

Рис. 4. График снижения ошибки при обучении нейроконтроллера

ЛИТЕРАТУРА

1. Norgaared M., Ravn O., Poulsen N., Hansen L. Neural Networks for Modelling and Control of Dynamic Systems. — London : Springer, 2000.
2. Клепиков В. Б., Палис Ф., Цепковский Ю. А. Гибридные нейронные сети в управлении электромеханическими системами // Вестник НТУ «ХПИ». — 2003. — Вып. 10, Т.1. — С. 29—33.
3. Каллан Р. Основные концепции нейронных сетей / Р. Каллан / — М., 2001. — 233 с.
4. Галушка А. Теория нейронных сетей / А. Галушка / — М., 2000. — 435 с.
5. Терехов В. А., Ефимов Д. В., Тюкин И. Ю. Нейросетевые системы управления / В. А. Терехов, Д. В. Ефимов, И. Ю. Тюкин / — М. : ИПРЖР, 2002. — 80 с.
6. Руденко О. Г., Бодянский Е. В. Основы теории искусственных нейронных сетей / О. Г. Руденко, Е. В. Бодянский — Харьков : Телетех, 2002. — 317 с.
7. Круглов В. В., Борисов В. В., Искусственные нейронные сети. Теория и практика / В. В. Круглов, В. В. Борисов / — М. : Горячая линия — Телеком, 2001. — 382 с.
8. Осовский С. Нейронные сети для обработки информации / С. Осовский [Пер. с польского И. Д. Рудинского]. — М. : Финансы и статистика, 2002. — 344 с.
9. Медведев В., Потемкин В. Нейронные сети MATLAB6 / В. Медведев, В. Потемкин / — С.-Пб., 2001. — 324 с.

пост.10.04.13

Аналитическое исследование охлаждения твердых тел радиацией

А. Д. ГОРБУНОВ

Днепродзержинский государственный технический университет

Получены достаточно простые и точные аналитические решения по расчету температур и термических напряжений в телах простой геометрической формы при их радиационном охлаждении в квазистационарной стадии.

Одержані достатньо прості та точні аналітичні рішення по розрахунку температур і термічних напружень у тілах простої геометричної форми при їх радіаційному охолодженні у квазістаціонарній стадії.

Obtained sufficiently simple and accurate analytical solutions for the calculating temperature and thermal tenses in the solids of simple form with their radiative cooling in the quasi-stationary stage.

Анализ публикаций. В литературе имеется значительное количество приближенных аналитических методов нахождения температурного поля тел, нагреваемых радиацией [1..4] и ряд других.

Как известно, например, в [5], в отличие от конвективного теплообмена, при теплообмене излучением процессы нагрева и охлаждения не являются симмет-

ричными, поэтому их приходится рассматривать по отдельности и работ, посвященных этой теме весьма мало [6, 7].

Постановка задачи. Математическая постановка задачи симметричного радиационного охлаждения

тел простой геометрической формы от начальной температуры T_0 до T_c имеет вид

$$\frac{\partial \theta(X, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 X}{\partial X^2} + \frac{k-1}{X} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial X}, \quad (1)$$

$$\theta(X, 0) = \theta_0 \equiv 1, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta(0, Fo)}{\partial X} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta(1, Fo)}{\partial X} = -Sk(\theta_n^4 - \theta_c^4), \quad (4)$$

где $\theta = T/T_0$; $\theta_c = T_c/T_0$; $\theta_n = \theta(1, Fo)$ — относительная температура на поверхности; $Sk = \sigma T_0^3 R_0 / \lambda$ — число Старка; k — фактор геометрической формы, равный 1, 2, 3 соответственно для пластины, цилиндра и шара; $X = x/R_0$; R_0 — характерный размер тел.

Для простоты анализа сначала решим задачу при нулевой температуре охлаждающей среды.

Решение задачи при $\theta_c = 0$. Применяя к системе уравнений (1)...(4) преобразование Г.П. Бойкова [3]

$$W(X, Fo) = \exp[-F(\theta(X, Fo))], \quad (5)$$

где $F(\theta) = 1/(3\theta^3)$, получим постановку задачи в новых переменных

$$\frac{\partial W(X, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 W(X, Fo)}{\partial X^2} + \frac{k-1}{X} \frac{\partial W}{\partial X} + \psi(X, Fo), \quad (6)$$

$$W(X, 0) = \exp(-F(\theta_0)) = \exp(-1/3) = W_0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial W(0, Fo)}{\partial X} = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial W(1, Fo)}{\partial X} = -Sk \cdot W(1, Fo); \quad (9)$$

$$\psi(X, Fo) = \frac{(4\theta^3(X, Fo) - 1)}{W(X, Fo)} \cdot \left(\frac{\partial W(X, Fo)}{\partial X} \right)^2. \quad (10)$$

Комплекс (10), имитирующий сток тепла переменной по величине и знаку интенсивности, содержит в себе все нелинейные особенности исходной задачи (1)...(4). В первом приближении искомая температура $W(X, Fo)$ может быть найдена из решения системы (6)...(9) при $\psi(X, Fo) = 0$. Согласно [8] будем иметь

$$W_1(X, Fo) = W_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\mu_n) \cdot U_n(X) \cdot e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (11)$$

где $P_n(\mu_n) = \frac{2Sk}{Sk(Sk+k-2) + \mu_n^2}$ — тепловая амплитуда;

$U_n(X)$ — координатная функция, например, для пластины: $U_n(X) = \cos \mu_n X / \cos \mu_n$; μ_n — корни характеристического уравнения

$$\text{ctg} \mu_n = \mu_n / Sk. \quad (12)$$

После определения $W(X, Fo)$ исходная температура найдется из разрешения подстановки (5) относительно θ :

$$\theta(X, Fo) = (-3 \ln W(X, Fo))^{-1/3}. \quad (13)$$

Следует отметить, что функция $F(\theta)$ в уравнении (5) является с точностью до постоянной решением задачи для модели термически тонкого тела (ТТТ). Так, из граничного условия (4) при $\theta_c = 0$, понимая под θ

среднемассовую температуру, с учетом начального условия (2), получим

$$\tilde{Fo} = F(\theta) - F(\theta_0) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\theta^3} - \frac{1}{\theta_0^3} \right) \quad (14)$$

или разрешая температуру в (14) от времени (для прямой задачи), будем иметь

$$\theta(Fo) = (1 + 3\tilde{Fo})^{-1/3}, \quad (15)$$

где $\tilde{Fo} = k \cdot Sk \cdot Fo$ — модифицированное число Фурье.

Зная первое приближение функции W можно, с помощью уравнения (11) найти нелинейный комплекс (10) в первом приближении $\psi_1(X, Fo)$, а затем второе приближение согласно [4], например, для пластины

$$W_2(X, Fo) = W_1(X, Fo) + W_0 \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} P_n(\mu_n) \cdot U_n(X) \int_0^{Fo} \psi_1(X, Fo^*) \cdot \cos \mu_n X \times \exp[-\mu_n^2 \cdot (Fo - Fo^*)] dFo^* \cdot dX \right]. \quad (16)$$

Второе приближение служит основой для расчета третьего и т.д. приближения до получения решения с необходимой точностью.

Оценим погрешность первого приближения при $Sk = 1,5$ и $\theta_c = 0$ путем сопоставления с данными численного решения на ПЭВМ [7], приведенные в таблице 1. Поскольку число Фурье было $Fo > 0,3$, что соответствует регулярному (квазистационарному) режиму охлаждения, ограничимся в уравнении (11) одним первым членом ряда.

Таблица 1. Результаты расчета времени и температуры для неограниченной пластины при $Sk = 1,5$ и $\theta_c = 0$

$\theta_n(Fo)$	Fo			Fo	$\theta_c(Fo)$		
	Данные ЭВМ [7]	Согласно (17) и (13)	По (36)		Данные ЭВМ [7]	Согласно (19) и (13)	По (38) [7]
0,7	0,38	0,888	0,385	0,3	0,901	0,884	0,905
0,6	0,98	0,774	0,981	0,5	0,813	0,789	0,813
0,5	2,00	1,92	1,970	1	0,676	0,659	0,677
0,4	4,07	4,53	3,970	2	0,517	0,538	0,517
0,3	9,1	11,84	9,1035	5	0,389	0,403	0,390
0,2	29	41,86	29,17	10	0,301	0,322	0,298
0,1	224	339,5	224,55	50	0,166	0,189	0,166

Тогда температура на поверхности

$$W_n(Fo) = W_0 \cdot P_1 \cdot e^{-\mu_1^2 Fo}, \quad (17)$$

среднемассовая

$$W_{cp}(Fo) = m \cdot W_n(Fo) \quad (18)$$

и в центральных точках

$$W_{ц}(Fo) = H_k \cdot W_n(Fo), \quad (19)$$

где $m = (1 + a)$ — коэффициент термической массивности тела; $a = Sk/(k + 2)$; H_k — амплитуда для центральных точек тела, например, согласно [8] в случае пластины $H_1 = 1/\cos \mu_1 = \sqrt{1 + mSk}$; первый корень характеристического уравнения (12):

$$\mu_1 = \sqrt{D/\gamma}; \quad (20)$$

$$D = kSk/m; \quad \gamma = (1 + \sqrt{1 + 4\rho})/2;$$

$$\rho = D^2 / [k(k+2)^2(k+4)].$$

Далее приступим к решению исходной задачи.

Решение при $\theta_c \neq 0$. Теперь используем ту же подстановку (5), в которой функция $F(\theta)$ заменяется на:

$$F(\theta) = \frac{u(V)}{\theta_c^3}, \quad (21)$$

где $u(V) = \frac{1}{2} [\text{Arth}|V| + \arctg V]$; $V = \frac{\theta}{\theta_c} = \frac{T}{T_c}$; аргумент

функции $\text{Arth}|V| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\theta_c + \theta_n}{\theta_c - \theta_n} \right|$ — берется по модулю.

Заметим, что функция $F(\theta)$ является решением исходной задачи (1)...(4) в модели ТТТ, т.е. уравнения

$$d\theta = -kSk(\theta^4 - \theta_c^4) \cdot dFo. \quad (22)$$

Разделяя переменные и интегрируя (22), получим

$$Fo_c = u(V) - u(V_0), \quad (23)$$

где $Fo_c = \theta_c^3 \overline{Fo} \equiv k \cdot Sk_c \cdot Fo$; $Sk_c = \sigma T_c^3 R_0 / \lambda$ — число Старка, отнесенное к температуре окружающей среды T_c , К; $V_0 = 1/\theta_c = T_0/T_c$.

Применяя, как и ранее, к системе уравнений (1)...(4) подстановку (5), получим те же уравнения (6)...(10), только начальное условие (7) станет:

$$W_0 = \exp[-u(V_0)/\theta_c^3]. \quad (24)$$

Первое приближение для расчета функции W_1 по (11), а также уравнения (16)...(20) остаются прежними, в них только начальное значение W_0 будет определяться не по соотношению (7), а по (24). После определения W следует сделать переход с помощью уравнения (5) от W к исходной температуре θ , однако из-за сложности функции $u(\theta)$ это сделать весьма затруднительно. Для упрощения этого перехода поступим следующим образом.

Сначала воспользуемся разложением функции $u(V)$ в ряд при больших $V > 1$:

$$u(V) \cong \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3V^3} + \frac{1}{7V^7} + \frac{1}{11V^{11}} + \dots \quad (25)$$

Затем, из уравнения (17) в стадии регулярного режима охлаждения ($Fo > 0.3$) путем логарифмирования и с учетом трех членов ряда (25), получим формулу для расчета температуры поверхности:

$$Fo = (\ln P + G) / \mu_1^2, \quad (26)$$

где $G = \ln W_0 - \ln W_n = \frac{1}{3} \left[\frac{1+\varepsilon}{\theta^3} - (1+\varepsilon_0) \right] \approx \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\theta^3} - 1 \right)$ —

что совпадает с полученным ранее уравнением (14); $\varepsilon = \frac{3}{7V^4}$; $\varepsilon_0 = \frac{3}{7V_0^4}$ — малые величины, которыми

можно пренебречь или впоследствии уточнить θ путем последовательного расчета по формуле (26) при $\varepsilon \neq 0$.

По аналогии из уравнения (19) получим формулу для расчета температуры θ_n в середине тела

$$Fo = (\ln H_k + G) / \mu_1^2 \quad (27)$$

и среднемассовую θ_{cp} через (18)

$$Fo = (\ln m + G) / \mu_1^2. \quad (28)$$

При больших числах Фурье и достаточно малых Sk из уравнений (26), (27) можно получить простые формулы для расчета температуры поверхности $\theta_n(Fo) = (1 + 3\mu_1^2 Fo)^{-1/3}$ и центра $\theta_c(Fo) = (3\mu_1^2 Fo)^{-1/3}$.

Данные табл. 1 показывают, что погрешность первого приближения может достигать 15%, а использование второго сопряжено с математическими сложностями.

Из более точных методов можно привести приближенное решение В.В. Саломатова [7] в виде интегрального уравнения относительно температуры на поверхности:

$$\theta_n(Fo) = 1 - k \int_0^{Fo} Q(\eta) \cdot d\eta - g \cdot Q(Fo) - S(Fo), \quad (29)$$

где $g = \frac{1}{k+2}$;

$$S(Fo) = - \int_0^{Fo} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2} \cdot Sk [\theta_n^4 - \theta_c^4] \cdot \exp(-\mu_n^2(Fo - \eta)) d\eta;$$

$Q(Fo) = Sk(\theta_n^4(Fo) - \theta_c^4)$ — относительный тепловой поток на поверхности.

В квазистационарной стадии охлаждения, когда $Fo > 0.3$, суммой ряда, т.е. последним слагаемым (29) можно пренебречь. Тогда, дифференцируя по времени Fo выражение (29) при $S = 0$, разделяя переменные и интегрируя, получим

$$Fo_c = \Phi(\theta) - \Phi(\theta_*), \quad (30)$$

где $\Phi(\theta) = u(V) - b \cdot \ln(\theta^4 - \theta_c^4)$; $b = Sk_c / (k+2)$;

$V_* = \theta_* / \theta_c$; θ_* — начальная модифицированная температура поверхности, находится из интегрального уравнения (29) при $Fo = 0$:

$$\theta_* = 1 - a \cdot (\theta_*^4 - \theta_c^4). \quad (31)$$

Для облегчения расчетов $\theta_* = f(a, \theta_c)$ в табл. 2 приведено табличное решение [7] алгебраического уравнения четвертой степени (31) для ряда значений a и θ_c . Получим несколько приближенных аналитических решений уравнения (31). С целью уменьшения числа переменных приведем его к каноническому виду:

$$NZ^4 + Z - 1 = 0, \quad (32)$$

где $Z = \theta_* / C$; $N = a \cdot C^3$; $C = 1 + a\theta_c^4$; $a = Sk / (k+2)$.

Таблица 2. Корни уравнения (31) согласно [7]

θ_c	$a = \frac{Sk}{k+2}$				
	0,1	0,25	0,5	0,75	1,0
0	0,9264	0,8625	0,7978	0,7559	0,7345
0,25	0,9268	0,8628	0,7985	0,7570	0,7260
0,5	0,9310	0,8710	0,8138	0,7755	0,7489
0,75	0,9503	0,9087	0,8708	0,8486	0,8334

Применяя к уравнению (32) метод касательных Ньютона, в [5] было получено

$$Z_{k+1} = \frac{1 + 3N \cdot Z_k^4}{1 + 4N \cdot Z_k^3}. \quad (33)$$

Число итераций по уравнению (33), необходимое для достижения заданной точности ε , когда $|Z_{k+1} - Z_k| \leq \varepsilon$, можно значительно сократить, если правильно выбрать первое приближение. Полагая в (33) $Z_k = 1$, получим уравнение

$$Z = 1 - N/(1 + 4N), \quad (34)$$

справедливое при малых значениях N (например, при $N < 0,58$ погрешность расчета Z не превышает $\Pi_Z \leq 5\%$).

Для больших N из (32) $Z \approx N^{-1/4}$ или более точно, после подстановки в (33), будем иметь

$$Z = \frac{1}{1/4 + N^{1/4}}. \quad (35)$$

На рис. 1 приведено графическое решение уравнения (32).

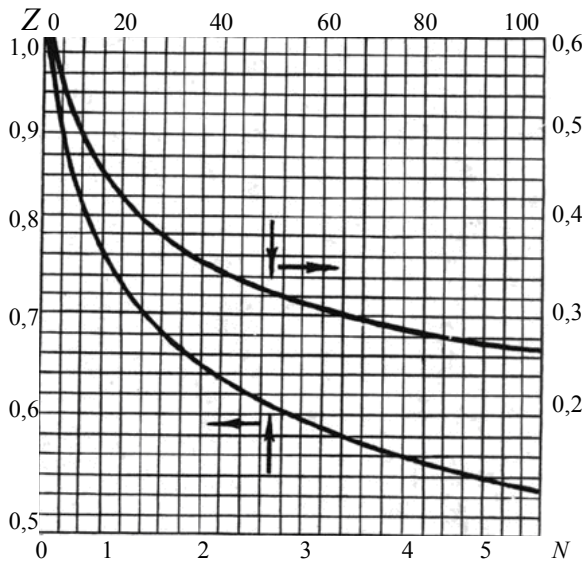


Рис. 1. Графическое решение уравнения $NZ^4 + Z - 1 = 0$

Пример расчета θ_* . Пусть $a = 0,1$; $\theta_c = 0,5$. Тогда $C = 1 + 0,1 \cdot 0,5^4 = 1,0062$; $N = 0,1 \cdot 1,0062^3 = 0,1019$. Расчет по (34): $Z = 1 - 0,1019/(1 + 4 \cdot 0,1019) = 0,9276$. Окончательно $\theta_* = C \cdot Z = 1,0062 \cdot 0,9276 = 0,933$. Согласно табл. 2 $\theta_* = 0,9310$. Погрешность расчета θ_* в данном случае не превышает $\Pi_{\theta_*} = 0,3\%$.

Следует отметить, что определение θ_* согласно [7] зависит от двух величин, а расчет по формулам (33)...(35) или по графику рис. 1 — только от одного критерия N . Кроме того, использование табл. 2 требует двойной интерполяции и ограничено значениями ра-

диационного числа Старка $Sk \leq 3$ для пластины и $Sk \leq 5$ — шара.

Для нахождения решения при $\theta_c = 0$ можно вернуться к интегральному уравнению (29) и повторить процедуры получения уравнения (30). Можно также, используя два члена разложения функции $u(V)$ (25) и осуществляя предельный переход $\theta_c = 0$ в (30), получить:

$$\tilde{F}_0 = \Phi_1(\theta) - \Phi_1(\theta_*), \quad (36)$$

где $\Phi_1(\theta) = \frac{1}{3\theta^3} - a \cdot \ln \theta^4$.

При этом, определяя θ_* по уравнениям (31)...(35), в них следует положить $\theta_c = 0$.

Зная температуру поверхности, а значит и тепловой поток, можно приближенно найти температуру в любой точке тела. Так, предполагая параболическое (второй степени) распределение температур от оси тела к его поверхности, получим

$$\theta(X, Fo) = \theta_n(Fo) + Q(Fo)(1 - X^2)/2. \quad (37)$$

Тогда температура в центре тела ($X = 0$):

$$\theta_{ц}(Fo) = \theta_n(Fo) + Sk(\theta_n^4 - \theta_c^4)/2. \quad (38)$$

Среднемассовую температуру найдем, интегрируя выражение (37) по координате X :

$$\theta_{cp}(Fo) = \frac{1}{0} \int \theta(X, Fo) X^{k-1} \cdot dX = [\theta_n(Fo) + gQ(Fo)]/k. \quad (39)$$

Результаты расчетов процесса охлаждения при $Sk = 1,5$ и $\theta_c = 0$ по уравнениям (36) и (38) приведены в табл. 1. Сравнение с численными данными свидетельствуют о достаточной для инженерных расчетов точности полученных решений.

Решения (29)...(39), составной частью которых является модель ТТГ (см. уравнения (14), (23)), хорошо работают при малых числах Старка. Оценим их возможность при очень больших Sk .

Асимптотика при больших Sk . Сначала возьмем решение (36) при $\theta_c = 0$. Разделим левую и правую часть уравнения (36) на Sk и устремим его к бесконечности. Получим $kFo = -g(\ln \theta^4 - \ln \theta_*^4)$ или после потенцирования

$$\theta_n(Fo) = \theta_* \cdot \exp(-k_2 Fo), \quad (40)$$

где $k_2 = k(k + 2)/4$.

Для определения начальной температуры θ_* воспользуемся зависимостью (35) при больших Sk , а значит и критерия $N = a$:

$$\theta_* = Z = \frac{1}{\sqrt[4]{a(1 + \varepsilon_1)}}, \quad (41)$$

где $\varepsilon_1 = \frac{1}{4\sqrt[4]{a}}$ — малое число.

Таким образом, при больших числах Старка θ_* , а следом и температура поверхности θ_n стремится к нулю.

Тепловой поток в уравнении (4) при больших Sk приводит к неопределенности типа $\infty \cdot 0$, раскрывая которую с помощью (40) и (41), получим

$$Q_\infty = (k+2) \cdot \exp(-D_\infty \cdot Fo), \quad (42)$$

где $D_\infty = kSk/m = k(k+2)$ — коэффициент D при $Sk = \infty$ (см. уравнение (20)).

Температуру в центральных точках тела найдем из (38) с учетом (42)

$$\theta_{\text{ц}}(Fo) = \theta_{\text{п}}(Fo) + A \cdot \exp(-D_\infty Fo) \cong A \exp(-D_\infty \cdot Fo) \quad (43)$$

и среднюю температуру — из (39) и (42)

$$\theta_{\text{ср}}(Fo) = \theta_{\text{п}}(Fo) + M \exp(-D_\infty Fo) \cong M \exp(-D_\infty \cdot Fo), \quad (44)$$

где $A = (k+2)/2$; $M = 1/k$.

Величины D , A и M хорошо согласуются с решениями уравнения теплопроводности при конвективном охлаждении (нагреве) когда число Био $Bi = \infty$. Например, согласно [8] в случае пластины решения для температур имеют вид

$$\theta_{\text{ц}}(Fo) = A_{1-\infty} e^{-a_1^2 Fo} \quad \text{и} \quad \theta_{\text{ср}}(Fo) = M_{1-\infty} e^{-a_1^2 Fo}, \quad (45)$$

где $a_1 = \pi/2$ — корень характеристического уравнения (12) при $Sk = \infty$;

$$A_{1-\infty} = 2/a_1 = 4/\pi = 1,27 \approx (k+2)/2 = 1,5;$$

$$M_{1-\infty} = 2/a_1^2 = 8/\pi^2 = 0,81 \approx 1/k = 1;$$

$$D_\infty = k(k+2) = 3 \approx a_1^2 = 2,47.$$

Таким образом, можно сделать вывод о том, что расчет средней температуры и в центральных точках тела при любых нелинейных интенсивных нагрузениях, т.е. при граничных условиях I рода, можно считать по линейной теории конвективного охлаждения (нагрева).

Аналогичный предельный переход можно сделать в решении (30) при $\theta_c \neq 0$. Тогда

$$\theta_{\text{п}}^4(Fo) - \theta_c^4 = (\theta_*^4 - \theta_c^4) \cdot \exp(-D_\infty \cdot Fo). \quad (46)$$

Начальную температуру θ_* найдем из уравнения (35) при больших $N = a^4 \theta_c^{12}$ и $C = a \cdot \theta_c^4$. Тогда

$$Z = \frac{1}{N^{1/4}(1+\varepsilon_2)} = \frac{1}{a\theta_c^3(1+\varepsilon_2)} \quad \text{и} \\ \theta_* = Z \cdot C = \frac{a\theta_c^4}{a\theta_c^3(1+\varepsilon_2)} \approx \theta_c(1-\varepsilon_2), \quad (47)$$

$$\text{где } \varepsilon_2 = \frac{1}{4a\theta_c^3}.$$

Теперь по аналогии с уравнениями (40) и (41), при больших Sk θ_* , а следом и температура поверхности стремится к температуре окружающей среды θ_c .

Используя в (46) алгебраическое тождество $a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$ и заменяя, там где стоит сумма температур $\theta_{\text{п}} = \theta_* = \theta_c$, с учетом уравнения (47), получим

$$\theta_{\text{п}}(Fo) = \varepsilon_2 \cdot \exp(-D_\infty \cdot Fo), \quad (48)$$

где $\varepsilon = (\theta - \theta_c)/\theta_c$.

Тепловой поток (4) при больших числах Старка

$$Q_\infty = Sk(\theta_{\text{п}}^4 - \theta_c^4) = Sk(\theta_{\text{п}} - \theta_c) \cdot 4\theta_c^3 = \\ = Sk \cdot (\varepsilon_2 \theta_c \cdot e^{-D_\infty Fo}) \cdot 4\theta_c^3 = \theta_c(k+2)e^{-D_\infty \cdot Fo}. \quad (49)$$

Температура в центре согласно уравнениям (38) и (48)

$$\theta_{\text{ц}}(Fo) = A \cdot \exp(-D_\infty Fo) \quad (50)$$

и среднemasсовая

$$\theta_{\text{ср}}(Fo) = M \cdot \exp(-D_\infty Fo). \quad (51)$$

В подавляющем большинстве работ, посвященных радиационному теплообмену [1, 3...7] и др. отсутствуют формулы по определению среднemasсовой температуры, без знания которой невозможно рассчитать термические напряжения. В работе [8] показано, что осевые термические напряжения составляют:

$$\text{на поверхности} \quad \sigma_{\text{п}}(\tau) = S_1 [T_{\text{ср}}(\tau) - T_{\text{п}}(\tau)], \quad \text{Па} \quad (52)$$

$$\text{и в центре} \quad \sigma_{\text{ц}}(\tau) = S_1 [T_{\text{ср}}(\tau) - T_{\text{ц}}(\tau)], \quad \text{Па}. \quad (53)$$

Приведя последние уравнения к безразмерному виду, получим относительные термические напряжения на поверхности $\tilde{\sigma}_{\text{п}}(Fo) = \theta_{\text{ср}}(Fo) - \theta_{\text{п}}(Fo)$ и в центре

$$\tilde{\sigma}_{\text{ц}}(Fo) = \theta_{\text{ср}}(Fo) - \theta_{\text{ц}}(Fo), \quad (55)$$

где $\tilde{\sigma} = \sigma/\sigma_{01}$; $0 \leq \tilde{\sigma} \leq 1$; $\sigma_{01} = S_1 \cdot T_0$ — максимально возможные термические напряжения, Па; $S_1 = \beta E/(1-\nu)$; β — линейный коэффициент термического расширения, $1/K$; E — модуль упругости Юнга, Па; ν — коэффициент Пуассона.

Аналитическое исследование процессов радиационного охлаждения (нагрева) тел на начальной стадии ($Fo < 0,3$) приведено в работе [5].

Выводы

1. С помощью подстановки, линеаризирующей граничное условие, и интегрального уравнения получены приближенные аналитические решения по расчету температур и термических напряжений в телах простой геометрической формы при их радиационном охлаждении.

2. Сопоставление с численными решениями температур поверхности и центра пластины свидетельствует о достаточной для инженерных расчетов точности.

3. Показано, что расчет среднemasсовой температуры и в середине тела при любых нелинейных интенсивных тепловых нагрузениях, т.е. при граничных условиях I рода, можно проводить по линейной теории конвективного охлаждения (нагрева).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кавадеров А. В., Самойлович Ю. А. О расчетах нагрева массивных тел излучением / Сб. тр. ВНИИМТ, № 10, 1963.
2. Семикин И. Д., Розенгарт Ю. И., Гольдфарб Э. М. Нагрев массивных тел излучением // Сталь. — 1956. № 3. — С. 252—256.
3. Бойков Г. П. Прогрев тел под действием лучистого тепла / Изв. ТПИ. — 1956. Т. 89.
4. Саломатов В. В., Горбунов А. Д. Аналитическое исследование прогрева твердых тел радиаци-

-
- ей // Изв. вузов. Энергетика. — 1969. № 3. — С. 124—127.
 5. Горбунов А. Д. Аналитический расчет процессов радиационного нагрева (охлаждения) тел на начальной стадии // Математичне моделювання — Днепродзержинск : ДГТУ, 2012, № 2(27). — С. 90—94.
 6. Иванов В. В. Расчет радиационного охлаждения тепловыделяющих элементов // ИФЖ. — 1966. — Т. XI. — № 4. — С. 542—544.
 7. Саломатов В. В. К расчету радиационного охлаждения твердых тел // ИФЖ. — 1969. — Т. 17. — № 1. — С. 127—134.
 8. Горбунов А. Д. К аналитическому расчету термических напряжений при конвективном нагреве тел простой формы // Математичне моделювання. — Днепродзержинск : ДГТУ, 2012. № 1(26). — С. 39—45.

пост.15.04.13