

Автоколебания (помпаж) компрессора при переходе распределенной сети в систему с дискретными параметрами

ГОЦУЛЕНКО В.В., ГОЦУЛЕНКО В.Н.

Институт предпринимательства "Стратегия"

Установлена причина образования восходящей ветви на напорной характеристике лопастного нагнетателя. Получена математическая модель в виде цепочки связанных осцилляторов для распределенной пневмосистемы, включающей компрессор с неустойчивой ветвью характеристики. Построены периодические автоколебательные решения при переходе распределенной системы к форме с сосредоточенными параметрами.

Встановлена причина утворення висхідної гілки на напірній характеристиці лопатевого нагнітача. Одержана математична модель у вигляді ланцюжка зв'язаних осциляторів для розподіленої пневмосистеми, що включає компресор з нестійкою гілкою характеристики. Побудовані періодичні автоколебальні розв'язки при переході розподіленої системи до форми із зосередженими параметрами.

The reason of formation of an ascending branch on the pressure head characteristic a paddle pump is determined. The mathematical model as a chain connected oscillators for the distributed pneumatic system including the compressor with a unstable branch of the characteristic is received. Periodic self-oscillatory solution are constructed at transition of the distributed system to the form with the concentrated parameters.

Введение. Теория автоколебаний помпажа компрессора изложена в работах [1-4], которые составили основу монографии [5]. Причиной этого явления или его механизм заключается в наличии восходящей ветви на напорной характеристике нагнетателя, а также образовании петли гистерезиса, природа возникновения которых в [5] не была рассмотрена.

Периодические решения уравнений неустановившегося движения сжимаемой среды в дискретной пневмосистеме определялись, используя метод изоклин [1] или метод Ляпунова [5], а в распределенной системе применялся метод малого параметра [4].

Предупреждение автоколебаний теоретически решалось [5] созданием быстродействующих регуляторов или применением резонансного акустического поглотителя. В практике защита от помпажа в системе дутья доменных печей, включающих центробежные воздуходувки или компрессор, осуществляется выбросом в атмосферу бесполезно сжатого воздуха или осуществлением его рециркуляции на вход нагнетателя. Этими мероприятиями препятствуют смещению рабочего режима компрессора в неустойчивую область малых расходов.

В гидросистемах кроме помпажа в области восходящей ветви напорной характеристики $H(Q)$ при работе в кавитационном режиме, перед срывом подачи наблюдались автоколебания неизвестной природы [6].

Экспериментально установлено [7], что при снижении величины кавитационного запаса Δh монотонно убывающая напорная характеристика $H(Q)$ насоса 2К - 6 разветвляется. В области восходящих ее разветвлений $H(Q, \Delta h)$ возбуждается помпаж [7], поскольку $\partial H(Q, \Delta h) / \partial Q > 0$, а автоколебания зависят от реактивного сопротивления гидросистемы. Преобразование восходящих разветвлений $H(Q, \Delta h)$ в устойчивые монотонно убывающие было получено экспериментально в [8], что обеспечило устойчивую работу насоса при малых расходах в режиме кавитации.

Постановка задачи. В данной работе приводится обоснование причины образования восходящей ветви

на напорной характеристике нагнетателя, и рассматриваются возможные способы ее нейтрализации. Также с помощью математического моделирования определяются формы автоколебаний помпажа в распределенной пневмосистеме и их особенности при переходе к дискретной системе.

Обоснование механизма самовозбуждения автоколебаний (помпажа). Проточный тракт межлопастных каналов рабочего колеса и спирального отводящего устройства центробежных нагнетателей являются диффузорами. С понижением подачи в таких каналах возникают отрывные вихревые движения, обильность которых возрастает с уменьшением объемного расхода Q . На зависимости вихревых потерь $h_{\text{вихр.}}(Q)$ при малых подачах образуется нисходящая ветвь отрицательного сопротивления (рис. 1).

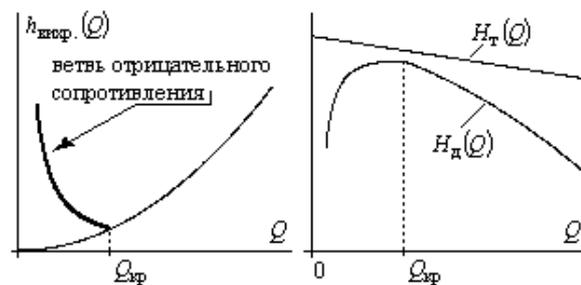


Рис. 1. Характер зависимости гидравлических вихревых потерь $h_{\text{вихр.}}(Q)$ и образование восходящей ветви на действительной характеристике нагнетателя $H_d(Q)$

Поскольку теоретическая характеристика $H_t(Q)$ центробежного нагнетателя, в котором угол установки лопастей рабочего колеса на выходе $\beta_{2д} < \pi/2$ является линейной убывающей функцией Q , то на действительной напорной характеристике нагнетателя

$H_d(Q) = H_T(Q) - h_{\text{вихр.}}(Q)$ (рис. 1, б) при малых подачах образуется восходящая ветвь $dH_d(Q)/dQ > 0$, что составляет необходимое условие помпажа.

При снижении величины кавитационного запаса Δh на входе в рабочее колесо насоса образуется парогазовая каверна, из-за которой зависимость $h_{\text{вихр.}}(Q)$ деформируется, что порождает семейство кавитационных разветвлений $H(Q, \Delta h)$ его напорной характеристики. Оптимальным способом защиты компрессорных нагнетателей от помпажа является: уменьшение рабочего объема проточного тракта компрессора при снижении подачи, используя эластичные камеры изменяемого объема, засувки, перекрывающие выход из межлопаточных каналов и т.д., что исключает отрывные течения и образование восходящей ветви на напорной характеристике нагнетателя.

Математическая модель помпажа в распределенной системе. Система уравнений, описывающая одномерное неустановившееся движение воздуха в пневмосистеме (рис. 2) имеет следующий вид [4-5]

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\ell}{d} \lambda(\text{Re}) \rho \frac{v^2}{2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p(x,t)}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^k, \quad (2)$$

где коэффициент гидравлического трения $\lambda = 64/\text{Re}$ для ламинарного режима движения, когда число Рейнольдса $\text{Re} \leq \text{Re}_{\text{кр}} \approx 2320$ и для турбулентного течения при $\text{Re} > \text{Re}_{\text{кр}}$ согласно формуле Блазиуса $\lambda = 0.3164/\text{Re}^{0.25}$, k – показатель адиабаты, p_0 – давление и ρ_0 – плотность воздуха на входе в компрессор. Система уравнений (1) – (2) дополняется следующими граничными условиями (рис. 2):

$$\text{при } x=0 \quad p = F(v); \quad \text{при } x=\ell \quad p = k_{\text{др}} v^2, \quad (3)$$

где $F(v)$ – напорная характеристика компрессора, $p = k_{\text{др}} v^2$ – характеристика дросселя.

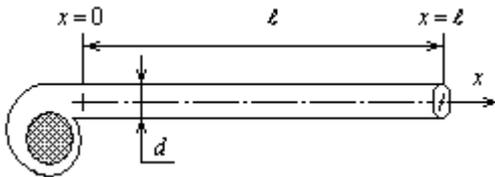


Рис. 2. Схема рассматриваемой пневмосистемы, включающей компрессор

В монографии [9] было показано, что при движении реальной жидкости с дозвуковой скоростью, т.е. при малых числах Маха $M \ll 1$, в уравнениях (1) – (2) можно пренебречь конвективными слагаемыми: $v \partial v / \partial x$ и $v \partial \rho / \partial x$. Покажем, что в этом случае рассматриваемая система приводится к нелинейной системе телеграфных уравнений. Действительно, т.к.

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) - v \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} \approx -\rho \frac{\partial v}{\partial x},$$

то

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) - \rho \left[v \frac{\partial v}{\partial x} \right] \approx \frac{\partial}{\partial t}(\rho v).$$

Таким образом, полагая $G = \rho v$, уравнение (1) приводится к виду $\partial G / \partial t + \chi G^2 = -\partial p / \partial x$, где $\chi = 0.5 \ell \lambda(\text{Re}) / d$. Далее из уравнения адиабаты получаем

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{k}{\rho} \left[p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^k \right] = \frac{k p}{\rho}, \quad \text{но из уравнения состоя-$$

ния $\frac{p}{\rho} = RT$ и, следовательно $\partial p / \partial \rho = c^2$, где $c = \sqrt{kRT}$ – скорость звука. Теперь вычисляя производную по времени t от сложной функции $\rho = \rho[p(t)]$, приходим к следующему соотношению:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)^{-1} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Собирая вместе полученные результаты, приведем систему уравнений (1) – (2) окончательно к следующей форме:

$$\frac{\partial G(x,t)}{\partial t} + \chi G^2 = -\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}, \quad (5)$$

с граничными условиями

$$\text{при } x=0 \quad p = \tilde{F}(G); \quad \text{при } x=\ell \quad p = \tilde{k}_{\text{др}} G^2, \quad (6)$$

где $\tilde{F}(G) = F(G/\rho)$, $\tilde{k}_{\text{др}} = k_{\text{др}} / \rho^2$. Периодическое по времени решение граничной задачи (4) – (6) определяет автоколебательный режим движения воздуха в рассматриваемой установке (рис. 2). Отметим, что в задаче (4) – (6) нахватает начальных условий, которые можно выбрать произвольно (конечно с условием их согласования с граничными условиями (6)), т.к. форма автоколебаний от начальных условий не зависит, а определяется лишь свойствами самой динамической системы [10]. Отметим, что задаче (4) – (6) удовлетворяет стационарное решение $G(x,t) = \xi = \text{const}$, $p(x,t) = \tilde{F}(\xi) - \chi \xi^2 x$, которое при выполнении условий: $\tilde{F}(\xi) = (\tilde{k}_{\text{др}} + \chi \ell) \xi^2$, $\tilde{F}(G) / \partial G|_{G=\xi} > 0$ является неустойчивым, и таким образом, физически нереализуемым. В данном случае при малейших флуктуациях, которые имеют место всегда, динамика системы после режима установления переходит в автоколебательное (автоволновое) периодическое движение, определение которого будет рассмотрено ниже в данной работе.

Построение периодических автоколебательных решений. Для определения решений краевой задачи (4) – (6) воспользуемся методом прямых (характеристик) [11]. Формально данную процедуру можно рассматривать как аппроксимацию исходной распределенной системы цепочкой из N связанных осцилляторов,

причем каждый такой осциллятор является динамической системой с одной степенью свободы. Отметим, что физические переменные $p(x,t)$ и $G(x,t)$ имеют разные

порядки по величине: $|p| \approx 10^4 \text{ Па}$, $|G| \approx 10 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \text{с}}$. Это де-

лает систему (4) – (6) жесткой, что усложняет реализацию ее приближенного или численного интегрирования [12]. Для устранения этого эффекта выполним стандартную процедуру перехода к безразмерным переменным, полагая:

$$z_0 = G/\xi, \quad z_1 = p/\tilde{F}(\xi), \quad y = x/\ell, \quad \tau = \tilde{F}(\xi)\xi^{-1}\ell^{-1}t. \quad (7)$$

В безразмерном виде задача (4) – (6) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial z_0(y,\tau)}{\partial \tau} = -az_0^2 - \frac{\partial z_1}{\partial y}, \\ b \frac{\partial z_1(y,\tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial z_0}{\partial y}, \quad \text{при } 0 < y < 1, \tau \geq 0, \\ \text{при } y = 0 \quad z_1 = H(z_0); \quad \text{при } y = 1 \quad z_1 = k^* z_0^2, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$H(z_0) = \tilde{F}(\xi z_0)/\tilde{F}(\xi), \quad k^* = \xi^2 \tilde{k}_{\text{дп}}/\tilde{F}(\xi),$$

$$a = \chi \xi^2 \ell/\tilde{F}(\xi), \quad b = (\tilde{F}(\xi)/\xi c)^2.$$

Дискретизируем ось y полагая $y_k = kh$ ($k = \overline{0; N}$), $Nh = 1$. Также заменим дифференциальный оператор $\partial/\partial y$ разностным, учитывая, что:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial z_0}{\partial y} \right|_{y=y_k} &= \frac{z_0(y_{k+1}, \tau) - z_0(y_k, \tau)}{h} + O(h), \\ \left. \frac{\partial z_1}{\partial y} \right|_{y=y_k} &= \frac{z_1(y_{k+1}, \tau) - z_1(y_k, \tau)}{h} + O(h). \end{aligned} \quad (9)$$

Введем также обозначения $z_0^{(k)}(\tau) \equiv z_0(y_k, \tau)$, $z_1^{(k)}(\tau) \equiv z_1(y_k, \tau)$ ($k = \overline{0; N}$). Тогда после подстановки равенств (9) в (8) приходим к системе $2N$ нелинейных автономных обыкновенных дифференциальных уравнений: при $k = 0$

$$\begin{cases} h \frac{dz_0^{(0)}}{d\tau} = -ah[z_0^{(0)}(\tau)]^2 + H(z_0^{(0)}) - z_1^{(1)}, \\ bh \frac{dz_1^{(1)}}{d\tau} = z_0^{(0)} - z_0^{(1)}, \end{cases} \quad (10)$$

при $(k = \overline{1; N-2})$

$$\begin{cases} h \frac{dz_0^{(k)}}{d\tau} = -ah[z_0^{(k)}(\tau)]^2 + z_1^{(k)} - z_1^{(k+1)}, \\ bh \frac{dz_1^{(k+1)}}{d\tau} = z_0^{(k)} - z_0^{(k+1)}, \end{cases} \quad (11)$$

при $k = N-1$

$$\begin{cases} h \frac{dz_0^{(N-1)}}{d\tau} = -ah[z_0^{(N-1)}(\tau)]^2 + z_1^{(N-1)} - z_1^{(N)}, \\ bh \frac{dz_1^{(N)}}{d\tau} = z_0^{(N-1)} - \sqrt{\frac{z_1^{(N)}}{k^*}}. \end{cases} \quad (12)$$

Замечание. Для правильной “связки” полученных осцилляторов в одну систему первое уравнение из (8) дискретизируется в точке $y = y_k$, а второе уравнение – в точке $y = y_{k+1}$. Отметим также, что полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений (10) – (12) может быть использована не только для приближенного построения автоколебательного решения краевой задачи (4) – (6), но и для теоретического доказательства его существования. В этом случае достаточно доказать, что решение $\{(z_0(kh, \tau), z_1(kh, \tau))\}_{k=0}^N$ задачи (10) – (12) сходится при $h \rightarrow 0$ к некоторой паре функций $z_0^*(y, \tau)$, $z_1^*(y, \tau)$, которые, как следует из способа их построения, представляют периодическое автоколебательное решение краевой задачи (8).

Система (10) – (12) имеет неустойчивое стационарное решение: $z_0^{(k)} = 1$, $z_1^{(k)} = 1 - ay_k$ ($k = \overline{0; N}$), малое возмущение которого можно рассматривать как начальное условие для решения, которое после некоторого времени установления выходит на режим периодических автоколебаний.

На рис. 3 приведены автоколебательные решения системы уравнений (10) – (12) с характеристикой $\tilde{F}(G) = 3.68 \cdot 10^4 - 6.27 \cdot 10^{-2} G^3 + 3.54 G^2 + 136 G$ [5], полученные в математической среде MathCAD с помощью применения функции gkfixed [13], реализующей численный метод Рунге – Кутты с четвертым порядком аппроксимации.

Для трубопровода малой длины ℓ (рис. 3, а) формы автоколебаний осцилляторов отличаются незначительно и для оценки величины амплитуды автоколебаний достаточно рассмотреть случай одного осциллятора (т.е. $N = 1$). Несложно показать, что в этом случае система уравнений (10) – (12) приводится к классической форме уравнений Боднера – Казакевича для описания помпажа компрессора в динамической системе с одной степенью свободы [5].

Выводы

1. Обоснована причина и установлена природа образования восходящей неустойчивой ветви на напорной характеристике лопастного нагнетателя.
2. Получена математическая модель автоколебаний (помпажа) в распределенной пневмосистеме как цепочка связанных осцилляторов. Установлен характер преобразования автоколебаний при переходе распределенной системы к системе с сосредоточенными параметрами.
3. Рассмотренная математическая модель помпажа при уменьшении длины трубопровода переходит в систему уравнений Боднера – Казакевича, описывающих помпаж в дискретных системах с одной степенью свободы.

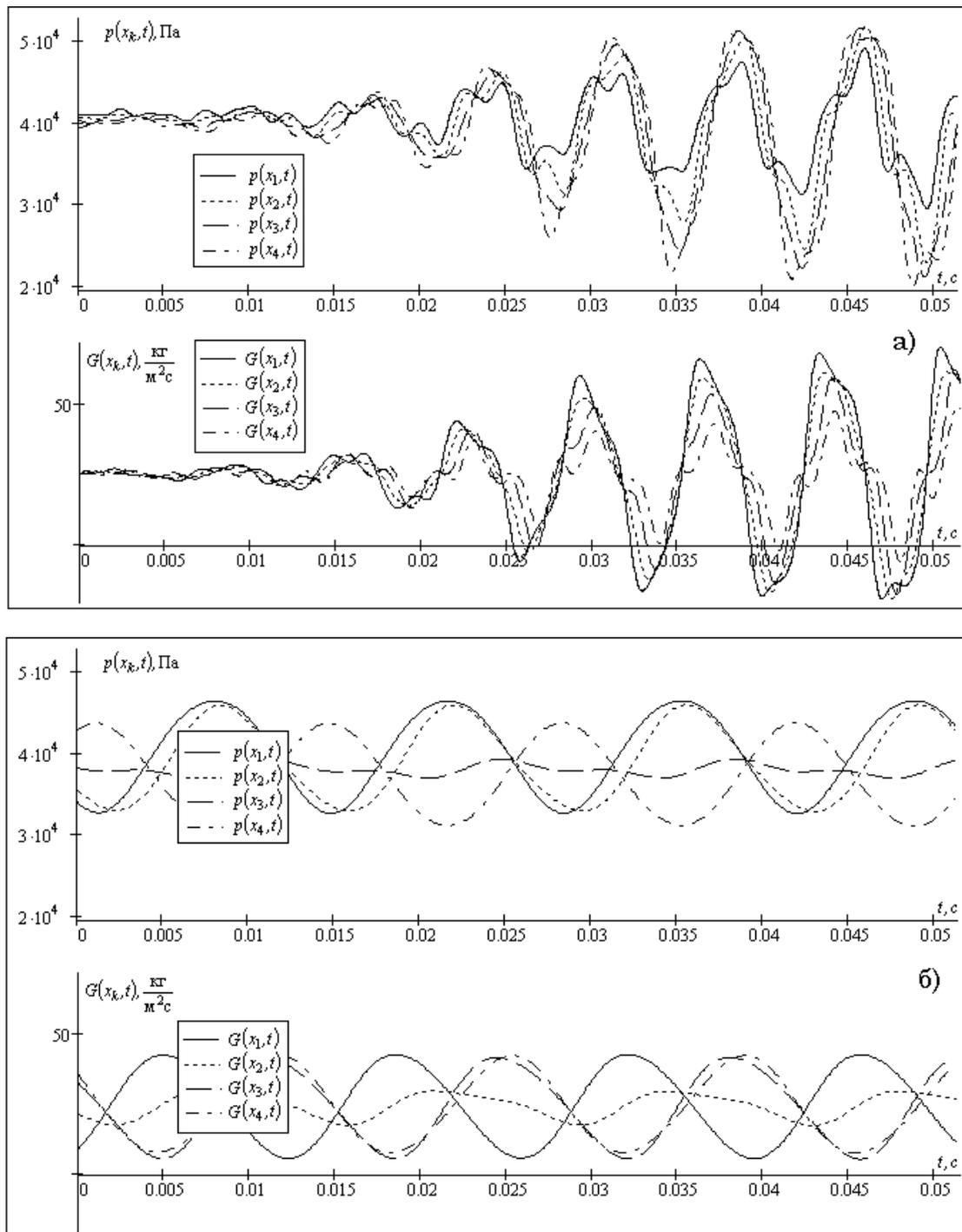


Рис. 3. Формы автоколебаний в узлах $\{x_k\}_{k=0}^{N=4}$ при: а) $l = 0.75$ м ; б) $l = 1.75$ м

ЛИТЕРАТУРА

1. Боднер В. А. Автоколебания в системе, содержащей компрессор / В. А. Боднер // Инженерный сборник АН СССР. – 1950. – Т. 1. – С. 177 – 184.
2. Боднер В. А. Автоколебания в системе с компрессором и методы их устранения / В. А. Боднер // Изв. АН СССР. – 1957. – № 8. – С. 3 – 12.
3. Боднер В. А. Об автоматической стабилизации потенциально неустойчивых систем / В. А. Боднер // Изв. АН СССР. – 1958. – № 3. – С. 145 – 148.
4. Боднер В. А. Об устойчивости компрессоров как нелинейных элементов в распределенных системах / В. А. Боднер, В. В. Казакевич // Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика. – 1959. – № 4. – С. 116 – 125.