МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Аналитическое исследование нагрева твердых тел радиацией. Сообщение 1

А. Д. ГОРБУНОВ, А. И. ТРИКИЛО

Днепродзержинский государственный технический университет

Получены достаточно простые и точные аналитические решения по расчету температур и термических напряжений в телах простой геометрической формы при их радиационном нагреве в квазистационарной стадии.

Одержані достатньо прості та точні аналітичні рішення по розрахунку температур і термічних напружень у тілах простої геометричної форми при їх радіаційному нагріву у квазістаціонарної стадії.

Obtained sufficiently simple and accurate analytical solutions for the calculating temperature and thermal tenses in the solids of simple form with their radiative heating in the quasi-stationary stage.

Анализ публикаций. Одним из наиболее мощных приближенных методов решения нелинейных задач теплопроводности может быть назван метод интегральных линеаризующих преобразований, которым пользовались Г.П. Бойков [1], В.В. Иванов [2], Ю.В. Видин [3], В.В. Саломатов [4], А.Д. Горбунов [5] и др. В монографии [6, стр. 183] приведен обстоятельный библиографический список, содержащий более сорока источников, в которых использовался указанный метод. Основным недостатком метода является трудность перехода от новой переменной, входящей в ядро преобразования (подстановку), к искомой исходной температуре.

В настоящей статье предлагается новый подход к аналитическому решению задач радиационного нагрева, которое нужно рассматривать отдельно от процессов охлаждения [5].

Постановка задачи. Математическая постановка задачи симметричного радиационного нагрева тел простой геометрической формы от начальной температуры T_0 до T_c имеет вид

$$\frac{\partial\theta(X,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}=\frac{\partial^2 X}{\partial X^2}+\frac{k-1}{X}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial X}, \qquad (1)$$

$$\theta(X,0)=\theta_0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial X}=0, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial\theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial X}=\mathrm{Sk}\left(1-\theta_{\text{п}}^4\right), \qquad (4)$$

где $\theta=T/T_{\text{c}}$; $\theta_0=T_0/T_{\text{c}}$; $\theta_{\text{п}}=\theta(1,\mathrm{Fo})$ — относительная температура на поверхности; $\mathrm{Sk}=\sigma T_{\text{c}}^3 R_0/\lambda$ — число Старка; k — фактор геометрической формы , равный 1, 2, 3 соответственно для пластины, цилиндра и шара; $X=x/R_0$; R_0 — характерный размер тел.

Решение задачи. В качестве ядра преобразования (линеаризации), как правило, берется решение исходной задачи в модели термически тонкого тела (ТТТ), т.е. уравнения

$$d\theta=k\cdot\mathrm{Sk}\cdot\left(1-\theta^4\right)\cdot d\mathrm{Fo}, \qquad (5)$$

где под θ понимается среднемассовая температура тела.

Разделяя переменные и интегрируя (5) с учетом начального условия (2), получим

$$\widetilde{\mathrm{Fo}}=F(\theta)-F(\theta_0), \qquad (6)$$

где $\widetilde{\mathrm{Fo}}=k\cdot\mathrm{Sk}\cdot\mathrm{Fo}$ — модифицированное число Фурье;

$$F(\theta)=\int\frac{d\theta}{1-\theta^4}=\frac{1}{2}\left[\mathrm{Arth}\,\theta+\mathrm{arctg}\,\theta\right]. \qquad (7)$$

Для облегчения расчетов температур по модели ТТТ (6) на рисунке 1 приведена зависимость (7).

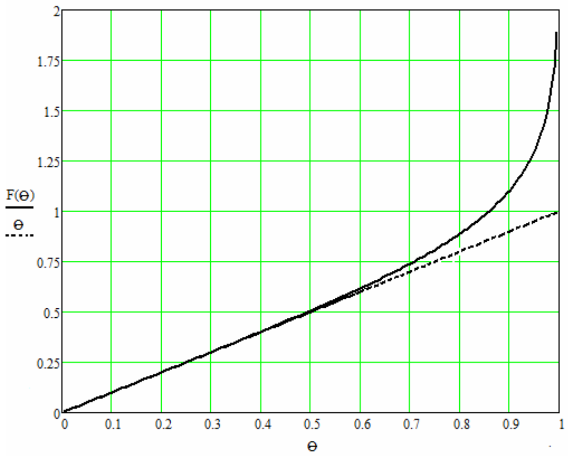

Рис. 1. Зависимость функции $F(\theta)=0{,}5\left[\mathrm{Arth}\,\theta+\mathrm{arctg}\,\theta\right]$

Применяя к системе уравнений (1)...(4) следующую, линеаризующую граничное условие (4), подстановку

$$W(X,\mathrm{Fo}) = \exp[-F(\theta(X,\mathrm{Fo}))], \tag{8}$$

получим постановку задачи в новых переменных

$$\frac{\partial W(X,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2 W(X,\mathrm{Fo})}{\partial X^2} + \frac{k-1}{X}\frac{\partial W}{\partial X} + \psi(X,\mathrm{Fo}), \tag{9}$$

$$W(X,0) = \exp(-F(\theta_0)) = W_0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial W(0,\mathrm{Fo})}{\partial X} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial W(1,\mathrm{Fo})}{\partial X} = -\mathrm{Sk}\cdot W(1,\mathrm{Fo}), \tag{12}$$

$$\psi(X,\mathrm{Fo}) = \frac{\left(4\theta^3(X,\mathrm{Fo})-1\right)}{W(X,\mathrm{Fo})}\cdot\left(\frac{\partial W(X,\mathrm{Fo})}{\partial X}\right)^2. \tag{13}$$

Комплекс (13), имитирующий сток тепла переменной по величине и знаку интенсивности, содержит в себе все нелинейные особенности исходной задачи (1)...(4). В первом приближении искомая температура $W(X,\mathrm{Fo})$ может быть найдена из решения системы (9)...(12) при $\psi(X,\mathrm{Fo}) = 0$. Согласно [8] будем иметь

$$W_1(X,\mathrm{Fo}) = W_0\cdot\sum_{n=1}^{\infty} P_n(\mu_n)\cdot U_n(X)\cdot e^{-\mu_n^2 \mathrm{Fo}}, \tag{14}$$

где $P_n(\mu_n) = \dfrac{2\mathrm{Sk}}{\mathrm{Sk}(\mathrm{Sk}+2-k)+\mu_n^2}$ — тепловая амплитуда; $U_n(X)$ — координатная функция, например, для пластины: $U_n(X) = \cos\mu_n X/\cos\mu_n$; μ_n — корни характеристического уравнения

$$\mathrm{ctg}\mu_n = \mu_n/\mathrm{Sk}. \tag{15}$$

После определения $W(X,\mathrm{Fo})$ следует сделать переход с помощью уравнения (8) от W к исходной температуре θ, однако из-за сложности функции $F(\theta)$ сделать это весьма затруднительно. Для упрощения этого перехода поступим следующим образом.

Сначала воспользуемся разложением функции $F(\theta)$ в ряд при $\theta < 1$

$$F(\theta) = \theta\left(1 + \frac{\theta^5}{5} + \frac{\theta^9}{9} + \frac{\theta^{13}}{13} + \ldots\right). \tag{16}$$

При $\theta \le 0{,}6$ можно ограничиться одним членом ряда (16) и получить

$$F(\theta) = \theta. \tag{17}$$

На рис. 1 для наглядности нанесена прямая (17). Тогда из уравнения (8) получим

$$W = e^{-\theta} \quad \text{или} \quad \theta = -\ln W. \tag{18}$$

В конечной стадии процесса нагрева, когда температуры θ близки к 1 положим в уравнении (7) $\mathrm{Arth}\theta = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\theta}{1-\theta} \approx \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2}{1-\theta}$ и $\mathrm{arctg}\theta \approx \mathrm{arctg}1 = \dfrac{\pi}{4}$.

Тогда $F(\theta) \approx \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{2}{1-\theta} + \dfrac{\pi}{8}$ и окончательно согласно (8) будем иметь

$$\theta(W) = 1 - C_2\cdot W^4, \tag{19}$$

где $C_2 = 2e^{\pi/2} = 9{,}62095476$.

При умеренных, средних температурах можно рекомендовать линейную зависимость, полученную в [4]:

$$\theta(W) = 1{,}4 - 1{,}47W. \tag{20}$$

На рис. 2 наглядно видно, что зависимость (8) лежит между тремя кривыми (18), (20) и (19). Таким образом, искомый переход от W к θ имеет вид:

$$\theta(W) = \begin{cases} -\ln W, & \text{если } 0{,}6 \le W \le 1 \\ 1{,}4 - 1{,}47\cdot W, & \text{если } 1/3 < W < 0{,}6 \\ 1 - C_2 W^4, & \text{при } 0 \le W \le 1/3. \end{cases}$$

Следует отметить, что кривая (8) имеет перегиб в точке $\theta_p = 4^{-1/3} = 0{,}63$ и эта точка замечательна тем, что в ней обращается в ноль нелинейный комплекс (13).

В связи со сказанным решение (6) также упростится. Для начальной стадии нагрева

$$\theta(\mathrm{Fo}) = \theta_0 + \widetilde{\mathrm{Fo}}, \quad \theta_0 \le \theta \le 0{,}6 \tag{21}$$

и конечной стадии

$$\theta(\mathrm{Fo}) = 1 - (1-\theta_0)\cdot e^{-4\widetilde{\mathrm{Fo}}} \tag{22}$$

при $0{,}6 < \theta \le 1$.

Заметим, что зависимость (22) хорошо согласуется с известным уравнением

$$\theta(\mathrm{Fo}) = 1 - (1-\theta_0)\exp(-k\cdot\mathrm{Bi}\cdot\mathrm{Fo}) \tag{23}$$

в случае конвективного нагрева ТТТ, где $\mathrm{Bi} = \alpha R_0/\lambda$ — число Био.

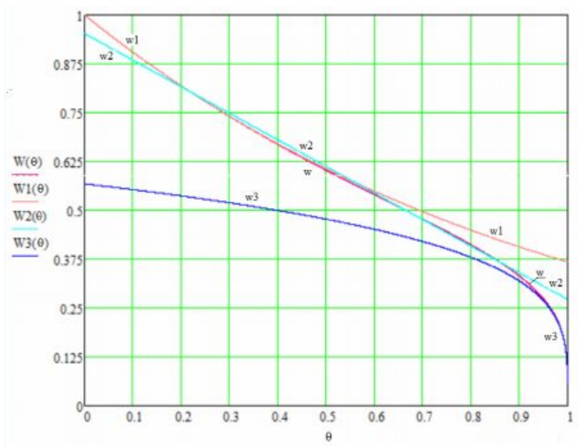

Рис. 2. Зависимости построенные по уравнениям w — (8), w_1 — (18), w_2 — (20) и w_3 — (19)

Зная первое приближение функции W можно, с помощью уравнения (14) найти нелинейный комплекс (13) в первом приближении $\psi_1(X,\mathrm{Fo})$, а затем второе приближение согласно [4], например, для пластины

$$W_2(X,\mathrm{Fo}) = W_1(X,\mathrm{Fo}) +$$
$$+ W_0\cdot\left[\sum_{n=1}^{\infty} P_n(\mu_n)\cdot U_n(X)\int_0^{\mathrm{Fo}}\int_0^1 \psi_1(X,\mathrm{Fo}^*)\cdot \cos\mu_n X \times \right. \tag{24}$$
$$\left. \times \exp\left[-\mu_n^2\cdot(\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}^*)\right] d\mathrm{Fo}^*\cdot dX\right].$$

Второе приближение служит основой для расчета третьего и т.д. приближения до получения решения с необходимой точностью.

Для определения погрешности метода и его сходимости в [4] было произведено сравнение результатов численного расчета исходной системы (1)…(4) на ЭВМ с данными расчета по предложенным уравнениям (14), (24) и (8). Проведенный анализ позволил установить, что погрешность в расчете $\theta(X, \mathrm{Fo})$ по предлагаемому методу не превышает 5 % во всех точках тела для $\mathrm{Sk} \le 0{,}5$ если ограничиться первым приближением, для $0{,}5 \le \mathrm{Sk} \le 2$ — вторым и для $2 \le \mathrm{Sk} \le 5$ — третьим приближением. Максимальная погрешность приходилась на расчет температур в центральных точках тела.

Поскольку число Фурье было $\mathrm{Fo} > 0{,}3$, что соответствует регулярному (квазистационарному) режиму нагрева, ограничимся в уравнении (14) одним первым членом ряда.

Тогда температура на поверхности

$$W_{\text{п}}(\mathrm{Fo}) = W_0 \cdot P_1 \cdot e^{-\mu_1^2 \mathrm{Fo}}, \tag{25}$$

среднемассовая

$$W_{\text{ср}}(\mathrm{Fo}) = m \cdot W_{\text{п}}(\mathrm{Fo}) \tag{26}$$

и в центральных точках

$$W_{\text{ц}}(\mathrm{Fo}) = H_k \cdot W_{\text{п}}(\mathrm{Fo}), \tag{27}$$

где $m = (1 + a)$ — коэффициент термической массивности тела; $a = \mathrm{Sk}/(k+2)$; H_k — амплитуда для центральных точек тела, например, согласно [8] в случае пластины $H_1 = 1/\cos\mu_1 = \sqrt{1 + m\mathrm{Sk}}$; первый корень характеристического уравнения (15):

$$\mu_1 = \sqrt{D/\gamma}; \tag{28}$$

$$D = k\mathrm{Sk}/m; \quad \gamma = \left(1 + \sqrt{1 + 4\rho}\right)/2;$$

$$\rho = D^2 / \left[k(k+2)^2 (k+4)\right].$$

На начальной стадии нагрева, когда $\theta < 0{,}6$, можно использовать (18) и тогда уравнения (25)…(27) для расчета температур на поверхности $\theta_{\text{п}}$, среднемассовой $\theta_{\text{ср}}$ и в центре тела $\theta_{\text{ц}}$ значительно упрощаются до следующей линейной зависимости от времени:

$$\theta_{\text{п}}(\mathrm{Fo}) = C_p + \mu^2 \mathrm{Fo}, \; \theta_{\text{ср}}(\mathrm{Fo}) = C_{cp} + \mu^2 \mathrm{Fo} \quad \text{и}$$

$$\theta_{\text{ц}}(\mathrm{Fo}) = C_c + \mu^2 \mathrm{Fo}, \tag{29}$$

где $C_p = -\ln(W_0 \cdot P) \approx \theta_0 - \ln P$; $C_{cp} = C_p - \ln m$; $C_{\text{ц}} = C_p - \ln H_k$.

Вместо трех уравнений (29) можно записать одну обобщенную формулу

$$\theta_j(\mathrm{Fo}) = C_j + \mu^2 \mathrm{Fo}, \tag{30}$$

где $j = \begin{cases} 1 - \text{температура поверхности}, \\ 2 - \text{среднемассовая}, \\ 3 - \text{в центре ттела} \end{cases}$

В конечной стадии нагрева ($0{,}6 < \theta \le 1$) с учетом зависимости (19) будем иметь

$$\theta_j(\mathrm{Fo}) = 1 - C_{3j} \exp\left(-4\mu^2 \mathrm{Fo}\right), \tag{31}$$

где $C_{3j} = C_2 \cdot W_0^4 \cdot \begin{cases} P^4, \text{если } j = 1 \\ m^4, \text{если } j = 2 \\ H_k^4, \text{если } j = 3. \end{cases}$

Заметим, что согласно (28) в уравнениях (25)…(31) можно заменить $\mu^2 \mathrm{Fo}$ на $\widetilde{\mathrm{Fo}}/(m\gamma)$. Аналогичные зависимости были получены ранее, см. уравнения (21) и (22), для модели ТТТ. Кроме того решения (30) и (31) по нашему мнению соответствуют двум упорядоченным тепловым режимам нагрева тел радиацией, выявленных Г.П. Бойковым [1] полвека назад.

На самой начальной стадии нагрева, при малых числах Фурье ($\mathrm{Fo} < 0{,}1$), расчет температур можно порекомендовать производить по методике, изложенной в [9].

В подавляющем большинстве работ, посвященным радиационному теплообмену [2...7] и др. отсутствуют формулы по определению среднемассовой температуры, без знания которой невозможно рассчитать термические напряжения. В работе [8] показано, что осевые термические напряжения составляют:

на поверхности $\sigma_{\text{п}}(\tau) = S_1 \left| T_{\text{ср}}(\tau) - T_{\text{п}}(\tau) \right|$, Па (32)

и в центре $\sigma_{\text{ц}}(\tau) = S_1 \left| T_{\text{ср}}(\tau) - T_{\text{ц}}(\tau) \right|$, Па. (33)

Приведя последние уравнения к безразмерному виду, получим относительные термические напряжения

на поверхности $\widetilde{\sigma}_{\text{п}}(\mathrm{Fo}) = \theta_{\text{ср}}(\mathrm{Fo}) - \theta_{\text{п}}(\mathrm{Fo})$ (34)

и в центре

$$\widetilde{\sigma}_{\text{ц}}(\mathrm{Fo}) = \theta_{\text{ср}}(\mathrm{Fo}) - \theta_{\text{ц}}(\mathrm{Fo}), \tag{35}$$

где $\widetilde{\sigma} = \sigma/\sigma_{01}$; $0 \le \widetilde{\sigma} \le 1$; $\sigma_{01} = S_1 \cdot T_c$ — максимально возможные термические напряжения, Па; $S_1 = \beta E/(1 - \nu)$; β — линейный коэффициент термического расширения, 1/К; E — модуль упругости Юнга, Па; ν — коэффициент Пуассона.

Выводы

1. С помощью подстановки, линеаризирующей граничное условие, получены приближенные аналитические решения по расчету температур и термических напряжений в телах простой геометрической формы при их радиационном нагреве.

2. Сопоставление с численными решениями температур поверхности и центра пластины свидетельствует о достаточной для инженерных расчетов точности.

3. Получены приближенные аналитические формулы для расчета полей температур, подтверждающие существование двух упорядоченных тепловых режимов при лучистом нагреве твердых тел, выявленных ранее Бойковым Г.П.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойков Г. П. Прогрев тел под действием лучистого тепла / Изв. ТПИ. — 1957. Т. 89, 33.
2. Иванов В. В. Расчет радиационного охлаждения тепловыделяющих элементов // ИФЖ. — 1966. — Т. XI. — № 4. — С. 542—544.
3. Видин Ю.В., Иванов В.В. Расчет температурных полей в твердых телах, нагреваемых конвекцией и радиацией одновременно. — Красноярск: КПИ, 1971. — 144 с.
4. Саломатов В. В., Горбунов А. Д. Аналитическое исследование прогрева твердых тел радиаци-

ей // Изв. вузов. Энергетика. — 1969. № 3. — С. 124—127.
5. Горбунов А.Д. Аналитическое исследование охлаждения твердых тел радиацией // Математичне моделювання. — Днепродзержинск: ДГТУ, 2013, 1(28). — С. 22—27.
6. Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. — М.: Наука, 1975. — 228 с.
7. Саломатов В. В. К расчету радиационного охлаждения твердых тел // ИФЖ. — 1969. — Т. 17. — № 1. — С. 127—134.
8. Горбунов А. Д. К аналитическому расчету термических напряжений при конвективном нагреве тел простой формы // Математичне моделювання. — Днепродзержинск : ДГТУ, 2012. № 1(26). — С. 39—45.
9. Горбунов А. Д. Аналитический расчет процессов радиационного нагрева (охлаждения) тел на начальной стадии // Математичне моделювання — Днепродзержинск : ДГТУ, 2012, № 2(27). — С. 90—94.

пост.26.12.13