величин на основі нормалізуючих перетворень, який дає змогу знаходити відповідні інтервальні оцінки без застосування припущення про нормальність розподілів цих величин. В подальшому планується вести дослідження в напрямку пошуку інших нормалізуючих перетворень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Орлов А.И. Прикладная статистика. Учебник. – М.: Издательство "Экзамен", 2004. – 656 с.
2. Бахарев Б.В., Ковалев А.Э. Оптимизация нормализующего преобразования пуассоновского процесса для оценки доверительного интервала неслучайного отклонения // Математические заметки. – Том 51. – Выпуск 2. – Февраль, 1992. – С.144-146.
3. Приходько С.Б. Інтервальне оцінювання параметрів стохастичних диференціальних систем на основі модифікації узагальненого методу моментів // Матеріали XIII Міжнародної конференції з автоматичного управління (Автоматика-2006), м. Вінниця, 25-28 вересня 2006 року. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2007. – С.69-75.
4. Johnson R.A., Wichern D.W. Applied Multivariate Statistical Analysis. – Pearson Prentice Hall, 2007. – 800 p.
5. Полард Дж. Справочник по вычислительным методам статистики / Под ред. и с предисл. Е. М. Четыркина. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 344 с.

пост. 10.12.2010

Новые алгоритмы выполнения сложных операций в системе остаточных классов

ПОЛИССКИЙ Ю.Д.

НИИ автоматизации черной металлургии

Рассмотрены новые алгоритмы решения задач выполнения сложных операций над числами, представленными в системе остаточных классов. Методы решения базируются на «внутреннем» по отношению к системе счисления способе без предварительного преобразования непозиционного представления чисел в позиционное.

Розглянуті нові алгоритми рішення завдань виконання складних операцій над числами, представленими в системі залишкових класів. Методи рішення базуються на "внутрішньому" по відношенню до системи числення способі без попереднього перетворення непозиційного представлення чисел в позиційне.

Consider new algorithms for solving the most complex operations on numbers represented in the system of residual classes. Methods solutions are based on " internal " in relation to the number system without prior conversion nepozitsionnogo representation of numbers in a positional.

Введение. Современный этап развития вычислительной техники связан с применением новых принципов обработки и хранения информации, базирующихся, в частности, на представлении данных в непозиционной системе счисления остаточных классов [1].

Системой остаточных классов (СОК) называется система счисления, в которой произвольное число N представляется в виде набора наименьших неотрицательных остатков по модулям

$m_1, m_2, \dots, m_n$, т.е.

$$N = \left[N \left(\operatorname{mod} m_1 \right), N \left(\operatorname{mod} m_2 \right), \dots, N \left(\operatorname{mod} m_n \right) \right]$$

или

$$N = \left(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \right). \tag{1}$$

Здесь $\alpha_i = N \left(\operatorname{mod} m_i \right)$. При этом, если все целые числа N принадлежат диапазону $\left[0, M_p \right)$, объем которого равен

$$M_p = m_1 m_2 \dots m_n, \tag{2}$$

а модули m_i взаимно простые, то каждому набору $\left(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \right)$ соответствует только одно число N из этого диапазона.

Пусть системой оснований полиадического кода также является система $m_1, m_2, \dots, m_n$. Тогда число N в полиадическом коде представляется следующим образом

$$\begin{aligned} N = \pi_1 + \pi_2 m_1 + \dots + \pi_i m_1 m_2 \dots m_{i-1} + \\ + \dots + \pi_n m_1 m_2 \dots m_{n-1} \end{aligned} \tag{3}$$

где π_i -позиционная характеристика i -го разряда, $\pi_i = 0, 1, 2, \dots, m - 1$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Достоинства и недостатки СОК подробно рассмотрены в [1]. Обладая высокой степенью параллелизма и способностью арифметической самокоррекции, СОК позволяет повысить надежность вычислений и их скорость в ряде важных задач [2].

Однако возникают серьезные трудности при реализации так называемых немодульных операций, для выполнения которых необходимо знание цифр операндов по всем разрядам. К таким немодульным операциям относятся, в частности, определение переполнения в результате сложения, вычитания или умножения, расширение диапазона представления чисел, а также сравнение чисел.

Состояние вопроса. Исследования [3], [4] показали, что известные подходы к выполнению этих операций носят, пользуясь терминологией [5], «внешний» характер по отношению к самой системе представления чисел. Объясняется это тем, применяемые подходы основаны на определении позиционных характеристик чисел (3) с последующей их обработкой в позиционной системе. В настоящей работе предложены новые алгоритмы, основанные на «внутреннем» по отношению к системе счисления способе без предварительного преобразования непозиционного представления в позиционное.

Основная часть. Будем диапазон $\left[0, M\right)$ называть рабочим диапазоном чисел (1). Введем дополнительные модули $m_{n+1}, m_{n+2}, \dots, m_k$, определяющие контрольный диапазон $\left[M+1, M_k\right)$, объем которого равен

$$M_k = m_{n+1} m_{n+2} \dots m_k$$

Будем рассматривать числа (1) рабочего диапазона на всем диапазоне $M = M_ð * M_ê$,

$$M = m_1 m_2 \dots m_n m_{n+1} m_{n+2} \dots m_k .$$

В этом случае

$$N = \left(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots, \alpha_k\right) \qquad (4)$$

При выполнении операции умножения двух операндов максимальное произведение равно $\left(M_ð - 1\right)^2$. В работе [5] показано, что для однозначного суждения о переполнении диапазона $\left[0, M_ð\right)$ необходимо, чтобы $M_ð * M_ê \ge \left(M_ð - 1\right)^2$. Отсюда, требование к M_k представляется в виде $M_ê \ge M_ð - 1$.

При выполнении операции умножения числа $N_1 = \left(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots, \alpha_k\right)$ на $N_2 = \left(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta_{n+1}, \beta_{n+2}, \dots, \beta_k\right)$ получаем числа

$$N = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 \times \beta_1, \tilde{\alpha}_2 = \alpha_2 \times \beta_2, \dots, \tilde{\alpha}_n = \alpha_n \times \beta_n, \\ \tilde{\alpha}_{n+1} = \alpha_{n+1} \times \beta_{n+1}, \dots, \tilde{\alpha}_k = \alpha_k \times \beta_k \end{pmatrix} \qquad (4)$$

и

$$N_0 = \left(\tilde{\tilde{\alpha}}_1 = \tilde{\alpha}_1, \tilde{\tilde{\alpha}}_2 = \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\tilde{\alpha}}_n = \tilde{\alpha}_n\right) \qquad (5)$$

Обозначим $\tilde{\tilde{\alpha}}_{n+1}, \tilde{\tilde{\alpha}}_{n+2}, \dots, \tilde{\tilde{\alpha}}_k$ - остатки по модулям $m_{n+1}, m_{n+2}, \dots, m_k$, полученные в результате расширения системы модулей до $M = M_ð * M_ê$. Тогда $\tilde{N}_0 = \left(\tilde{\tilde{\alpha}}_1, \tilde{\tilde{\alpha}}_2, \dots, \tilde{\tilde{\alpha}}_n, \tilde{\tilde{\alpha}}_{n+1}, \dots, \tilde{\tilde{\alpha}}_{n+1}\right)$. Пусть $R = 0$, если отсутствует переполнение диапазона, и $R = 1$ в противном случае. Тогда

$$R = \begin{cases} 0, \left(\tilde{\tilde{\alpha}}_{n+1} = \tilde{\alpha}_{n+1}\right) \cap \dots \cap \left(\tilde{\tilde{\alpha}}_k = \tilde{\alpha}_k\right) \\ 1, \left(\tilde{\tilde{\alpha}}_{n+1} \ne \tilde{\alpha}_{n+1}\right) \cup \dots \cup \left(\tilde{\tilde{\alpha}}_k \ne \tilde{\alpha}_k\right) \end{cases}. \qquad (6)$$

Из (6) следует, что для установления факта переполнения необходимо выполнить операции сравнения чисел. Далее рассмотрены впервые предложенные в работах [6], [7] новые принципы выполнения операций над числами без их преобразования к позиционному представлению.

Сущность заключается в следующем.

При выполнении над каждым числом последовательного ряда $N = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ операции

$$\tilde{\alpha}_i = \left(\alpha_i - \alpha_n\right)\left(\operatorname{mod} m_i\right), \; i = 1, 2, \dots, n-1 \qquad (7)$$

весь диапазон (2) оказывается разбитым на $L = m_1 m_2 \dots m_i \dots m_{n-1}$ поддиапазонов длины m_n, внутри каждого из которых значения разностей (7) одинаковы. Меньшее (большее) из чисел поддиапазона определяется числом с меньшим (большим) значением α_n. На применении этих результатов основан новый подход к решению задач сравнения.

Пусть $A = \left(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\right)$, $B = \left(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\right)$ - сравниваемые ненулевые числа, $A \ne B$. Необходимо определить результат $W = A > B$ или $W = A < B$.

В соответствии с данным подходом в том случае, если после $(j-1)$-й итерации ($j = 1, 2, \dots, n-1$) результат сравнения не получен, выполняется j-я итерация для диапазона $M^{j-1} = m_1 m_2 \dots m_{n-(j-1)}$.

В соответствии с (7):

$$\tilde{\alpha}_i^j = \left(\tilde{\alpha}_i^{j-1} - \tilde{\alpha}_{n-(j-1)}^{j-1}\right)\left(\operatorname{mod} m_i\right),$$

$i = 1, 2, \dots, n - (j-1)$,

$$\tilde{\beta}_i^j = \left(\tilde{\beta}_i^{j-1} - \tilde{\beta}_{n-(j-1)}^{j-1}\right)\left(\operatorname{mod} m_i\right),$$

$i = 1, 2, \dots, n - (j-1)$.

Пусть

$$\tilde{A}^j = \left(\tilde{\alpha}_1^j, \tilde{\alpha}_2^j, \dots, \tilde{\alpha}_{n-j}^j\right),$$

$$\tilde{B}^j = \left(\tilde{\beta}_1^j, \tilde{\beta}_2^j, \dots, \tilde{\beta}_{n-j}^j\right).$$

$$W = \begin{cases} A > B, \left(\tilde{A}^j = \tilde{B}^j\right) \cap \left(\tilde{\alpha}_n^{j-1} > \tilde{\beta}_n^{j-1}\right) \\ A < B, \left(\tilde{A}^j = \tilde{B}^j\right) \cap \left(\tilde{\alpha}_n^{j-1} < \tilde{\beta}_n^{j-1}\right) \end{cases}$$

Если $\tilde{A}^{j} \neq \tilde{B}^{j}$, выполняется $(j+1)$-я итерация для диапазона $M^{j} = m_1 m_2 \dots m_{n-j}$. Для этого принимаем $\tilde{A}^{1,j} = \dfrac{\tilde{A}^{j}}{m^{n-(j-1)}}$ и $\tilde{B}^{1,j} = \dfrac{\tilde{B}^{j}}{m^{n-(j-1)}}$ в качестве сравниваемых чисел.

Если результат сравнения не получен до $(n-1)$-й итерации, то после её выполнения

$$W = \begin{cases} A > B, \left(\left(\tilde{A}^{1,n-1} = \tilde{B}^{1,n-1}\right) \cap \left(\tilde{\alpha}_1^{1,n-2} > \tilde{\beta}_1^{1,n-2}\right)\right) \cup \\ \cup \left(\left(\tilde{A}^{1,n-1} \neq \tilde{B}^{1,n-1}\right) \cap \left(\tilde{\alpha}_1^{1,n-1} > \tilde{\beta}_1^{1,n-1}\right)\right), \\ A < B, \left(\left(\tilde{A}^{1,n-1} = \tilde{B}^{1,n-1}\right) \cap \left(\tilde{\alpha}_1^{1,n-2} < \tilde{\beta}_1^{1,n-2}\right)\right) \cup \\ \cup \left(\left(\tilde{A}^{1,n-1} \neq \tilde{B}^{1,n-1}\right) \cap \left(\tilde{\alpha}_1^{1,n-1} < \tilde{\beta}_1^{1,n-1}\right)\right) \end{cases}.$$

Алгоритм сравнения группы чисел $N_1, N_2, \dots, N_s, \dots, N_k$, $s = 1, 2, \dots, k$ для определения экстремального из них или также основан на вычислении приведенных остатков.

В соответствии с данным подходом в том случае, если после $(j-1)$-й итерации ($j = 1, 2, \dots, n-1$) при определении, например, минимального из чисел результат сравнения не получен, выполняется j-я итерация для диапазона $M^{j-1} = m_1 m_2 \dots m_{n-(j-1)}$.

В соответствии с (7):

$\tilde{\alpha}_{s,i}^{1,j} = \left(\tilde{\alpha}_{s,i}^{1,j-1} - \tilde{\alpha}_{s,n-(j-1)}^{1,j-1}\right)\left(\bmod\ m_i\right)$, $i = 1, 2, \dots, n-(j-1)$, $s = 1, 2, \dots, k$.

$$\tilde{N}_s^{1,j} = \left(\tilde{\alpha}_{s,1}^{1,j}, \tilde{\alpha}_{s,2}^{1,j}, \dots, \tilde{\alpha}_{s,n-j}^{1,j}\right) \qquad (8)$$

Для тех чисел (8), которые попадают в один поддиапазон, определяем по минимальному из остатков $\tilde{\alpha}_{s,n-j}^{1,j-1}$ минимальное число $\tilde{N}_{\min,s}^{1,j}$ в данном поддиапазоне, и $\tilde{N}^{2,j} = \dfrac{\tilde{N}_{\min,s}^{1,j}}{m^{i}}$ принимаем в качестве одного из сравниваемых чисел.

Если сравнение не завершилось до $(n-1)$-й итерации, то после её выполнения

$$W = \begin{cases} N_{\min}, \begin{pmatrix} \left(\tilde{N}_1^{1,n-1} = \tilde{N}_2^{1,n-1} = \dots = \tilde{N}_k^{1,n-1}\right) \cap \\ \cup \left(\tilde{\alpha}_1^{2,n-2} = \min\left\{\tilde{\alpha}_1^{2,n-2}, \tilde{\alpha}_2^{2,n-2}, \dots, \tilde{\alpha}_k^{2,n-2}\right\}\right) \end{pmatrix} \cup \\ \cup \begin{pmatrix} \left(\tilde{N}_s^{1,n-1} \neq \tilde{N}_1^{1,n-1}\right) \cap \\ \cap \left(\tilde{\alpha}_1^{1,n-1} = \min\left\{\tilde{\alpha}_1^{1,n-1}, \tilde{\alpha}_2^{1,n-1}, \dots, \tilde{\alpha}_k^{1,n-1}\right\}\right) \end{pmatrix} \\ N_{\max}, \begin{pmatrix} \left(\tilde{N}_1^{1,n-1} = \tilde{N}_2^{1,n-1} = \dots = \tilde{N}_k^{1,n-1}\right) \cap \\ \cap \left(\tilde{\alpha}_1^{2,n-2} = \max\left\{\tilde{\alpha}_1^{2,n-2}, \tilde{\alpha}_2^{2,n-2}, \dots, \tilde{\alpha}_k^{2,n-2}\right\}\right) \end{pmatrix} \cup \\ \cup \begin{pmatrix} \left(\tilde{N}_s^{1,n-1} \neq \tilde{N}_1^{1,n-1}\right) \cap \\ \cap \left(\tilde{\alpha}_1^{1,n-1} = \max\left\{\tilde{\alpha}_1^{1,n-1}, \tilde{\alpha}_2^{1,n-1}, \dots, \tilde{\alpha}_k^{1,n-1}\right\}\right) \end{pmatrix} \end{cases}$$

На основе изложенного выше задача расширения диапазона представления чисел решается следующим образом.

Образуем $(k-n)$ групп чисел

$$\left\{ \begin{matrix} N_{1,n+1} = \left(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\alpha}_{n+1} = 0\right), \dots \\ \dots, N_{m_{n+1},n+1} = \left(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\alpha}_{n+1} = m_{n+1} - 1\right) \end{matrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{matrix} N_{1,n+2} = \left(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\alpha}_{n+2} = 0\right), \dots \\ \dots, N_{m_{n+2},n+2} = \left(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\alpha}_{n+2} = m_{n+2} - 1\right) \end{matrix} \right\},$$

……………………………………………………………,

……………………………………………………………,

$$\left\{ \begin{matrix} N_{1,k} = \left(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\alpha}_k = 0\right), \dots \\ \dots, N_{m_k,k} = \left(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\alpha}_k = m_k - 1\right) \end{matrix} \right\}$$

и в каждой группе на основе операции группового сравнения выбираем

$$N_{\min,n+1} = \min\left\{N_{1,n+1}, N_{2,n+1}, N_{m_{n+1},n+1}\right\},$$

$$N_{\min,n+2} = \min\left\{N_{1,n+2}, N_{2,n+2}, N_{m_{n+2},n+2}\right\},$$

……………………………………………………,

……………………………………………………,

$$N_{\min,k} = \min\left\{N_{1,k}, N_{2,k}, N_{mk,k}\right\}.$$

Остатки $\tilde{\alpha}_{\min,n+1}, \dots, \tilde{\alpha}_{\min,k}$ чисел $N_{\min,n+1}, N_{\min,n+2}, \dots, N_{\min,k}$ являются искомыми остатками $\tilde{\tilde{\alpha}}_{n+1}, \dots, \tilde{\tilde{\alpha}}_k$.

Вместе с тем для решения ряда задач зачастую требуется знать, во сколько раз при выполнении операций сложения, вычитания или умножения был превзойден диапазон $\left[0, M_{\partial}\right)$. Целое положительное число $\Theta = \dfrac{N - \tilde{N}_0}{M_{\partial}}$, показывающее, во сколько раз был превзойден диапазон $\left[0, M_{\partial}\right)$, называется рангом числа N.

Для чисел N и $\tilde{N}_0$ $\tilde{\tilde{\alpha}}_1 = \tilde{\alpha}_1, \tilde{\tilde{\alpha}}_2 = \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\tilde{\alpha}}_n = \tilde{\alpha}_n$. Разность этих чисел

$$\Delta = (\delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \dots, \delta_n = 0,$$
$$\delta_{n+1} = \tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\tilde{\alpha}}_{n+1}, \dots, \delta_k = \tilde{\alpha}_k - \tilde{\tilde{\alpha}}_k).$$

Поэтому

$$\Theta = \frac{N - \tilde{N}_0}{M_{\eth}} = (\varepsilon_1 = \frac{0}{0}, \varepsilon_2 = \frac{0}{0}, \ldots, \varepsilon_i = \frac{0}{0}, \ldots, \varepsilon_n = \frac{0}{0},$$

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\delta_{n+1}}{M_p (\bmod m_{n+1})}, \ldots, \varepsilon_t = \frac{\delta_t}{M_p (\bmod m_t)}, \ldots$$

$$\ldots, \varepsilon_k = \frac{\delta_k}{M_p (\bmod m_k)}).$$

Определение ε_i выполняем путем расширения диапазона представления чисел. Для этого составляем m_i чисел

$$\eta_1 = (\varepsilon_i = 0, \varepsilon_t), \eta_i = (\varepsilon_i = 1, \varepsilon_t), \ldots,$$

$\eta_m = (m-1, \varepsilon_t)$. Поскольку деление производится на M_p, выбирается ε_i минимального из этих чисел.

Выводы

Рассмотрены новые алгоритмы выполнения сложных операций в системе остаточных классов. Алгоритмы установления факта переполнения в результате сложения, вычитания или умножения, расширении диапазона представления чисел, сравнения чисел основаны на «внутреннем» по отношению к системе счисления способе без предварительного преобразования непозиционного представления в позиционное. Алгоритмы позволяют повысить надежность и скорость вычислений в параллельных структурах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акушский И.Я., Юдицкий Д.И. Машинная арифметика в остаточных классах. - М.: Советское радио, 1968. - 440 с.
2. Червяков Н.И. Методы и принципы построения модулярных нейрокомпьютеров.
   Сайт http://www.computer-museum.ru/, 2005
3. Поліський Ю. Д. Про один метод розширення діапазону зображення чисел у системі залишкових класів // Математичне моделювання. - 2007. - №2. - С.16-17.
4. Полисский Ю.Д. Выполнение позиционных операций в непозиционной системе остаточных классов // Математичне моделювання. - 2010.- №1 (22).- С. 79-82.
5. В.М.Амербаев, Ю.Ф.Касимов. О сравнении чисел в непозиционных системах счисления. – В кн. Теория кодирования и оптимизация сложных систем. – Алма-Ата, «Наука» 1977. С. 47-54.

пост. 10.03.11