2. При нагреве на поверхности пластины возникают сжимающие (отрицательные) напряжения, а в середине растягивающие (положительные); в случае процесса охлаждения знаки поменяются.

3. Нейтральные слои расположены несколько ближе к поверхности.

4. Наибольшее значение по абсолютной величине имеют напряжения на поверхности, которые примерно в 2 раза превышают термонапряжения в середине плиты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбунов А.Д., Шабельник О.М. К расчёту температурных полей и термических напряжений при нагреве плоских тел в движущемся слое / Сб.науч.трудов НМетАУ. – Том 7. – Днепропетровск: 2002. – С. 40–45.
2. Гольдфарб Э.М., Горбунов А.Д. Определение корней трансцендентных уравнений при нагреве тел в прямотоке и противотоке // ИФЖ. – 1984. – Т.46. – № 5. – С. 870–871.
3. Горбунов А.Д., Гольдфарб Э. М. Нахождение корней трансцендентных уравнений в задачах теплопроводности пластины при неоднородных граничных условиях // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1983. – № 8. – С. 104–108.
4. Тайц Н.Ю. Технология нагрева стали. – М.: Металлургиздат, 1950. – 151 с.

пост. 02.02.2010

Вивчення траєкторії руху дроту при введені в металеву ванну під час продувки аргоном на установці ківш-піч. Частина 1. Математична модель

ПІПТЮК В.П.[1], САМОХВАЛОВ С.Є.[2], ГНИП Р.Р.[2], ПАВЛОВ С.М.[1], ОВЧАРЕНКО Т.М.[2]

Інститут чорної металургії НАН України[1]
Дніпродзержинський державний технічний університет[2]

Отримано математичну модель траєкторії руху дроту під час продувки металу в тривимірному випадку.

Получено математическую модель траектории движения проволоки при продувке металла в трехмерном случае.

The mathematical model of trajectory of wire's movement was obtained in 3-dimensional case.

Одним з найбільш ефективних способів ресурсозберігаючої позапічної обробки сталі і модифікування металу є примусовий ввід алюмінієвого або порошкового дроту під рівень металу в сталерозливному або проміжному ковшах.

В існуючих роботах [1..3] досліджена кінетика плавлення дроту в залежності від його діаметру та швидкості вводу, а також задача руху та подальшого засвоєння дроту в процесі усередненої продувки металу в сталерозливному ковші. В роботі [3] під час продувки металу через шиберний затвор задачу було розглянуто в тривимірній постановці, проте не достатньо коректно – явно не було розписано математичну модель.

В даній роботі розглядається математична модель траєкторії руху дроту під час продувки металу в сталерозливному ковші через донний блок з двох фурм або фурму асиметрично розташовану в тривимірному випадку.

Опис руху дроту в ковші будемо моделювати за допомогою набору твердих стрижнів однакової довжини l, зчеплених в єдину систему, які утримуються силами пружності. Стрижні будемо називати векторами $\vec{l}$, направленими від «початку» до «кінця» дроту, причому «початком» його будемо вважати закріплений кінець дроту, або , у випадку, коли дріт розмотується, точку поблизу котушки, швидкість якої задана. «Кінцем» дроту будемо вважати його вільний кінець.

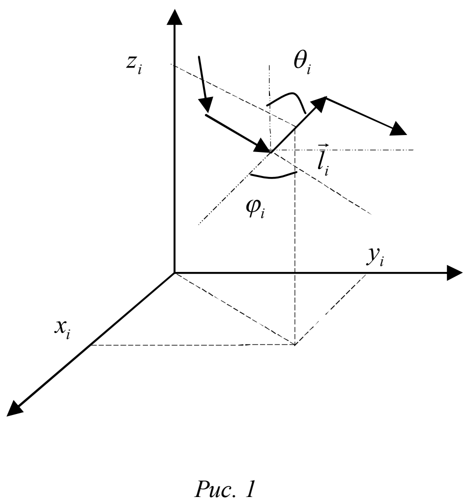

Рис. 1

Надалі будемо вести просторовий розгляд. В такому випадку кількість степенів свободи такої системи дорівнює подвоєному числу стрижнів *N*. В якості узагальнених координат системи можна обрати азимутальні θ_i та полярні φ_i кути в сферичній системі координат, які відносяться до *i*–го стрижня (рис. 1), за допомогою яких декартові координати вектора $\vec{l}_i$, який відноситься до *i*-го стрижня, записуються в наступному виді:

$$\vec{l}_i^{\,x} = l\sin\theta_i\cos\varphi_i,\ \vec{l}_i^{\,y} = l\sin\theta_i\sin\varphi_i,\ \vec{l}_i^{\,z} = l\cos\theta_i \quad (1)$$

Таким чином, радіус-вектори центрів мас стрижнів:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_0 + \sum_{j=1}^{i-1}\vec{l}_j + \frac{1}{2}\vec{l}_i \quad (2)$$

мають наступні декартові координати:

$$x_i = x_0 + l\sum_{j=1}^{i-1}\sin\theta_j\cos\varphi_j + \frac{l}{2}\sin\theta_i\cos\varphi_i, \quad (3)$$

$$y_i = y_0 + l\sum_{j=1}^{i-1}\sin\theta_j\sin\varphi_j + \frac{l}{2}\sin\theta_i\sin\varphi_i, \quad (4)$$

$$z_i = z_0 + l\sum_{j=1}^{i-1}\cos\theta_j + \frac{l}{2}\cos\theta_i \quad (5)$$

і швидкості:

$$v_i^x = v_0^x + l\sum_{j=1}^{i-1}\left(\omega_j\cos\theta_j\cos\varphi_j - \sigma_j\sin\theta_j\sin\varphi_j\right) + \frac{l}{2}\left(\omega_i\cos\theta_i\cos\varphi_i - \sigma_i\sin\theta_i\sin\varphi_i\right), \quad (6)$$

$$v_i^y = v_0^y + l\sum_{j=1}^{i-1}\left(\omega_j\cos\theta_j\sin\varphi_j + \sigma_j\sin\theta_j\cos\varphi_j\right) + \frac{l}{2}\left(\omega_i\cos\theta_i\sin\varphi_i + \sigma_i\sin\theta_i\cos\varphi_i\right), \quad (7)$$

$$v_i^z = v_0^z - l\sum_{j=1}^{i-1}\omega_j\sin\theta_j - \frac{l}{2}\omega_i\sin\theta_i, \quad (8)$$

де $\omega_i = \dot{\theta}_i$, $\sigma_i = \dot{\varphi}_i$ – відповідні кутові швидкості.

Кінетична енергія системи стрижнів задається наступним виразом [4]:

$$T = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{m_i}{2}\left(v_i^{x\,2} + v_i^{y\,2} + v_i^{z\,2}\right) + \frac{l^2}{12}\left(\omega_i^2 + \sigma_i^2\sin^2\theta_i\right)\right], \quad (9)$$

де m_i – маса *i*-го стрижня.

Потенційна енергія системи:

$$U = \sum_{i=1}^{N}\left[gk_i m_i z_i + \frac{\kappa_i}{2}\left(\Delta_i - \psi_i\right)^2\right] \quad (10)$$

визначається полем сил тяжіння з урахуванням виштовхуючої сили (перший доданок в формулі (6)) і силами пружності дроту, які виникають при його згині (другий доданок). Тут g – прискорення вільного падіння, $k_i = (1 - \rho_0/\rho_i)$, де ρ_0 і ρ_i – густина розплаву і середня густина *i*-го стрижня, κ_i - коефіцієнти пружності в з'єднанні (*i* – 1)-го та *i*-го стрижнів, Δ_i – кути між ними, ψ_i – кути залишкової деформації. При визначенні кутів Δ_i припускаємо, що вони малі. В цьому випадку справедливо відношення:

$$\Delta_i^2 = \Delta\theta_i^2 + \Delta\varphi_i^2\sin^2\theta_i, \quad (11)$$

де $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$, $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$

Окрім потенційних сил на систему діють сили опору зі сторони розплаву. Силами опору обертовому рухові стрижнів в порівняні с поступальним знехтуємо. Нехай $\vec{w}_i$ – швидкість центру мас *i*-го стрижня відносно розплаву (поступальна складова швидкості стрижня), а $\vec{l}_i$ – його напрямок. Очевидно, якщо швидкість $\vec{w}_i$ направлена уздовж $\vec{l}_i$, опором руху *i*-го стрижня можна знехтувати. Тому будемо вважати, що сила опору визначається лише перпендикулярній стрижню складовою швидкості:

$$\vec{w}_i^{\perp} = \vec{w}_i - \left(\vec{l}\cdot\vec{w}_i\right)\vec{l}/l^2 \quad (12)$$

наступним чином:

$$\vec{f}_i = -\frac{C}{d_i}m_i w_i^{\perp}\vec{w}_i^{\perp}, \quad (13)$$

де d_i – діаметр *i*-го стрижня, *C* - безрозмірний коефіцієнт опору.

Динаміка системи визначається 2*N* рівняннями Лагранжа другого роду [5]:

$$\dot{p}_k^{\theta} = \frac{\partial T}{\partial\theta_k} - \frac{\partial U}{\partial\theta_k} + Q_k^{\theta}, \quad k = \overline{1,N} \quad (14)$$

$$\dot{p}_k^{\varphi} = \frac{\partial T}{\partial\varphi_k} - \frac{\partial U}{\partial\varphi_k} + Q_k^{\varphi}$$

де

$$\dot{p}_k^{\theta} = \frac{\partial T}{\partial\omega_k},\ \dot{p}_k^{\varphi} = \frac{\partial T}{\partial\sigma_k} \quad (15)$$

узагальнені імпульси, а

$$Q_k^{\theta} = \sum_{i=1}^{N}\vec{f}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial\theta_k},\ Q_k^{\varphi} = \sum_{i=1}^{N}\vec{f}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial\varphi_k} \quad (16)$$

дисипативні узагальнені сили, які пов'язані з кутами θ_k і φ_k відповідно.

Користуючись виразом (9) для кінетичної енергії, визначимо спочатку узагальнені імпульси системи. В результаті отримаємо:

$$p_k^{\theta} = lM_k v_{0k}^1 + l^2\sum_{j=1}^{k-1}M_k\left(a_{jk}\omega_j + b_{jk}\sigma_j\right) + l^2\left(M_k - \frac{m_k}{6}\right)\omega_k + l^2\sum_{j=k+1}^{N}M_j\left(a_{jk}\omega_j + b_{jk}\sigma_j\right),$$

$$p_k^{\varphi} = lM_k v_{0k}^2 + l^2\sum_{j=1}^{k-1}M_k\left(c_{jk}\omega_j + d_{jk}\sigma_j\right) + l^2\left(M_k - \frac{m_k}{6}\right)\sigma_k\sin^2\theta_k + l^2\sum_{j=k+1}^{N}M_j\left(c_{jk}\omega_j + d_{jk}\sigma_j\right).$$

Тут введені позначення:

$$M_i = \sum_{j=i+1}^{N}m_j + \frac{m_i}{2} \quad (17)$$

для маси частини системи, яка розміщена після центру мас *i*-ої ланки,

$$v_{0k}^1 = \left(v_0^x\cos\varphi_k + v_0^y\sin\varphi_k\right)\cos\theta_k - v_0^z\sin\theta_k,$$

$$v_{0k}^2 = -\left(v_0^x\sin\varphi_k - v_0^y\cos\varphi_k\right)\sin\theta_k,$$

для компонент різним способом повернутої початкової швидкості, а також

$$a_{jk} = \cos\theta_j\cos\theta_k\cos\left(\varphi_j - \varphi_k\right) + \sin\theta_j\sin\theta_k,$$

$$b_{jk} = -\sin\theta_j\cos\theta_k\sin\left(\varphi_j - \varphi_k\right),$$

$$c_{jk} = \cos\theta_j\sin\theta_k\sin\left(\varphi_j - \varphi_k\right),$$

$$d_{jk} = \sin\theta_j \sin\theta_k \cos(\varphi_j - \varphi_k)$$

для характерних комбінацій тригонометричних функцій.

Обчислимо узагальнені сили, які діють на систему і, перш за все, сили інерційного походження:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_k} = \frac{l^2}{24} m_k \sigma_k^2 \sin 2\theta_k - l \sum_{j=k+1}^{N} m_j \left(v_{jk}^3 \omega_k + v_{jk}^4 \sigma_k\right) - $$
$$- \frac{l}{2} m_k \left(v_{kk}^3 \omega_k + v_{kk}^4 \sigma_k\right),$$
$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_k} = -l \sum_{j=k+1}^{N} m_j \left(v_{jk}^5 \omega_k + v_{jk}^6 \sigma_k\right) -$$
$$- \frac{l}{2} m_k \left(v_{kk}^5 \omega_k + v_{kk}^6 \sigma_k\right),$$

де введені компоненти різним чином повернутих швидкостей,

$$v_{jk}^3 = \left(v_j^x \cos\varphi_k + v_j^y \sin\varphi_k\right)\sin\theta_k + v_j^z \cos\theta_k,$$
$$v_{jk}^4 = \left(v_j^x \sin\varphi_k - v_j^y \cos\varphi_k\right)\cos\theta_k,$$
$$v_{jk}^5 = \left(v_j^x \sin\varphi_k - v_j^y \cos\varphi_k\right)\cos\theta_k,$$
$$v_{jk}^6 = \left(v_j^x \cos\varphi_k + v_j^y \sin\varphi_k\right)\sin\theta_k,$$

які лінійно залежать від кутових швидкостей ω_i, σ_i системи і ці залежності мають наступний вигляд:

$$v_{jk}^3 = v_{0k}^3 + l \sum_{i=1}^{j-1} \left(r_{ik}\omega_i - n_{ik}\sigma_i\right) + \frac{l}{2}\left(r_{jk}\omega_j - n_{jk}\sigma_j\right),$$
$$v_{jk}^4 = v_{0k}^4 + l \sum_{i=1}^{j-1} \left(s_{ik}\omega_i - t_{ik}\sigma_i\right) + \frac{l}{2}\left(s_{jk}\omega_j - t_{jk}\sigma_j\right),$$
$$v_{jk}^5 = v_{0k}^5 + l \sum_{i=1}^{j-1} \left(s_{ik}\omega_i - t_{ik}\sigma_i\right) + \frac{l}{2}\left(s_{jk}\omega_j - t_{jk}\sigma_j\right),$$
$$v_{jk}^6 = v_{0k}^6 + l \sum_{i=1}^{j-1} \left(m_{ik}\omega_i - n_{ik}\sigma_i\right) + \frac{l}{2}\left(m_{jk}\omega_j - n_{jk}\sigma_j\right),$$

де

$$r_{jk} = \cos\theta_j \sin\theta_k \cos(\varphi_j - \varphi_k) - \sin\theta_j \cos\theta_k,$$
$$n_{jk} = \sin\theta_j \sin\theta_k \sin(\varphi_j - \varphi_k),$$
$$s_{jk} = -\cos\theta_j \cos\theta_k \sin(\varphi_j - \varphi_k),$$
$$t_{jk} = \sin\theta_j \cos\theta_k \cos(\varphi_j - \varphi_k),$$
$$m_{jk} = \cos\theta_j \sin\theta_k \cos(\varphi_j - \varphi_k).$$

Узагальнені сили потенційного, а також дисипативного походження визначаються виразами (10) і (13) тому мають наступний вигляд:

$$-\frac{\partial U}{\partial \theta_k} = l \sum_{i=k+1}^{N} g k_i m_i \sin\theta_k + \frac{l}{2} g k_k m_k \sin\theta_k +$$
$$+ \kappa_k \frac{\Delta_k - \psi_k}{\Delta_k}\left(\theta_k - \theta_{k-1}\right) - \kappa_{k+1} \frac{\Delta_{k+1} - \psi_{k+1}}{\Delta_{k+1}}\left(\theta_{k+1} - \theta_k\right) -$$
$$- \kappa_k \frac{\Delta_k - \psi_k}{2\Delta_k}\left(\Delta\varphi_k^{\,2} \cos 2\theta_k\right),$$
$$-\frac{\partial U}{\partial \theta_k} = \kappa_{k+1} \frac{\Delta_{k+1} - \psi_{k+1}}{\Delta_{k+1}} \Delta\varphi_{k+1} \sin^2\theta_{k+1} -$$
$$- \kappa_k \frac{\Delta_k - \psi_k}{\Delta_k} \Delta\varphi_k \sin^2\theta_k,$$
$$Q_k^\theta = l \sum_{j=k+1}^{N} f_{jk}^\theta + \frac{l}{2} f_{kk}^\theta,$$
$$Q_k^\varphi = l \sum_{j=k+1}^{N} f_{jk}^\varphi + \frac{l}{2} f_{kk}^\varphi,$$

де $\quad f_{jk}^\theta = f_j\left(\cos\varphi_k + \sin\varphi_k\right)\cos\theta_k - f_j \sin\theta_k,$

$$f_{jk}^\varphi = f_j\left(\cos\varphi_k - \sin\varphi_k\right)\sin\theta_k$$

Підставляючи отримані вирази в рівняння Лагранжа (14), знаходимо систему $2N$ динамічних рівнянь для даної механічної системи:

$$\sum_{j=1}^{k-1} M_k\left(a_{jk}\alpha_j + b_{jk}\beta_j\right) + \left(M_k - \frac{m_k}{6}\right)\alpha_k + + \sum_{j=k+1}^{N} M_j\left(a_{jk}\alpha_j + b_{jk}\beta_j\right) = q_k, \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} M_k\left(c_{jk}\alpha_j + d_{jk}\beta_j\right) + \left(M_k - \frac{m_k}{6}\right)\beta_k \sin^2\theta_k + + \sum_{j=k+1}^{N} M_j\left(c_{jk}\alpha_j + d_{jk}\beta_j\right) = h_k, \tag{19}$$

$$k = \overline{1, N},$$

де

$$q_k = \frac{\sigma_k^2}{2}\sin 2\theta_k \left(M_k - \frac{m_k}{6}\right) + \sum_{j=1}^{k-1} M_k\left(\tilde{a}_{jk}\omega_j^2 + \tilde{b}_{jk}\sigma_j^2\right) +$$
$$+ 2\sum_{j=1}^{k-1} M_k \tilde{g}_{jk}\omega_j\sigma_j + \sum_{j=k+1}^{N} M_j\left(\tilde{a}_{jk}\omega_j^2 + \tilde{b}_{jk}\sigma_j^2\right) +$$
$$+ 2\sum_{j=k+1}^{N} M_j \tilde{g}_{jk}\omega_j\sigma_j + \left(-\frac{\partial U}{\partial \theta_k} + Q_k^\theta\right) / l^2,$$
$$h_k = -\left(M_k - \frac{m_k}{6}\right)\sigma_k\omega_k \sin 2\theta_k + \sum_{j=1}^{k-1} M_k \tilde{c}_{jk}\left(\omega_j^2 + \sigma_j^2\right) -$$
$$- 2\sum_{j=1}^{k-1} M_k \tilde{d}_{jk}\omega_j\sigma_j + \sum_{j=k+1}^{N} M_j \tilde{c}_{jk}\left(\omega_j^2 + \sigma_j^2\right) -$$
$$- 2\sum_{j=k+1}^{N} M_j \tilde{d}_{jk}\omega_j\sigma_j + \left(-\frac{\partial U}{\partial \varphi_k} + Q_k^\varphi\right) / l^2,$$

Тут введено позначення

$$\tilde{a}_{jk} = \sin\theta_j \cos\theta_k \cos(\varphi_j - \varphi_k) - \cos\theta_j \sin\theta_k,$$
$$\tilde{b}_{jk} = \sin\theta_j \cos\theta_k \cos(\varphi_j - \varphi_k),$$
$$\tilde{g}_{jk} = \cos\theta_j \cos\theta_k \sin(\varphi_j - \varphi_k)$$
$$\tilde{c}_{jk} = \sin\theta_j \sin\theta_k \sin(\varphi_j - \varphi_k),$$
$$\tilde{d}_{jk} = \cos\theta_j \sin\theta_k \cos(\varphi_j - \varphi_k),$$

$\alpha_i = \dot{\omega}_i$, $\beta_i = \dot{\sigma}_i$ - кутові прискорення, причому праві частині рівнянь (18)-(19) від них не залежать і є функціями лише узагальнених координат θ_k, φ_k і швидкостей ω_i, σ_i, які визначаються вищеописаними виразами для узагальнених імпульсів і сил.

Отримана система (18)-(19) має структуру системи лінійних рівнянь відносно кутових швидкостей:

$$\sum_{a=1}^{2N} B_{ba}\gamma_a = t_b, \; b = \overline{1, 2N}, \tag{20}$$

$$\alpha_i = \gamma_i, \; \beta_i = \gamma_{N+i}, \; p_i = t_i, \; r_i = t_{N+i}$$