-\frac{\partial^2 \mathcal{V}_1^{(0)}}{\partial x_1^{*2}}\cdot\frac{\partial T_{12}^{(1)}}{\partial x_1^*}-\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2^{(0)}}{\partial x_1^{*2}}\cdot\frac{\partial T_{21}^{(1)}}{\partial x_2^*}+\\
&+2\frac{\partial \mathcal{V}_2^{(0)}}{\partial x_2^{*2}}\left(\frac{\partial^2 T_{12}^{(1)}}{\partial x_2^{*2}}+\frac{\partial^2 T_{12}^{(1)}}{\partial x_1^{*2}}\right)+\frac{A}{2}\left(\frac{\partial^2 B}{\partial x_2^{*2}}-\frac{\partial^2 B}{\partial x_1^{*2}}\right)+\\
&+\mathcal{V}_1^{(0)}\left(\frac{\partial^3 T_{12}^{(1)}}{\partial x_2^{*2}\partial x_1^*}-\frac{\partial^3 T_{12}^{(1)}}{\partial x_1^{*3}}+\frac{\partial^3 A}{\partial x_1^{*2}\partial x_2^*}\right)+\\
&+\mathcal{V}_2^{(0)}\left(\frac{\partial^3 T_{12}^{(1)}}{\partial x_2^{*3}}-\frac{\partial^3 T_{12}^{(1)}}{\partial x_2^{*2}\partial x_2^*}+\frac{\partial^3 A}{\partial x_2^{*2}\partial x_1^*}\right).
\end{aligned} \qquad (21)$$

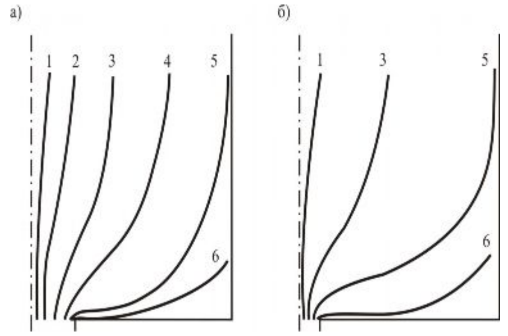
Здесь

$$A=T_{11}^{(1)}-T_{22}^{(1)}; \quad B=\frac{\partial \mathcal{V}_1^{(0)}}{\partial x_2^*}-\frac{\partial \mathcal{V}_2^{(0)}}{\partial x_1^*}; \quad C=T_{12}^{(1)}+T_{21}^{(1)}$$

Поскольку правая часть уравнения (21) известна, то, решив уравнение (21), включающее в себя граничные условия, определим члены, содержащие число Вейсенберга во второй степени, характеризующие распределение скоростей и напряжений.

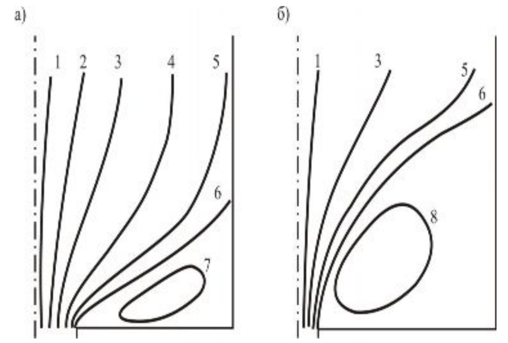
Результаты и их анализ. Реализация задачи была осуществлена численным методом [15, 16] с использованием ПЭВМ. Следует отметить, что правая часть уравнения (21) в отличие от работы [11] содержит производные более высокого порядка.

На рис. 2 и 3 показана функция тока при истечении через щель ньютоновской (We =0) и упруговязкой (We =0,1) жидкостей. Видно, что при уменьшении коэффициента сжатия канала влияние входа в щель на функцию тока возрастает.



We = 0, Ψ: 1 – 0,125, 2 – 0,375, 3 – 0,625, 4 – 0,875, 5 – 0,9715, 6 – 1,0;
а) h′/H′ – 0,2; б) h′/H′ – 0,07

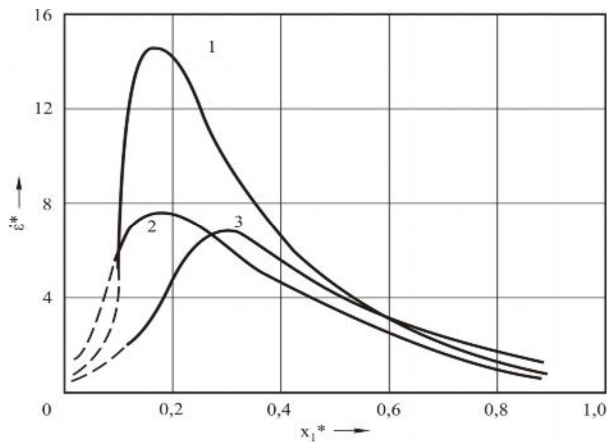
Рис.2. Функция тока при истечении через щель ньютоновской жидкости



We = 0,1, Ψ: 1 – 0,125, 2 – 0,375, 3 – 0,625, 4 – 0,875, 5 – 0,9715,6 – 1,0, 7 – 1,01, 8 – 1,1;
а) h′/H′ – 0,2; б) h′/H′ – 0,07

Рис.3. Функция тока при истечении через щель упруговязкой жидкости

Циркуляционная зона (*рис.3,б*), возникающая при втекании в щель упруговязкой жидкости, от правого угла канала доходит до щели и занимает область треугольной формы, а линии тока образуют входную струю. Следовательно, уменьшение коэффициента сжатия канала (и увеличение We) приводит к возникновению входной затопленной струи.



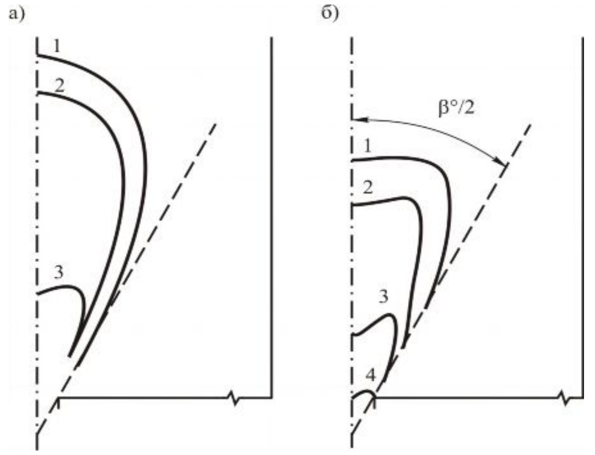
1: h′/H′ = 0,07, We = 0; 2: h′/H′ = 0,2, We = 0;
3: h′/H′ = 0,2, We = 0,1

Рис.4. Распределение безразмерного продольного градиента скорости на оси потока жидкости, втекающей в щель

На *рис.4* показано распределение безразмерного продольного градиента скорости на оси потока при втекании в щель ньютоновской (кривые 1 и 2) и упруговязкой (кривая 3) жидкостей.

Видно, что максимальное значение градиента скорости при течении ньютоновской жидкости достигается на расстоянии $3h'$ и h' (x_1^*=1,5) от щели для коэффициентов сжатия 0,2 и 0,07 соответственно. Появление у текущей жидкости упруговязких свойств смещает максимум на кривой $\dot{\varepsilon}^* = f(x_1^*)$ в область больших x^1 и понижает величину $\dot{\varepsilon}^*_{max}$. Сопоставление экспериментальных данных с результатами расчета показывает, что рассчитанные линии тока и распределение градиента скорости соответствуют экспериментально полученным в области относительно малых скоростей.

Распределение безразмерных нормальных напряжений для коэффициента сжатия канала 0,07 и числа Вейсенберга 0,1 приведено на *рис.5,а*.



угловая полуширина струи (β°/2) – 30°;
а) We = 0,1, h′/H′ = 0,07; T^*: 1 – 5, 2 – 7, 3 – 45;
б) Δn: 1 – 10^{-4}, 2 – $7{\cdot}10^{-4}$, 3 – $15{\cdot}10^{-4}$, 4 – $62{\cdot}10^{-4}$

Рис.5. Распределение безразмерных нормальных напряжений (а) и изохром (б) во входной области щели

Эти результаты довольно хорошо отражают экспериментальные данные по распределению изохром во входной области щели (см. *рис.5,б* [17]). Поскольку в исследуемой системе (полистирол-бромоформ) полимер и растворитель имели равные показатели преломления, то полученные линии равных значений двулучепреломления (изохромы) внутри затопленной входной струи пропорциональны первой разности нормальных напряжений.

Таким образом, рассчитанные линии тока, поля скоростей и их градиентов, а также распределение напряжений при истечении через щель ньютоновской и упруговязкой жидкостей согласуются с имеющимися экспериментальными данными, если ограничиться относительно малыми скоростями, т.е. теми режимами течения, когда упруговязкие свойства только начинают проявляться.

Выводы

Полученные результаты можно рассматривать как указание на то, что численный метод анализа истечения упруговязкой жидкости Максвелла через щель можно использовать для расчета продольных градиентов скорости, реализуемых во входной области щели при докритических ($\dot{\varepsilon} < \dot{\varepsilon}_{кр}$) режимах течения полимерного раствора. Следует, однако, заметить, что в общем случае необходимо учитывать влияние угла входа в щель, что можно сделать, рассмотрев задачу в прямонаклонных или криволинейных координатах.

Проведенный численный анализ имеет определяющее значение в плане подтверждения предложенной в работах [18,19] интерпретации экспериментальных данных, характеризующих особенности резко сходящихся течений растворов полимеров, т.к. интерпретация этих данных требовала решения вопроса о структуре гидродинамического потока во входной области щели (капилляра). Результаты расчета подтверждают полученные из экспериментального решения этого вопроса представления о деформационно-напряженном состоянии элементов жидкости (макромолекул) в резко сходящемся потоке полимерного раствора.

ЛИТЕРАТУРА

1. De Gennes P. G. Coil–stretch thransition of dilute flexible polymers under ultrahigh velocity gradients / de Gennes P. G. // J. Chem. Phys. — 1974. — Vol. 60, № 12. — P. 5030—5042.
2. Peterlin A. Hydrodinamics of macromolecules in a velocity field with longitudinal gradient / Peterlin A. // J. Polym. Sci. Pt. Polym. Letters — 1966. — Vol. 4. № 4. — P. 287—291.
3. Pogrebnyak V. G. Polymer Macromolecules as a Tool for Studying Wall–Adjacent Turbulence Flow / Pogrebnyak V. G. // Proceedings of the 2nd International Symposium on Seawater Drag Reduction / ASERC, Korea – Busan. 2005. — P. 79—90.
4. Encyclopedia of Polymer Science and Technology / Ed. By Mark H. New York : John Wiley. 1967. — V. 6. 818 p.
5. Войткунский Я. И. Уравнения движения жидкости с учетом ее релаксационных свойств / Войткунский Я. И., Амфилохиев В. В., Павловский В. А. // Сб. науч. тр. / Ленингр. кораблестр. ин–т. — Л.. 1970. — № 69. — С. 19—25.
6. Виноградов Г. В. Реология полимеров / Виноградов Г. В., Малкин А. Я. М. : Химия. 1977. — 438 с.
7. Ферри Дж. Д. Вязкоупругие свойства полимеров / Ферри Джон Д.; пер. с англ. под ред. [и с предисл.] Гуля В. Е. М. : Иностр. лит. 1963. — 535 с.
8. Мидлман С. Течение полимеров / Мидлман С.; пер. с англ. Панова Ю. Н.; под ред. Малкина А. Я. — М. : Мир. 1971. — 259 с.
9. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости / Кристенсен Р.; пер. с англ. Рейтмана М. И.; под ред. Шапиро Г. С. — М. : Мир. 1974. — 338 с.
10. Лодж А. С. Эластичные жидкости. Введение в реологию конечнодеформируемых полимеров / Лодж А. С.; пер. с англ. Берковского Б. М. и Шульмана З. П. — М. : Наука. 1969. — 463 с.
11. Накамура К. Медленное истечение вязкоупругой жидкости по коническому каналу через щель / Накамура К. // Сэнкъи кикай гаккай си. — 1978. — Т. 31. № 8. — С. 49—55; перевод № Б-31876 / Завьялов С. К.— М. : Всесоюз. центр перевод. научно-техн. литер. и докумен. 1979. — 18 с.
12. Погребняк В. Г. Деградация растворов полимеров / Погребняк В. Г., Иванюта Ю. Ф., Наумчук Н. В. // Изв. вузов СССР. Сер. Нефть и газ. — 1988. — № 11. — С. 52—57.
13. Астарита Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей / Астарита Дж., Маруччи Дж. — М. : Мир. 1978. — 309 с.
14. Хинце И. О. Турбулентность. Ее механизм и теория / Хинце И. О.; пер. с англ. Яковлевского О. В.; под ред. Абрамовича Г. Н. М. : физ.–мат. гос. из–во. 1963. — 680 с.
15. Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями: пер. со 2–го нем. изд. / Лотар Коллатц ; под общ. ред. Никольского В. В. — М. :Наука. 1968. — 503 с.
16. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ: практ. рук. / Шуп Т.; пер. с англ. Хохрякова В. А.; под ред. Миносцева В. Б.. — М. : Мир. 1981. — 235 с.
17. Бресткин Ю. В. Разворачивание макромолекул при сходящемся течении / Бресткин Ю. В., Амрибахшов Д. Х., Холмуминов А. А., Френкель С. Я. // Изв. АН УзССР. Сер. физ.–мат. наук. — 1988. — № 6. — С. 80—84.
18. Pogrebnyak A. V. Physical behaviour of flexible makromolekuls under conitions of a stretching hydrodynamic fields / Pogrebnyak A. V. // Матеріали 8-ї Міжнародної науково-практичної конференції “Сучасні проблеми науки та освіти” / Харківський нац. ун-т ім. В.Н. Каразіна. — Харків. 2007. — 88 с.
19. Погребняк А. В. Высокоэффективное гидрорезание твердых пищевых продуктов и материалов / Погребняк А. В. // Управление реологическими свойствами пищевых продуктов. — Москоский гос.ун-т пищ. производств. М. 2008. — С. 173—179.

пост.13.06.14