МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Тернарные мультисистемы, порождаемые бинарным отношением дифункциональности

А. А. БУТ, С. Н. ГЕРАСИН, В. В. ШЛЯХОВ**

Украина, Харьковский национальный университет радиоэлектроники*

Украина, Харьковский национальный университет внутренних дел**

Получены конструктивные условия существования тернарных мультиситем, порождаемых бинарным отношением дифункциональности. Рассмотрены вопросы существования единого носителя тернарных мультисистем.

Отримано конструктивні умови існування тернарних мультісітем, породжуваних бінарним відношенням діфункціональності. Розглянуто питання існування єдиного носія тернарних мультісістем.

Constructive existence conditions ternary multisystems, generated by the binary difunctionality relation are received. Questions of existence of the uniform carrier of ternary multisystems are considered.

Введение. Исследование множеств и заданных над ними отношений зачастую приводит к рассмотрению систем непересекающихся подмножеств или фактор-множеств, порождаемых отношением эквивалентности.

Анализ публикаций. В случае, когда задана пара множеств носителей, рассмотрение свойств систем непересекающихся подмножеств приводит к специальному отношению дифункциональности. Алгебраические аспекты данного понятия исследованы в работах [1,2], а прикладные в [3]. В частности, можно показать, что дифункциональное отношение порождается взаимно однозначными соответствиями между системами попарно не пересекающихся подмножеств различных множеств носителей.

Цель исследований. Целью статьи является получение условий существования тернарных мультисистем индуцируемых бинарным отношением дифункциональности.

Изложение основных результатов.

1. Матричное представление отношения дифункциональности. Пусть $T(x,y)$ – произвольное бинарное отношение на $A\times B$, где A,B – произвольные конечные множества. Тогда, если это отношение $T(x,y)$ дополнительно удовлетворяет свойству дифункциональности

$$\left.\begin{array}{r} T(a_i,b_j)=1 \\ T(a_k,b_j)=1 \\ T(a_i,b_l)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow T(a_i,b_l)=1,$$

то его принято называть дифункциональным отношением.

Переходя от данного задания отношения к его матричной форме, можно заметить что, если в матрице A_T отношения $T(x,y)$ на местах $(i,j),(k,j)$, (k,l) стоят 1, то и на месте (i,l) тоже будет 1. В дальнейшем будем говорить, если три элемента матрицы (трактуя условно их как «вершины четырехугольника»), имеющие 1, индуцируют 1 и в четвертой «вершине», то эта матрица удовлетворяет правилу «четырехугольника».

Нетрудно заметить, что путем перенумерации элементов множеств A и B этот четырехугольник можно трансформировать в квадрат 2×2, состоящий только из 1, и переместить его на любое место исходной матрицы A_T Очевидно и то, что подобные матрицы могут быть приведены к блочному виду, где блоки состоят только из 1, имеют размеры (n_i,m_i), $i=\overline{1,r}$ и $\sum_{i=1}^{r}n_i=n$, $\sum_{i=1}^{r}m_i=m$, $n=|A|$, $m=|B|$ – мощности множеств.

Подчеркнем, что любая перенумерация – это действие некоторой подстановки S_n, где n — число элементов. Ясно, что любую $n\times m$ матрицу можно трансформировать применением двух подстановок S_n и S_m. Результат этой трансформации произвольной матрицы A будем обозначать $S_{n,m}(A)$. В итоге справедливо следующее

$$
\begin{array}{c}
\overbrace{\qquad\qquad}^{m_1}\qquad\overbrace{\qquad\qquad}^{m_2}\qquad\cdots\qquad\overbrace{\qquad\qquad}^{m_r}\qquad\qquad \\
\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\
1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & & & & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & & & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & & & & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & & & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n_1 \\
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n_2 \\
\vdots \\
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n_r \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Утверждение 1. Для любого дифункционального отношения $T(x,y)$ всегда найдутся две подстановки, для которых $S_{n,m}(A_T)$ имеет блочный вид.

Утверждение 1 имеет ряд следствий.

В соответствии с терминологией алгебраических (и мультиалгебраических) систем отношение дифункциональности является моделью $\langle \{A \times B\}, T(x,y) \rangle$, которую будем называть дифункциональной [4]. Но из ранее сказанного, ясно, что на классах эквивалентности порождается мультимодель, в которой второй элемент единственен и представляет собой простейшую эквивалентность (эквивалентности равенства), т.е.

$$
I(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y. \end{cases}
$$

Таким образом, справедливо

Следствие 1. Любая дифункциональная модель всегда индуцирует мультимодель в виде эквивалентности равенства.

При этом, если у двух дифункциональных моделей число блоков в матрицах $S_{n_1,m_1}(A_{T_1})$ и $S_{n_2,m_2}(A_{T_2})$ совпадает, а природа множеств, образующих их носитель, несущественна, то индуцируется одна и та же мультимодель в виде эквивалентности равенства, что фактически означает их алгебраическую неразличимость. Введем определения.

Определение 1. Порядком отношения дифункциональности T и соответствующей ей модели дифункциональности назовем число блоков в матрице $S_{n,m}(A_T)$ и будем его обозначать $\pi(T)$.

Определение 2. Два отношения дифункциональности T_1 и T_2 и соответствующие им модели изоморфны, если они порождают одну и ту же мультимодель в виде эквивалентности равенства.

Отсюда вытекает

Следствие 2. (Критерий изоморфизма дифункциональностей)

Две дифункциональности (дифункциональные модели) T_1 и T_2 изоморфны тогда и только тогда, когда их порядки равны, т.е. $T_1 \sim T_2 \Leftrightarrow \pi(T_1) = \pi(T_2)$.

2. Тернарные отношения, порождаемые отношением дифункциональности. Рассмотрим произвольное тернарное отношение $F(x,y,z)$ на $A \times B \times C$. Нас будет интересовать вопрос, при каких условиях это отношение индуцирует мультисистему с единым носителем на всех местах своих аргументов. Поскольку произвольное тернарное отношение представляет собой семейства бинарных, среди которых на уровне мультисистем только дифункциональные отношения формируют единый носитель с точностью до природы элементов, то естественно предполагать, что именно это свойство должно быть определяющим при решении поставленной задачи.

Определение 3. Тернарное отношение $F(x,y,z)$ на $A \times B \times C$ является усеченно-дифункциональным по аргументу x, если при любом фиксированном $x \in A$, отношение $F(x,y,z)$ как бинарное отношение, заданное на $B \times C$, является отношением дифункциональности.

Определение 4. Тернарное отношение $F(x,y,z)$ на $A \times B \times C$ является вполне-дифункциональным, если оно является усеченно-дифункциональным по каждому из своих аргументов.

Лемма 1. Пусть $T_1(x,y)$ и $T_2(x,y)$ – дифункциональные отношения на $A \times B$. Тогда если $\forall x_1, x_2 \in A$, $\forall y \in B$ $T_1(x_1,y) = T_1(x_2,y) \Leftrightarrow T_2(x_1,y) = T_2(x_2,y)$, то $T_1 \sim T_2$.

Доказательство. Рассмотрим условие леммы. Если при $\forall y \in B$ для каких-то $\forall x_1, x_2 \in A$ имеет место равенство $T_1(x_1,y) = T_1(x_2,y)$, то элементы x_1 и x_2 принадлежат одному классу эквивалентности, которые индуцируются отношением T_1 на множестве A, т.е. $x_1 \overset{T_1}{\sim} x_2$ ($\overset{T_1}{\sim}$ – эквивалентность относительно T_1), из этого условия следует: $T_2(x_1,y) = T_2(x_2,y)$, т.е. $x_1 \overset{T_2}{\sim} x_2$. Значит, класс эквивалентности A_1 / T_1 содержащий элементы x_1 и x_2, принадлежит классу A_1 / T_2, содержащему эти же элементы. Но условие леммы справедливо и в обратную сторону, следовательно, $A_1 / T_1 \subset A_1 / T_2$, $A_1 / T_2 \subset A_1 / T_1$ или $A_1 / T_1 = A_1 / T_2$, где A_i / T_j классы эквивалентности, индуцируемые отношением T_j на множестве A. Таким образом, разбиения, которые индуцируются на множестве A дифункциональностями T_1 и T_2, совпадают, откуда следует совпадение мощностей разбиений $|\{A_1 / T_1\}| = |\{A_1 / T_2\}|$. Следовательно $T_1 \sim T_2$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Следует сказать, что в случае конечных множеств A и B равенство $|\{A_1 / T_1\}| = |\{A_1 / T_2\}|$ означает равенство количества единичных блоков в матрицах A_{T_1} и A_{T_2}, т.е. $\pi(T_1) = \pi(T_2)$. Эта ситуация наиболее часто встречается на практике. Однако, если множества A и B произвольны, то при наличии одной области определения двух отношений дифункциональности конечностью можно пренебречь, и лемма 1 справедлива в общем случае.

Следствие 3. Условие леммы 1 является не только необходимым, но и достаточным.

Доказательство. Выше показано, что условие леммы 1 означает совпадение разбиений $\{A / T_1\}$ и

$\{A/T_2\}$, но дифункциональности T_1 и T_2, в случае их изоморфизма имеют одинаковые разбиения, что влечет за собой выполнение условие леммы 1.

Следствие 4. Для двух отношений дифункциональности T_1 и T_2, имеющих одну область определения, критерием изоморфизма является условие леммы 1.

Вернемся к тернарному отношению $F(x,y,z)$, заданному на $A \times B \times C$.

Определение 5. Сечением тернарного отношения будем называть бинарное отношение, которое индуцируется исходным путем фиксации одного из аргументов.

Утверждение 2. Произвольное тернарное отношение $F(x,y,z)$ на $A \times B \times C$ имеет все изоморфные друг другу сечения тогда и только тогда, когда оно вполне-дифункционально, и для любых $x_1, x_2 \in A,\ y_1, y_2 \in B$ и $z \in C$ имеют место условия:

а) $F(x_1,y_1,z)=F(x_1,y_2,z) \Leftrightarrow F(x_2,y_1,z)=F(x_2,y_2,z)$;

б) $F(x_1,y_1,z)=F(x_2,y_1,z) \Leftrightarrow F(x_1,y_2,z)=F(x_2,y_2,z)$.

Доказательство. Рассмотрим достаточность. Нетрудно заметить, что если тернарное отношение $F(x,y,z)$ является вполне-дифункциональным, то все сечения являются отношениями дифункциональ-ности, заданными на одной области определения.

Рассмотрим теперь условие а). Ясно, что в нем присутствуют два сечения $F(x_1,y,z)$ и $F(x_2,y,z)$, полностью удовлетворяющие условиям леммы 1, т.к. условие а) – это фактически условие леммы 1 для этих сечений. Но поскольку это критерий изоморфизма, то для любых $x_1, x_2 \in A$ имеем изоморфизм $F(x_1,y,z) \sim F(x_2,y,z)$. Рассуждая абсолютно аналогично, из условия б) имеем $F(x,y_1,z) \sim F(x,y_2,z)$.

Если обозначить разбиения, индуцируемые некоторым отношением F на множествах A, B и C соответственно через $\{A/F\}, \{B/F\}, \{C/F\}$, то из $F(x_1,y,z) \sim F(x_2,y,z)$ следует, что мощности разбиений $\{B/F\}$ и $\{C/F\}$ совпадают и не зависят от выбора элемента x, т.е. $|\{B/F\}|=|\{C/F\}|$. Совершенно аналогично из условия $F(x,y_1,z) \sim F(x,y_2,z)$ имеем $|\{A/F\}|=|\{C/F\}|$, но тогда получаем $|\{A/F\}|=|\{B/F\}|=|\{C/F\}|$, что и означает вместе с вполне-дифункциональностью отношения $F(x,y,z)$ изоморфизм всех его сечений. Достаточность доказана.

Перейдем к доказательству необходимости. Если все сечения изоморфны, то вполне-дифункциональность выполняется, поскольку будут иметь место равенства (12), из которых следует существование взаимнооднозначного соответствия между множествами классов эквивалентностей, что порождает дифункциональности в каждом из сечений. Условия а) и б) будут выполняться, как критерии изоморфизма. На этом завершается доказательство теоремы.

Следствие 5. Таким образом, получены условия, при которых произвольное тернарное отношение, заданное на декартовом произведении произвольных множеств A, B и C индуцирует мультиалгебраическую систему с единым носителем, т.е. мультиотношение заданное на декартовом кубе некоторого множества.

Необходимо подчеркнуть, что именно этот результат представляет собой основу для формирования мультигрупп [5-6].

3. Мультиалгебраические системы, индуцируемые произвольными *n*-арными отношениями, с единым носителем. Пусть дано произвольное n-арное отношение S, заданное на декартовом произведении произвольных множеств $A_1 \times \ldots \times A_n$. Разобьем набор множеств $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ на k непустых частей следующим образом: в первую часть входит A_1 и какие-то элементы из оставшихся, во вторую часть входит минимальный из номеров A_i, который не вошел в первую часть и какие-то элементы из остатка, не вошедшие в первую часть, в третью часть – минимальный из номеров A_i, не вошедший в первые две части и какие-то элементы остатка и т.д. Тогда нетрудно понять, что на декартовом произведении множеств $B_1 \times \ldots \times B_k$, где B_j представляет собой декартово произведение множеств A_i, входящих в j-ую часть и расположенных в порядке возрастания номеров, заданным n-арным отношением S индуцируется некоторое k-арное отношение, зависящее от способа разбиения по вышеописанной процедуре на k частей. Все такие разбиения образуют некоторое множество, элемент которого будем обозначать p_k.

Определение 6. Фактор-отношением k-го порядка данного произвольного n-арного отношения S будем называть k-арное отношение, индуцируемое исходным при помощи некоторого разбиения p_k области определения $A_1 \times \ldots \times A_n$ на k частей и будем его обозначать $\Phi(p_k)/S$.

Теперь может быть сформулировано и доказано следующее

Утверждение 3. Пусть дано произвольное n-арное отношение S, заданное на декартовом произведении произвольных множеств $A_1 \times \ldots \times A_n$. Тогда им индуцируется тернарное мультиотношение с единым носителем (фактически заданное на декартовом кубе некоторого множества) в том и только в том случае, когда существует разбиение p_3 набора множеств $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ такое, что соответствующие ему фактор отношение третьего порядка $\Phi(p_3)/S$ удовлетворяет как тернарное отношение условиям утверждения 2.

Доказательство. Сначала рассмотрим достаточность. Ясно, что если существует некоторое разбиение p_3 набора $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то соответствующее ему фактор-отношение третьего порядка, $\Phi(p_3)/S$, индуцируемое отношением S, фактически задано на декартовом произведении множеств $B_1 \times B_2 \times B_3$, где $B_i = A_{i(1)} \times \ldots \times A_{i(r_i)}$, где $i \in \{1,2,3\}$, а набор $A_{i(1)}, A_{i(2)}, \ldots, A_{i(r_i)}$ входит в набор $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в порядке возрастания номеров, т.е. $i_1, i_2 < \ldots < i_{r_i}$, r_i – мощность i-ой части разбиения p_3, при этом

$r_1, r_2, r_3 > 0,\ r_1 + r_2 + r_3 = n$.

Поскольку тернарное отношение $\Phi(p_3)/S$ удовлетворяет условиям утверждения 2, оно имеет все изоморфные друг другу сечения. Из следствия 5 вытекает, что тернарное отношение $\Phi(p_3)/S$ индуцирует на каждом из множеств B_1, B_2, B_3 равномощные разбиения или фактически одно разбиение, с точностью до природы элементов и состава элементов. В рамках наших обозначений будут иметь место равенства $|\{B_1/[\Phi(p_3)/S]\}|=|\{B_2/[\Phi(p_3)/S]\}|=|\{B_3/[\Phi(p_3)/S]\}|$, из которых вытекает, что множества $\{B_i/[\Phi(p_3)/S]\}$ можно взаимно-однозначно отобразить на некоторое множество C, на декартовом кубе C^3 которого задано тернарное мультиотношение, индуцируемое $\Phi(p_3)/S$ и фактически порожденное произвольным отношением S. Достаточность доказана.

Перейдем к доказательству необходимости: она вытекает из следующих соображений. Если S порождает некоторое тернарное мультиотношение на декартовом кубе какого-то множества классов эквивалентности C, то ясно, что существует некоторое разбиение типа p_3 набора элементов $A_1, A_2, ..., A_n$. Более того, это означает выполнение равенств

$$|\{B_1/[\Phi(p_3)/S]\}|=|\{B_2/[\Phi(p_3)/S]\}|=|\{B_3/[\Phi(p_3)/S]\}|,$$

для соответствующих p_3 множеств B_1, B_2, B_3. Но из утверждения 2 следует, что эти равенства влекут изоморфизм всех сечений тернарного мультиотношения, индуцируемого S, т.е. выполнения условий: вполне-дифункциональности и условий а), б) утверждения 2, что завершает доказательство утверждения.

Таким образом, тернарное мультиотношение с единым носителем может порождаться исходным не только тернарным отношением, но и произвольным n-арным. При этом важно подчеркнуть следующее

Следствие 6. Любое n-арное отношение индуцирует на классах эквивалентности все отношения по арности от 1 до n .

Выводы

Получены условия существовании тернарных мультисистем с носителем в виде декартового куба фактор-множеств. Следует отметить, что данные условия носят конструктивный характер, и могут обеспечить верификацию мультиалгебраических систем на уровне исходных отношений. Учитывая, что используемые разбиения p_3 могут быть различными, в результате могут индуцироваться различные тернарные мультисистемы [7-8]. Таким образом, обозначена методологическая роль тернарных мультисистем для исследования различных математических структур, в частности, наибольшую перспективу представляет изучение мультигрупп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М. : Наука, 1970. — 392 с.
2. Риге Дж. Бинарные отношения, замыкания, соответствия Галуа // Кибернетический сборник. — № 2. — 1963. — С. 129—185.
3. Герасин С. Н., Ситников Д. Э., Шабанов-Кушнаренко С. Ю. О предикатах дифункциональности // Проблемы бионики. — Харьков : Вища школа. — 1987. — Вып. 39. — С. 12—18.
4. Машталир В. П., Шляхов В. В. Свойства мультиалгебраических систем в задачах компаративного распознавания // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 6. — С. 11—21.
5. Машталир В. П., Шляхов В. В. Индуцированная согласованность отношений в задачах грануляции информации // Бионика интеллекта. — 2006. — № 1 (64). — С. 19—26.
6. Kagramanyan A., Mashtalir V., Shlyakhov V. Multialgebraic systems in information granulation // Int. J. “Information Theories and Applications”. — 2008. — Vol. 15, No 1. — P. 55—63.
7. Kagramanyan A., Mashtalir V., Shlyakhov V. Problems of multirelations existence // Symulacja w badaniach i rozwoju / L. Bobrowski, A. Grzyb (Eds.). — Krakow : PTSK. — 2007. — P. 269—274.
8. Kagramanyan A., Mashtalir V., Shlyakhov V. Multialgebraic structures existence for granular computing // Proc. of. XIII-th International Conference Knowledge-Dialogue-Solutions. — Sofia : FOI-COMMERCE. — Vol. I. — 2007. — P. 322—333.

пост. 05.06.12