

## Розробка комп'ютерної програми, що реалізує математичну модель тривимірного руху сталевго дроту при введенні під рівень розплаву на установці ківш-піч

*К. С. КРАСНИКОВ, С. Є. САМОХВАЛОВ, В. П. ПІПТЮК*

*Дніпродзержинський державний технічний університет*

Перевірено в дії математичну модель траєкторії руху дроту під час продувки металу в тривимірному випадку. Розроблено алгоритм комп'ютерної програми, що реалізує цю математичну модель. Наведені ілюстрації діючої програми.

Проведена в дійстві математична модель траєкторії движєния проволоки во время продувки металла в трехмерном случае. Разработан алгоритм компьютерной программы, реализующей математическую модель. Представлены иллюстрации работающей программы.

Mathematical model of the wire trajectory moving during the metal purge in three dimensions is tested/The algorithm of the computer program that implements this mathematical model is developed. Illustrations of the working program are presented.

В існуючих роботах [1..2] проведені дослідження руху металевго дроту з урахуванням теплопровідності дроту і гідродинаміки розплаву під час продувки аргоном. В роботі [3] побудовано математичну модель тривимірному руху сталевго дроту при його введенні в розплав металу. Ця модель достатньо точно відтворює траєкторію тому, що враховуються сили тяжіння, пружності дроту та опору з боку розплаву.

В цій роботі варто перевірити правильність відгуку математичної моделі на певні умови: зменшен-

ня/збільшення густини розплаву та дроту, різні кути введення, рух розплаву.

**Математична модель.** Дріт побудовано за до допомогою набору  $N$  твердих стрижнів однакової довжини  $l$ , зчеплених в єдину систему, які утримуються силами пружності. В якості узагальнених координат системи обрано азимутальні  $\theta_i$  та полярні  $\varphi_i$  кути в сферичній системі координат, які відносяться до  $i$ -го стрижня.

Кінетична та потенціальна енергії системи стрижнів [4]:

$$T = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{m_i}{2} (v_i^x{}^2 + v_i^y{}^2 + v_i^z{}^2) + l^2 \frac{m_i}{12} (\omega_i^2 + \sigma_i^2 \sin^2 \theta_i) \right] \quad (1)$$

$$U = \sum_{i=1}^N \left[ g k_i m_i z_i + \frac{K_i}{2} (\Delta \theta_i^2 + \Delta \varphi_i^2 \sin^2 \theta_i) \right] \quad (2)$$

де  $m_i$  – маса,  $v_i$  – швидкість,  $\omega_i$  та  $\sigma_i$  – кутові швидкості відповідно кутів  $\theta_i$  та  $\varphi_i$ , а  $x, y, z$  – декартові координати  $i$ -го стрижня;  $g$  – прискорення вільного падіння,  $k_i = (1 - \rho_0 / \rho_i)$ , де  $\rho_0$  і  $\rho_i$  – густина розплаву і середня густина  $i$ -го стрижня;  $K_i$  – коефіцієнти пружності в з'єднанні  $(i-1)$ -го та  $i$ -го стрижнів;

$$\Delta \theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}, \quad \Delta \varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$$

Динаміку системи визначено  $2N$  рівняннями Лагранжа другого роду [5]:

$$\begin{aligned} \dot{p}_k^\theta &= \frac{\partial T}{\partial \theta_k} - \frac{\partial U}{\partial \theta_k} + Q_k^\theta \\ \dot{p}_k^\varphi &= \frac{\partial T}{\partial \varphi_k} - \frac{\partial U}{\partial \varphi_k} + Q_k^\varphi, \quad k = \overline{1, N} \end{aligned} \quad (3)$$

$$Q_k^\theta = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \theta_k}, \quad Q_k^\varphi = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \varphi_k}$$

де  $\dot{p}_k^\theta = \frac{\partial T}{\partial \omega_k}$ ,  $\dot{p}_k^\varphi = \frac{\partial T}{\partial \sigma_k}$  – узагальнені імпульси

$\vec{f}_i$  – вектор сили опору з боку розплаву, а  $\vec{r}_i$  – радіус-вектор центру мас стрижня.

Вирази після диференціювання підставлені в рівняння Лагранжа. Знайдена система  $2N$  рівнянь для даної механічної моделі.

Отримана система має структуру системи лінійних рівнянь відносно кутових прискорень. Зробити аналітичний розв'язок системи такої складності практично неможливо. Вирішуємо систему чисельно, розбиваючи часову вісь на шари, які нумеруємо індексом  $n$ . На кожному часовому шарі (при фіксованому  $n$ ) знаходимо матрицю коефіцієнтів при невідомих прискореннях та стовпчик вільних коефіцієнтів, а потім за допомогою методу Гауса знаходимо прискорення. Для наступного часового кроку  $(n+1)$  визначаємо кутові швидкості та кути за формулами:

$$\begin{aligned} \omega_i^{n+1} &= \omega_i^n + \alpha_i^n \Delta t \\ \sigma_i^{n+1} &= \sigma_i^n + \beta_i^n \Delta t \\ \theta_i^{n+1} &= \theta_i^n + \omega_i^{n+1} \Delta t \\ \varphi_i^{n+1} &= \varphi_i^n + \sigma_i^{n+1} \Delta t \end{aligned} \quad (4)$$

**Розробка алгоритму.** Поділимо програму на такі частини:

- 1) Обробка вхідних даних моделювання
- 2) Обчислення математичної моделі
- 3) Вивід на екран поточного стану системи.

В першій частині підготуємо фізичні константи та змінні дані. Для зручності вибираємо міжнародну метричну систему одиниць СІ. Отже нам потрібні: прискорення вільного падіння, швидкість подачі дроту ( $v_0$ ), величина кроку між часовим шаром  $n$  та  $n-1$  ( $\Delta t$ ). А також для системи стрижнів: стартові кути, кутові шви-

дкості, довжина, маса, коефіцієнти пружності та опору, середня густина, діаметри. І для розплаву: середня густина, вектори швидкостей в різних точках розплаву. Деякі математичні вирази не будуть змінюватися протягом обчислення (наприклад  $g k_i m_i$ ), тому їх визначимо одразу тут в першій частині.

Для виводу на екран системи використаємо графічну бібліотеку, яка має в тривимірному просторі об'єм ковша та кожен стрижень у формі циліндру. Розміри циліндрів визначаємо за допомогою обраного коефіцієнту переводу метрів у систему одиниць графічної бібліотеки. Вертикальна пряма ( $x=0, y=0$ ) проходитьиме через центр об'єму ковша.

Таким чином комп'ютер матиме всі необхідні дані для початку обчислення першого кроку моделювання і виводу на екран поточного стану системи.

Друга частина програми виконує циклічно, на кожному часовому шарі, виконує наступні дії:

А) Отримання нових коефіцієнтів (при невідомих та вільних) в системі рівнянь за допомогою бібліотеки звичайних математичних функцій (яка є на кожному сучасному комп'ютері)

Б) Вирішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою метода Гауса

В) Інтегрування за допомогою методу Ейлера-Кромера з метою отримання кутів та кутових швидкостей для кожного стрижня

Г) Обчислення сили опору рухові стрижней з боку розплаву

Д) Обчислення кутових швидкостей в момент торкання дротом стінок ковша

Для обчислення сили опору необхідно знати швидкість розплаву. Вектор швидкості розплаву  $V_{розплаву}$  в точці центру мас  $i$ -го стрижня визначаємо за допомогою координат точки. Для обертання розплаву по осі  $z$  використовуємо наступні формули:

$$\begin{aligned} v_{розплаву}^x &= \frac{y_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} \text{coef} \\ v_{розплаву}^y &= \frac{-x_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} \text{coef} \\ v_{розплаву}^z &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

де  $\text{coef}$  – коефіцієнт для зміни величини швидкості розплаву.

Момент торкання стрижня дна ковша фіксуємо при  $z_i < 0$ . При цьому визначаємо кутову швидкість наступним виразом:

$$\omega_i = \frac{b}{l} v_i^z \sin \theta_i \quad (6)$$

де  $b$  – коефіцієнт для регулювання інтенсивністю удару.

В момент торкання стінки ковша ( $x_i^2 + y_i^2 > \text{радіус}_{\text{ковша}}^2$ ) кутові швидкості стрижня визначаємо так:

$$\begin{aligned} \omega_i &= \frac{b}{l} (v_i^x \cos \theta_i \cos \varphi_i - v_i^y \cos \theta_i \sin \varphi_i) \\ \sigma_i &= \frac{b}{l} (v_i^x \sin \theta_i \sin \varphi_i - v_i^y \sin \theta_i \cos \varphi_i) \end{aligned} \quad \text{В.П. (7)}$$

Третя частина передає графічній бібліотеці точні координати і кути стрижнів для виводу на екран стану системи. На відміну від другої, третя частина

програми працює 25 разів на секунду – що є достатнім для людського сприйняття і мало навантажує комп'ютер.

Окрім зображення дроту та ковша для зручності додаємо:

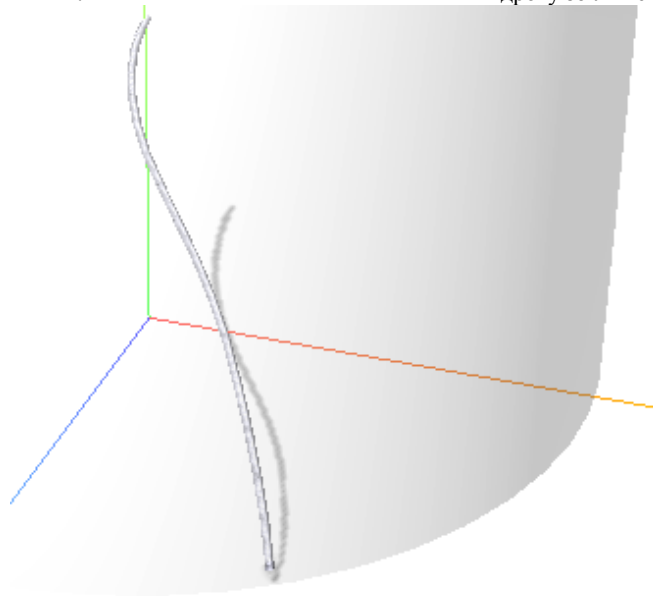
1) Зображення початку декартової системи координат (центр дна циліндру, який є заданим об'ємом ковша) трьома осьовими лініями

2) Декілька векторів швидкості в різних точках розплаву

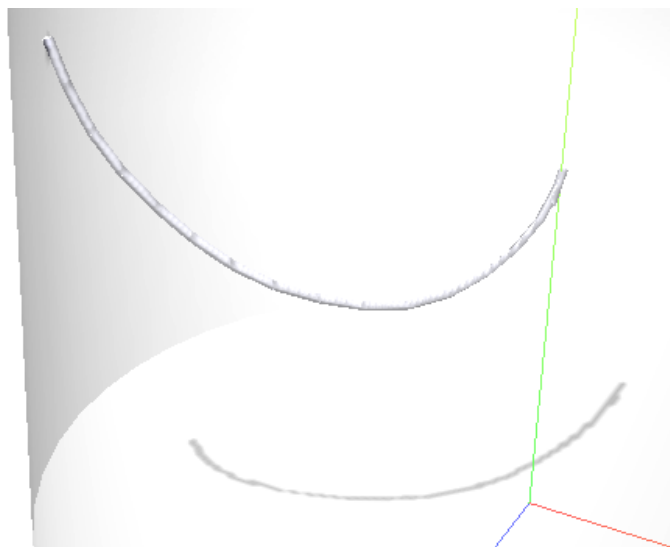
Точку спостереження можна змінювати, тому додаємо цю можливість для спостереження за станом системи з різних боків за допомогою ввідних пристроїв комп'ютера – клавіатури чи миші.

**Тестування програми.** Обрано три початкові умови (швидкість введення дроту однакова):

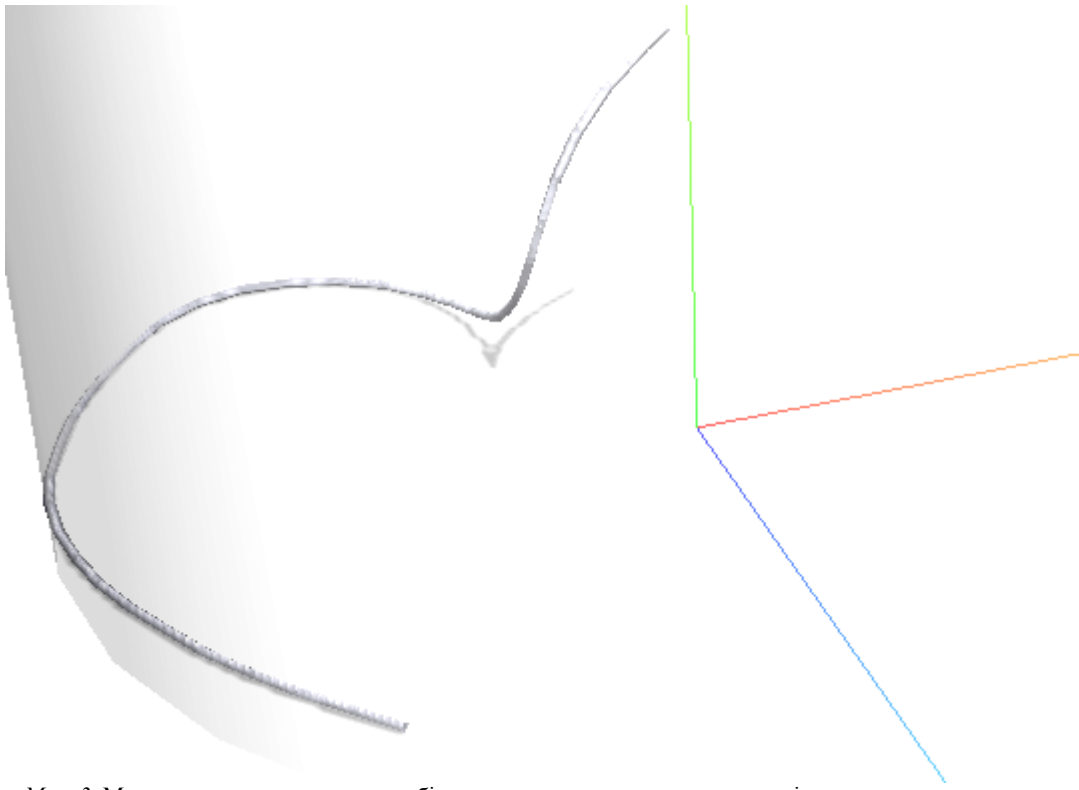
- 1) кути першого стрижня  $\theta_0 = 150$ ,  $\varphi_0 = 0$ ; густина дроту значно більша ніж розплаву, розплав рухається проти годинникової стрілки (мал. 1)
- 2) кути першого стрижня  $\theta_0 = 150$ ,  $\varphi_0 = 0$ ; густина розплаву значно більша ніж дроту, розплав рухається за годинниковою стрілкою (мал. 2)
- 3) кути першого стрижня  $\theta_0 = 120$ ,  $\varphi_0 = -90$ ; густина розплаву менше ніж дроту, розплав нерухомий, максимальна довжина дроту збільшена (мал. 3)



Мал. 1. Дріт торкається стінки ковша, рухаючись за розплавом проти годинникової стрілки



Мал. 2. Дріт торкається стінки ковша, рухається за розплавом



Мал. 3. Максимальна довжина дроту збільшена, густина розплаву менше ніж густина дроту

На малюнках зелена лінія – вісь Z, блакитна – вісь X, червона – вісь Y. Площина XOY – дно ковша, де наочно зображено тінь від уявного джерела світла.

#### Висновки

- 1) Підтверджено якісно правильне моделювання руху сталевго дроту при використанні даної математичної моделі. Досягнення кількісної точності вимагає введення реальних даних, тобто фізичних характеристик дроту та розплаву
- 2) Математична модель придатна для майбутніх досліджень, наприклад: під час руху в розплаві частина дроту може від'єднатися і рухатися вільно; розрахунок кутів залишкової деформації (справжній металевий дріт при згині відновлює попередню форму неповністю); уникнення проблеми нестійкості обчислення при наближенні стрижня до вертикалі; підвищення швидкості роботи програми.

#### ЛІТЕРАТУРА

- 1) Болотов В. Ю., Павлюченков И. А., Самохвалов С. Е., Черномаз Г. Н. Математическая модель

комплексной задачи движения, плавления и усвоения проволоки при продувке металла в сталеразливочном ковше. // Сборник научных трудов Государственной металлургической академии Украины. (Энергетика, Металлургия). — Днепропетровск, 1999. — С. 113—116.

- 2) Болотов В. Ю., Самохвало С. Е., Комплексная задача движения, плавления и усвоения проволоки при продувке металла в сталеразливочном ковше. // Сборник научных трудов ДДТУ. (Металлургия). — Днепродзержинск, 1998. — С. 39—44.
- 3) Піптюк В. П., Самохвалов С. Е., Гнип Р. Р., Павлов С. М., Овчаренко Т. М. Вивчення траєкторії руху дроту при введенні в металеву ванну під час продувки аргоном на установці ківш-піч. // Математичне моделювання. Дніпродзержинськ. — 2010. — № 1 (22). — С. 21—24.
- 4) Лурье А. И. Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961. — 824 с.
- 5) Компанеев А. С. Курс теоретической физики. Том 1. Элементарные законы. — М.: Просвещение, 1972. — 512 с.